Seminários II

Relações trigonométricas

1) seja $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ um ângulo tal que $\cos x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, calcule a expressão

$$\sqrt{2\text{cotg}x + \text{cossec}^2 x}$$

2) Mostre que em todo triângulo ΔABC temos que

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

3) Mostre que

$$\frac{\sin 30^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 30^\circ + \cos 40^\circ + \cos 50^\circ} = \text{tg}40^\circ$$

4) Calcule o valor de

$$\frac{(2\sin^4 20^\circ - 2\cos^4 20^\circ)\text{cossec}^4 20^\circ}{3 - 3\text{cotg}^4 20^\circ}$$

5) Calcule k para que as raízes da equação $x^2 - 2kx + k^2 + k = 0$ sejam o seno e o cosseno de um mesmo ângulo.

6) Mostre as seguintes identidades trigonométricas:

a) $\frac{\text{tg}x - \text{cotg}x}{\text{tg}x + \text{cotg}x} = 2\sin^2 x - 1.$

b) $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = (\text{sec}x - \text{tg}x)^2.$

c) $\sin^6 x + \cos^6 x - 2\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x = 0.$

d) $\frac{\text{tg}2x}{\text{tg}2x - \text{tg}x} = 2\cos^2 x.$

e) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1+\cos x}\text{tg}\frac{x}{2}.$

f) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x.$

g) $\sin x \cos x(1 + \text{tg}x)(1 + \text{cotg}x) = 1 + \sin 2x.$

h) $\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg}a + \text{tg}b}{1 - \text{tg}a\text{tg}b}.$

i) $\text{tg}2a = \frac{2\text{tg}a}{1 - \text{tg}^2 a}.$

j) $\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos a - 1}{2}}.$

k) $\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}.$

l) $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

m) $\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

n) $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

o) $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

p) $\frac{\cos a}{1+\sin a} = \frac{1-\sin a}{\cos a}$.

q) $\cos^2 a - \sin^2 a = \frac{1-\mathrm{tg}^2 a}{1+\mathrm{tg}^2 a}$.

r) $\sin^6 a + \cos^6 x - 2\sin^4 a - \cos^4 a + \sin^2 a = 0$.

7) Sabendo-se que

$$\begin{cases} 1+\cos x &= a\sin x \\ 1-\cos x &= b\sin x \end{cases}$$

encontre uma relação entre a e b.

8) Sabendo-se que $\sin x + \cos x = m$, calcule $\sin\ 3x + \cos^3 x$.

9) Se $2\sin x + \cos x = 1$ calcule $\mathrm{tg}x$.

10) Resolva as seguintes equações trigonométricas

a) $\mathrm{tg}7x = \mathrm{tg}3x$.

b) $\mathrm{tg}x\mathrm{tg}3x = 1$.

c) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$.

d) $\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}2x = \mathrm{tg}3x$.

e) $5\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 3$.

f) $\sin 4x + \sin 2x = \cos x$

g) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

11) Resolva as inequações trigonométricas

a) $2\sin^2 x + 7\sin x + 3 \leq 0$.

b) $\cos x + \sqrt{3}\sin x \leq 1$.

12) Calcule

(a) $\sin(2\arcsin x)$, (b) $\mathrm{tg}(\arcsin x)$, (c) $\sin(\mathrm{arctg}x)$.

13) Como podemos definir as funções seno e cosseno com domínio em toda a reta real?

14) Faça o gráfico das seguintes funções, dê seu domínio e conjunto imagem.

(a) $f(x) = \arcsin x$, (b) $f(x) = \arccos x$, (c) $f(x) = \mathrm{arctg}x$.