Estruturas Algébricas

Lista 4

1) Sejam N e P submódulos de um R módulo Q e seja M um R módulo qualquer. Mostre que

$$_R\mathrm{Hom}(M, N \cap P) \cong {}_R\mathrm{Hom}(M, N) \cap {}_R\mathrm{Hom}(M, P).$$

(Sugestão, use o pull back e o fato que $_R\mathrm{Hom}(M, \cdot)$ é exato à esquerda.

2) Mostre que a soma direta de uma família de R módulos é um R módulo projetivo se, e somente se cada um deles o for.

3) Mostre que um somando direto de um módulo projetivo é um módulo projetivo.

4) Dê um exemplo de um módulo projetivo que não é livre.

5) Mostre que dado um anel R, são equivalentes as afirmações:

(I) Todo R módulo é projetivo.

(II) Todo R módulo é injetivo.

6) Seja R um domínio

a) Se I e J ideais não nulos de R, mostre que $I \cap J \neq \{0\}$.

b) Mostre que um ideal de R que é um R módulo livre tem que ser ideal principal.

c) Mostre que, se R é um R módulo injetivo, então R é corpo.

d) Se R não for corpo, mostre que se M é um R módulo projetivo e injetivo, então $M = \{0\}$.

7) Para cada primo p, seja o$\mathbb{Z}$ módulo

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \frac{\{\frac{m}{p^n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}}{\mathbb{Z}} \leq \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$$

Mostre que $\mathbb{Z}(p^\infty)$ é um $\mathbb{Z}$ módulo divisível.

8) Mostre o dual do lema de Schanuel: Dadas duas sequências exatas

$$0 \to M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q \to 0$$

$$0 \to M \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} Q' \to 0$$

com E e E' injetivos. Então existe um isomorfismo

$$Q \oplus E' \cong Q' \oplus E.$$

9) Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais e $X \subseteq \mathbb{V}$ e $Y \subseteq \mathbb{W}$ subespaços vetoriais. Mostre que $X \otimes Y \cong (X \otimes \mathbb{W}) \cap (\mathbb{V} \otimes Y)$.

10) Sejam $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$, $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ $\mathbb{K}$ espaços vetoriais e $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2)$. Mostre que $\mathrm{Ker}(f \otimes g) \cong \mathrm{Ker}(f) \otimes \mathbb{W}_1 + \mathbb{V}_1 \otimes \mathrm{Ker}(g)$.

11) Seja B um grupo abeliano. Mostre que $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} B \cong B/nB$.

12) Mostre que $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

13) Mostre que $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_d$, onde $d = \mathrm{mdc}(m, n)$.

14) Mostre que a soma direta de R módulos $\oplus_{iinI} M_i$ é um módulo plano se, e somente se, todos os R módulos M_i o forem.

15) Mostre que, se tod submódulo finitamente gerado de M for plano, então M é plano.

16) Considere R um anel comutativo com unidade

- **a)** Mostre que, se P e Q forem R módulos projetivos, então $P \otimes_R Q$ também o será.
- **b)** Mostre que, se P e Q forem R módulos planos, então $P \otimes_R Q$ também o será.

17) Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra e (A, μ, η) uma álgebra, ambas sobre uma anel comutativo com unidade R. Mostre que $F = \mathrm{Hom}_R(C, A)$ é uma álgebra com unidade cujo produto é dado por

$$f * g(c) = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta(c)$$

e cujo elemento unidade é dado por $\mathbf{1}_F = \eta \circ \varepsilon$, isto é, $\mathbf{1}_F(c) = \varepsilon(c)\mathbf{1}_A$.

18) Mostre os seguintes isomorfismos:

a) Se ${}_RM$, então $R \otimes_R M \cong M$, isomorfismo de R módulos à esquerda.

b) SE M_R, então $M \otimes_R R \cong M$, isomorfismo de R módulos à direita.

c) Se ${}_RM_S$, ${}_SN_T$ e ${}_TP_U$, então $M \otimes_S (N \otimes_T P) \cong (M \otimes_S N) \otimes_T P$, isomorfismo de $R--U$ bimódulos.

d) Se R é anel comutativo com unidade e M e N são R bimódulos, então $M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$, isomorfismo de R bimódulos.

e) Se M_R ${}_RN_S$ e P_S, então $\mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N, P) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N, P))$, isomorfismo de $\mathbb{Z}$ módulos.

19) Seja G um grupo e $\pi : G \to GL(\mathbb{V})$ e $\sigma : G \to GL(\mathbb{W})$ duas representações lineares do grupo G. Mostre que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \pi \otimes \sigma : & G & \to & GL(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) \\ & g & \mapsto & \pi(g) \otimes \sigma(g) \end{array}$$

é uma representação de G.

20) Mostre que, se A é uma $\mathbb{K}$ álgebra, então existe o isomorfismo de álgebras

$$M_n(\mathbb{K}) \otimes A \cong M_n(A)$$

21) Mostre o isomorfismo de $\mathbb{K}$ álgebras: $M_n(\mathbb{K}) \otimes M_m(\mathbb{K}) \cong M_{nm}(\mathbb{K})$.