Estruturas Algébricas, Prova III

Nome:

1) Descreva produtos diretos, somas diretas (coprodutos), pull backs e push outs na categoria dos conjuntos e na categoria dos grupos (mostrando todos os detalhes de que a construção verifica a propriedade universal). (2 pontos)

2) Um objeto G é um monóide em uma categoria $\mathcal{C} \subseteq \underline{\text{Set}}$ se existirem morfismos $\mu : G \times G \to G$ e $\eta : \{*\} \to G$ satisfazendo às seguintes propriedades:

(i) Associatividade:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "{(\mu, Id_G)}"] \arrow[d, "{(Id_G, \mu)}"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"'] \\
G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G
\end{tikzcd}$$

(ii) Unidade:

$$\begin{tikzcd}
G \times \{*\} \arrow[r, "{(Id_G, \eta)}"] \arrow[dr, "\rho"'] & G \times G \arrow[d, "\mu"'] & \{*\} \times G \arrow[l, "{(\eta, Id_G)}"] \arrow[dl, "\lambda"'] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Onde $\rho : G \times \{*\} \to G$ e $\lambda : \{*\} \times G \to G$ são os isomorfismos canônicos: $\rho(a, *) = a$ e $\lambda(*, a) = a$.

Mostre que na categoria dos monóides, um objeto monóide é um monóide comutativo. (1 ponto)

3) Sejam $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dois funtores. Dizemos que o funtor F é adjunto à esquerda do funtor G se existir um isomorfismo natural $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\_\_), \_\_) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_\_, G(\_\_))$, ou seja, para cada par de objetos $(X, Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ temos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$, e este isomorfismo é natural. Mostre que F é adjunto à esquerda de G se, e somente se, existirem transformações naturais (não necessariamente isomorfismos) $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ e $\epsilon : FG \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ satisfazendo

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(\eta_X)"] \arrow[dr, "Id_{F(X)}"'] & FGF(X) \arrow[d, "\epsilon_{F(X)}"'] \\
& F(X)
\end{tikzcd}$$

para todo objeto $X \in \mathcal{C}$, e

$$\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[r, "\eta_{G(Y)}"] \arrow[dr, "Id_{G(Y)}"'] & GFG(Y) \arrow[d, "G(\epsilon_Y)"'] \\
& G(Y)
\end{tikzcd}$$

para todo objeto $Y \in \mathcal{D}$. (3 pontos)

4) Seja N um R módulo à esquerda,

a) Mostre a partir do que você aprendeu na teoria de módulos que existe um isomorfismo natural

$$\phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\_\_ \otimes_R N, \_\_) \Rightarrow \mathrm{Hom}_R(\_\_, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \_\_)). \qquad \text{(2 pontos)}$$

entre os funtores definidos entre as categorias $\underline{\mathrm{Mod}}_R \times \underline{\mathrm{Ab}}$ e $\underline{\mathrm{Ab}}$.

b) Pelo ítem anterior, verifica-se que o funtor $\_\_ \otimes_R N$, entre as categorias $\underline{\mathrm{Mod}}_R$ e $\underline{\mathrm{Ab}}$, é adjunto à esquerda do funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \_\_)$, entre $\underline{\mathrm{Ab}}$ e $\underline{\mathrm{Mod}}_R$. Determine as trasnformações naturais η e ϵ relativas a este par de funtores adjuntos. (2 pontos)

Coragem, força, determinação!