Seminários II

Funções

1) Seja $f : A \to B$ uma função.

a) Mostre que f é injetiva se, e somente se, existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.

b) Mostre que f é sobrejetiva se, e somente se, existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.

c) Mostre que f é bijetiva se, e somente se, existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ e $h : B \to A$ tal que $f \circ h = \mathrm{Id}_B$, neste caso $g = h$ e é a única função que satisfaz às condições estabelecidas.

2) Considere $f : A \to B$ uma função e $X \subseteq B$. A imagem inversa de X é o subconjunto

$$f^{-1}(X) = \{\, a \in A \mid f(a) \in X \,\}.$$

Mostre que:

a) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

b) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

c) $f^{-1}(B \backslash X) = A \backslash f^{-1}(X)$.

d) Se $X \subseteq Y$, então $f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y)$.

e) $f^{-1}(B) = A$ e $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

3) Considere $f : A \to B$ uma função e $X \subseteq A$. A imagem de X é o subconjunto

$$f(X) = \{\, f(a) \in B \mid a \in X \,\}.$$

Mostre que:

a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

b) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$, e que a igualdade se f for injetiva.

c) Se $X \subseteq Y$, então $f(X) \subseteq f(Y)$.

d) $f(\emptyset) = \emptyset$.

4) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita ser par se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e é ímpar se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como a soma de uma função par e de uma função ímpar.

5) Determine o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções abaixo:

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$.

b) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

c) $f(x) = \sqrt{x^6 - 4x^3 + 4}$.

6) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$\text{(i) } f(0) = 1, \qquad \text{(ii) } f(x+y) = f(x)f(y), \qquad \text{(iii) } 0 < f(1) < 1.$$

Determine o valor de $f(1) + f(2) + \cdots + f(9)$ em termos de $f(1)$.

7) Mostre (sem usar derivada) que a função $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \frac{1}{x}$ possui um valor mínimo e calcule este valor.

8) Descreva, sem usar os símbolos $\sqrt{\ }$ e $|\ |$ a função $f(x) = |x| + |x-1|$.

9) Desenhe o gráfico da função $||||x-5|-1|-1|-2|$.

10) Sejam duas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defina as funções

$$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \qquad \min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Mostre que

$$\begin{aligned} \max\{f,g\}(x) &= \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} \\ \min\{f,g\}(x) &= \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} \end{aligned}$$

11) As funções piso e teto, ou maior inteiro e menor inteiro, respectivamente, são definidas para todos os reais e são dadas por:

$\lfloor x \rfloor =$ O maior inteiro menor ou igual a x, $\qquad \lceil x \rceil =$ O menor inteiro maior ou igual a x,

a) Construa o gráfico das funções piso e teto.

b) A parte fracionária de um número é dade por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, construa o gráfico da função "parte fracionária".

c) Defina a função $g(x) =$ Menor distância entre x e um número inteiro. Descreva g em termos das funções teto e piso e construa o seu gráfico.

d) Mostre que $\lfloor x+y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

e) Mostre que $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$, para $x \in \mathbb{R}_+^*$.

f) Mostre que, se $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$, então $\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor$. Verifique que o resultado vale também para a função teto.

12) Seja $f(x) = x^2 - 4x + 12$, qual o maior número real a tal que $f(x) \geq a$ para todo $x \in \mathbb{R}$?

13) O preço de custo de um produto é de R$ 1,20 por unidade e além disto, o fabricante possui uma despesa de fabricação fixa de R$ 4000,00 independente do número de peças fabricadas. Sabendo-se que o preço do produto é de R$ 2,00 por unidade, qual o número mínimo de peças de para que se comece a ter lucro?

14) Alice entrou em um laboratório mágico e viu várias poções de aumento e diminuição de tamanho. ela bebeu a primeira poção, que dizia "aumente 10% ", depois tomou a segunda, que dizia "diminua 15% ", depois uma terceira, que dizia "aumente 20% " e por fim tomou a última, que dizia "diminua 10% ". Se Alice tinha 1,50m quando entrou no laboratório, qual sua altura quando saiu?

15) Qual o maior número real cuja soma com seu quadrado resulta em seu próprio cubo?

16) Se $2x + y = 3$, qual o valor mínimo de $\sqrt{x^2 + y^2}$?

17) Seja f uma função decrescente de primeiro grau. Se $f(3) = 5$ e $f(f(1)) = 1$ calcule $f(0)$ e x tal que $f(x) = 0$.

18) A partir do gráfico de uma função real f, descreva os gráficos das funções:

$$\begin{array}{ccc} f_1(x) = f(x+c), & f_2(x) = f(x) + c, & f_3(x) = f(ax), \\ f_4(x) = af(x), & f_5(x) = f(-x), & f_6(x) = -f(x). \end{array}$$

Considere os casos $c > 0$, $c < 0$, $0 < a < 1$ e $a > 1$.

19) A partir do exercício anterior e do gráfico de $f(x) = x^2$ descreva um método para determinar o gráfico de $g(x) = ax^2 + bx + c$.

20) Faça o mesmo para a partir de $f(x) = x$ determinar o gráfico de $g(x) = ax+b$.

21) Determine uma restrição de domínio e contradomínio de forma que a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ seja bijetiva. Encontre sua inversa, neste caso.

22) Qual o domínio, imagem e a inversa da função $f(x) = \frac{1}{x}$?

23) Qual a inversa de $f(x) = x + \frac{1}{x}$, para $x > 1$? Domínio? Imagem?

24) Uma vela de cor azul queima completamente em 4 horas e uma vela de cor vermelha queima em 5 horas. Se acendermos a vermelha meia hora antes da azul, depois de quanto tempo teremos que a vela azul terá exatamente a metade do comprimento da vermelha?

25) Um alpinista demora exatamente 12 horas para subir uma montanha, começando sua jornada às 6:00h da manhã. No outro dia, também às 6:00h da manhã ele desce pelo mesmo caminho, também levando 12 horas para fazê-lo. Mostre que existe um ponto da montanha no qual ele passou exatamente na mesma hora, uma vez subindo, outra vez descendo (não importa o rítmo irregular da caminhada, tanto na subida quanto na descida).