

Estruturas Algébricas

Getting started!

- 1) Mostre que todo domínio finito é um corpo.
- 2) Dê um exemplo de um homomorfismo entre dois anéis unitais e que não preserva a unidade.
- 3) Mostre que todos os ideais do anel dos inteiros são principais.
- 4) Mostre que sempre dois números inteiros possuem máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.
- 5) Mostre que o kernel de todo homomorfismo de anéis é um ideal.
- 6) Sejam os inteiros não negativos $m_1, m_2, \dots, m_k$ dois a dois primos entre si. Mostre que $\mathbb{Z}/\{m_1 m_2 \dots m_k \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}/m_1 \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_k \mathbb{Z}$.
- 7) Mostre que $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ é invertível, se, e somente se $\text{mdc}(a, n) = 1$.
- 8) Mostre que um corpo não pode conter ideais. Com isto conclua que todo homomorfismo não nulo $\phi : K \rightarrow A$, onde K é um corpo e A um anel qualquer, é monomorfismo.
- 9) Mostre que se o homomorfismo $\phi : K \rightarrow A$, onde K é um corpo, é sobrejetivo, então A é corpo.
- 10) Seja $f : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis e $B \leq S$ um subanel. Mostre que a imagem inversa $f^{-1}(B)$ é subanel de R .
- 11) Seja $f : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis e $I \trianglelefteq S$ um ideal, mostre que $f^{-1}(I)$ é ideal em R .
- 12) Mostre que a composta de homomorfismos de anéis é um homomorfismo de anéis. mostre também que o conjunto imagem de um homomorfismo é um subanel.

- 13) Mostre que se um homomorfismo de anéis é inversível como função, então a função inversa também é um homomorfismo.
- 14) Seja R um domínio, defina em $R \times R^*$, onde $R^* = R \setminus \{0\}$, uma relação dada por $(a, b) \sim (c, d)$ se $ad = bc$. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência. Denote as classes $[(a, b)]$ por $\frac{a}{b}$ e mostre que o quociente $Fr(R) = (R \times R)/\sim$ é de fato um corpo, conhecido como corpo de frações do domínio R , cujas operações são dadas por

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad , \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

- 15) Mostre que, se K é um corpo, então $K \cong Fr(K)$ pela aplicação $r \mapsto \frac{r}{1}$.
- 16) Mostre que o anel de matrizes $M_n(R)$, onde R é um anel com unidade, não possui ideais bilaterais.
- 17) Seja R um anel e I_1 e I_2 ideais de R . Mostre que $I_1 \cap I_2$, $I_1 \cdot I_2 = \{\sum_k i_k j_k \in R \mid i_k \in I_1, j_k \in I_2, k \in \mathbb{N}\}$ e $I_1 + I_2 = \{i + j \mid i \in I_1, j \in I_2\}$ também são ideais de R .
- 18) Seja X um conjunto, K um corpo e $x \in X$. Mostre que o subconjunto

$$A_x = \{f : X \rightarrow K \mid f(x) = 0\}$$

é um ideal maximal do anel K^X .

- 19) Defina $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ como o conjunto das funções contínuas em $\mathbb{R}$ tais que $\forall \varepsilon > 0$ existe um intervalo fechado K tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para $x \notin K$. Mostre que $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é um anel comutativo sem unidade.
- 20) Seja $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o conjunto das funções reais contínuas de suporte compacto, isto é, o conjunto dos pontos para os quais $f(x) \neq 0$ está contido em um intervalo fechado, é um ideal de $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- 21) Seja R um anel sem unidade. Defina em $R \times \mathbb{Z}$ duas operações dadas por

$$(a, m) + (b, n) = (a + b, m + n) \quad , \quad (a, m) \cdot (b, n) = (ab + mb + na, mn).$$

Mostre que $\tilde{R} = R \times \mathbb{Z}$ é um anel com unidade e que R é um ideal maximal de $\tilde{R}$.

- 22) Seja A um anel e $I \trianglelefteq A$. Mostre que os ideais de A/I estão em correspondência um a um com os ideais de A que contém I . Uma vez provado este fato, determine os ideais de $\mathbb{Z}_{12}$.
- 23) Mostre que todo ideal maximal de um anel comutativo com unidade é um ideal primo.
- 24) Mostre que o quociente de um anel comutativo com unidade por um ideal maximal é um corpo.
- 25) Mostre que o quociente de um anel comutativo com unidade por um ideal primo é um domínio.
- 26) Seja $I \trianglelefteq R$ tal que exista um elemento $e \in R$ de forma que, para qualquer outro elemento $a \in R$ tenhamos que $ea - a \in I$ e $ae - a \in I$. Mostre que R/I é um anel com unidade.
- 27) Seja A um anel comutativo e $I \trianglelefteq A$, defina o radical de I como o conjunto

$$J = \{a \in A \mid \exists n \geq 1, \text{ tal que } a^n \in I\}.$$

Mostre que $J \trianglelefteq A$.

- 28) Seja R um anel comutativo com unidade e $a \in R$ um elemento nilpotente. Mostre que $(1 + a) \in R^\times$.
- 29) Mostre que o conjunto dos elementos nilpotentes em um anel comutativo é um ideal.
- 30) Seja R um anel e $I \trianglelefteq R$. Defina o anulador de I como o conjunto

$$\text{Ann}(I) = \{a \in R \mid ai = 0, \forall i \in I\}$$

Mostre que $\text{Ann}(I) \trianglelefteq R$.

- 31) Mostre que o conjunto

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

é um corpo. Mostre que $F \cong \mathbb{C}$.