Estruturas Algébricas

Getting started, 2

1) Mostre que existe um único elemento neutro em um grupo.

2) Mostre que existe um único elemento inverso para cada elemento $a \in G$.

3) Mostre que se $H \subseteq G$ é subgrupo, então o elemento neutro de H é igual ao elemento neutro de G e para qualquer $a \in H$, seu inverso com relação a H é o mesmo inverso com relação a G.

4) Mostre que uma condição necessária e suficiente para que $H \subseteq G$ seja subgrupo de G é que H seja não vazio e que para quaisquer $a, b \in H$, tivermos que $a \cdot b^{-1} \in H$.

5) Mostre que o conjunto dos elementos invertíveis em $\mathbb{Z}_n$ forma um grupo abeliano multiplicativo. Qual é a ordem deste grupo?

6) Mostre que o subconjunto dos números complexos de módulo unitário, $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ é um subgrupo de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

7) Mostre que o conjunto das bijeções em um conjunto X é um grupo.

8) Mostre que todo grupo é isomorfo a um subgrupo de um grupo de bijeções.

9) Seja $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Mostre que $f(e_G) = e_H$. Mostre também que para todo $g \in G$ temos que $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

10) Sejam G e H grupo e $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Mostre que

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(g) \in H | g \in G\}$$

é um subgrupo de H.

11) O grupo S_n é o conjunto das bijeções (permutações) em um conjunto de n elementos. Denotamos uma permutação como

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Vamos exemplificar com $n = 3$. Em S_3 temos os elementos

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A composição de duas permutações é feita como composta de funções (leitura da direita para a esquerda. Assim, por exemplo

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \pi_4.$$

Escreva a tábua de composição do grupo de permutações S_3.

12) Seja G um grupo e H um subgrupo. Mostre que as relações $g \sim_L h \Leftrightarrow g^{-1}h \in H$ e $g \sim_R h \Leftrightarrow gh^{-1} \in H$, são relações de equivalência em G.

13) Dado um sub-grupo H de um grupo G e um elemento $g \in G$, definimos a classe lateral à esquerda de g associada a H como o conjuunto

$$gH = \{k \in G | k \sim_L g\}.$$

Similarmente, a classe lateral à direita de g em relação a H é o conjunto

$$Hg = \{k \in G | k \sim_R g\}.$$

Mostre que duas classes laterais à esquerda g_1H e g_2H ou são disjuntas ou são iguais, mostre analogamente para classes à direita.

14) Mostre que a aplicação $L_g : H \to gH$ é uma bijeção (não homomorfismo) entre H e gH.

15) Seja G um grupo finito e H um sub-grupo e sejam $|G|$ e $|H|$ suas respectivas ordens (número de elementos). Mostre que a quantidade de classes laterais relativas e H é igual a

$$\#C = \frac{|G|}{|H|}.$$

16) Considere o grupo S_3 e o subgrupo $H = \{e, \pi_1\}$. Construa as classes laterais à esquerda e à direita.

17) Seja G um grupo e $H \subseteq G$ um subgrupo. Se as classes laterais à esquerda e à direita de H coincidirem, diremos que H é um subgrupo normal de G, denotado como $H \trianglelefteq G$. Mostre que, para G um grupo e $H \subseteq G$ um subgrupo, então são equivalentes as seguintes afirmativas:

(i) H é subgrupo normal.

(ii) Para qualquer $g \in G$, temos que $gHg^{-1} = H$.

(iii) Para qualquer $g \in G$, temos que $gHg^{-1} \subseteq H$.

18) Seja $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Mostre que

$$\ker(f) = \{g \in G | f(g) = e\}$$

é um subgrupo normal de G.

19) Seja G um grupo e $h \trianglelefteq G$. Mostre que a aplicação canônica,

$$\begin{array}{rccc} \pi : & G & \to & G/H \\ & g & \mapsto & gH \end{array},$$

é um epimorfismo.

20) Seja $\phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos, então existe um único isomorfismo $\overline{\phi} : g/\ker(\phi) \to \mathrm{Im}(\phi)$ tal que o diagrama abaixo comute

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ G/\ker(\phi) \arrow[r, "\overline{\phi}"'] & \mathrm{Im}(\phi) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Onde $i : \mathrm{Im}(\phi) \to H$ é a inclusão canônica.