Estruturas Algébricas, Prova II

Nome:

- 1) Um anel R se chama hereditário à esquerda se todo ideal à esquerda de R for um R módulo projetivo.
 - a) Mostre que, se R é hereditário à esquerda, então todo submódulo de um A módulo livre é isomorfo a uma soma direta de R módulos, cada um dos quais isomorfo a um ideal à esquerda de R . (1 ponto)
 - b) Mostre que R é hereditário à esquerda se, e somente se, todo submódulo de um R módulo projetivo for projetivo. (1 ponto)
- 2) Seja M um R módulo à esquerda. Chama-se resolução projetiva de M uma seqüência exata da forma

$$\cdots P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$$

onde cada P_i é um R módulo projetivo.

- a) Mostre que todo R módulo M admite resolução projetiva. (1 ponto)
- b) Sejam os R módulos M e N e o homomorfismo $f : M \rightarrow N$. Mostre, que, dadas as resoluções projetivas

$$\cdots P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$$

e

$$\cdots Q_n \xrightarrow{\delta_n} Q_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\delta_1} Q_0 \xrightarrow{\delta_0} N \rightarrow 0$$

Mostre que, para cada $n \geq 0$ existem homomorfismos $f_n : P_n \rightarrow Q_n$ tais que $f_{n-1} \circ d_n = \delta_n \circ f_n$. (1 ponto)

- 3) Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$ e seja $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$, fazendo com que $\mathbb{V}$ tenha estrutura de $\mathbb{K}[x]$ módulo, denominado $\mathbb{V}^{(T)}$.

- a) Mostre, usando o teorema dos divisores elementares que existem elementos $a_i \in \mathbb{K}$ e inteiros $\alpha_{i1} \geq \alpha_{i2} \geq \dots \geq \alpha_{it_i}$ tais que

$$\mathbb{V}^{(T)} \cong \bigoplus_{ij} \frac{\mathbb{K}[x]}{\langle (x - a_i)^{\alpha_{ij}} \rangle},$$

isomorfismo de $\mathbb{K}[x]$ módulos. (1 ponto)

- b) Seja $(x - a)^\alpha$ um divisor elementar de $\mathbb{V}^{(T)}$. Mostre que

$$B = \{(x - a)^r + \langle (x - a)^\alpha \rangle \mid 0 \leq r \leq \alpha\}$$

é uma base, como $\mathbb{K}$ espaço vetorial, de

$$\frac{\mathbb{K}[x]}{\langle (x - a)^\alpha \rangle}, \quad (1 \text{ ponto})$$

- c) Considerando os dois exercícios anteriores, determine a matriz da transformação T na base que é a união para todos os divisores elementares das bases encontradas no ítem anterior (esta é a forma canônica de Jordan). (1 ponto)
- 4) Uma extensão essencial de um R módulo M é um R módulo E tal que M é submódulo essencial, isto é, se $0 \neq N \leq E$ então $N \cap M \neq 0$. E E é extensão essencial maximal de M se qualquer E' tal que $E \subsetneq E'$, então E' não é extensão essencial de M .
- a) Mostre que são equivalentes as seguintes afirmativas: (1 ponto)
- (i) E é extensão essencial maximal de M .
 - (ii) E é extensão maximal de M e é injetivo.
 - (iii) E é injetivo e não existe R módulo injetivo I tal que $M \subseteq I \subsetneq E$
- b) Esta extensão essencial maximal de M se chama envolvente injetiva de M , ou seja, é o “menor” módulo injetivo que contém M . Mostre que todo R módulo M admite envolvente injetiva. (2 pontos)

Coragem, força, determinação!