Estruturas Algébricas

Prova 1

Nome:

- 1) Seja R um domínio principal, isto é, um anel comutativo com unidade, sem divisores de zero e tal que todos os seus ideais são principais. Seja M um R módulo tal que exista $a \in R$ satisfazendo $\langle a \rangle \cdot M = 0$. Seja $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, a decomposição de a em fatores primos distintos. Sejam finalmente os subconjuntos

$$M_i = \{m \in M \mid p_i^{\alpha_i} \cdot m = 0\}.$$

Mostre que cada um dos M_i é submódulo de M e que $M \cong M_1 \oplus \dots \oplus M_k$. (2 pontos)

- 2) Seja R um domínio, e M um R módulo, dizemos que $m \in M$ é um elemento de torção se existir $a \in R$ não nulo tal que $a \cdot m = 0$. Defina tM como o subconjunto dos elementos de torção de M . Um módulo M é dito sem torção quando $tM = \{0\}$.
- a) Mostre que tM é um submódulo de M . (0,5 ponto)
- b) Mostre que M/tM é um módulo sem torção. (0,5 ponto)
- c) Mostre que, se $M \cong N$, então $tM \cong tN$ e $M/tM \cong N/tN$. (1 ponto)

- 3) Seja R um anel com unidade e considere duas famílias de R módulos à esquerda: $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ e $\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$. Defina $H = \{(f_{ij})_{ij} \mid f_{ij} \in {}_R\text{Hom}(M_i, N_j)\}$ com uma estrutura de grupo abeliano dada por $(f_{ij})_{ij} + (g_{ij})_{ij} = (f_{ij} + g_{ij})_{ij}$. Mostre que existe o isomorfismo de grupos abelianos

$$H \cong {}_R\text{Hom} \left(\bigoplus_{i=1}^n M_i, \bigoplus_{j=1}^n N_j \right). \quad (2 \text{ pontos})$$

4) Seja (X, a, b) o push out de f e g conforme o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & M \\ g \downarrow & & \downarrow a \\ N & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

Mostre que se f é monomorfismo, então b também o será. (2 pontos)

5) Considere o diagrama a seguir com a linha exata

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & P & & \\ & & & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

Mostre que temos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{b} & P \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow a & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde (X, a, b) é o pull back de g e h . (2 pontos)