

ÁLGEBRAS DE HOPF FRACAS

GABRIEL SAMUEL DE ANDRADE

RESUMO. Estudamos biálgebras fracas, álgebras de Hopf fracas e a módulos de Hopf no contexto fraco. Começamos mostrando propriedades básicas de biálgebras fracas para introduzir o conceito de álgebras de Hopf fracas. Demonstramos o Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf no contexto fraco e introduzimos também o conceito de elemento integral para uma biálgebra fraca, a fim de demonstrar um Teorema de Maschke para álgebras de Hopf fracas.

1. INTRODUÇÃO E NOTAÇÕES

Começamos apresentando a definição de biálgebra fraca. Em toda parte, k é um corpo.

Definição 1.1. *Uma k -biálgebra fraca é uma quintupla $(H, \mu, u, \Delta, \epsilon)$ satisfazendo*

- i) (H, μ, u) é k -álgebra;
- ii) (H, Δ, ϵ) é k -coálgebra;
- iii) *Multiplicatividade da comultiplicação, ou seja,*

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y), \text{ para } x, y \in H;$$

Multiplicatividade fraca da counidade, ou seja

$$\epsilon(xy_{(1)})\epsilon(y_{(2)}z) = \epsilon(xyz) = \epsilon(xy_{(2)})\epsilon(y_{(1)}z);$$

Comultiplicatividade fraca para a unidade, ou seja,

$$(1_H \otimes \Delta(1_H))(\Delta(1_H) \otimes 1_H) = \Delta^2(1_H) = (\Delta(1_H) \otimes 1_H)(1_H \otimes \Delta(1_H))$$

Perceba que a última propriedade pode ser escrita como

$$1_{(1)} \otimes 1_{(2)} 1_{(1')} \otimes 1_{(2')} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \otimes 1_{(3)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(1')} 1_{(2)} \otimes 1_{(2')}.$$

O conceito de biálgebra é auto-dual. De fato, as duas últimas propriedades são as únicas que poderiam apresentar dificuldade, no entanto elas podem ser reescritas, respectivamente, como

$$(\epsilon\mu \otimes \epsilon\mu)(I \otimes \Delta \otimes I) = \epsilon\mu^2 = (\epsilon\mu \otimes \epsilon\mu)(I \otimes \tau\Delta \otimes I),$$

$$(I \otimes \mu \otimes I)(\Delta\eta \otimes \Delta\eta) = \Delta^2\eta = (I \otimes \mu\tau \otimes I)(\Delta\eta \otimes \Delta\eta),$$

em que τ é o morfismo k -linear $\tau : H \otimes H \rightarrow H \otimes H$ definido por $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$, para $x, y \in H$. É por causa disso que o k -espaço vetorial H^* será também uma biálgebra fraca.

Proposição 1.2. *Seja H k -biálgebra fraca, então H^* é k -biálgebra fraca.*

Demonstração: A estrutura de álgebra de H^* é dada pelo produto de convolução, denotado por $*$, definido para $f, g \in H^*$ por

$$(f * g)(x) = f(x_{(1)})g(x_{(2)}), \text{ para todo } x \in H,$$

a unidade é a counidade, $1_{(H^*)} = \epsilon$. A estrutura de coálgebra de H^* é dada pela comultiplicação, que vamos denotar por δ , satisfazendo a seguinte propriedade: para $f \in H^*$, $\delta(f) = f_{(1)} \otimes f_{(2)}$ é tal que

$$f(xy) = f_{(1)}(x)f_{(2)}(y), \text{ para todo } x, y \in H.$$

A counidade, que vamos denotar por E , é dada por $E(f) = f(1_H)$, para todo $f \in H^*$. Vamos mostrar as três últimas propriedades de biálgebra fraca. Sejam $f, g \in H^*$, $x, y \in H$, então

$$\begin{aligned} (f * g)(xy) &= f((xy)_{(1)})g((xy)_{(2)}) \\ &= f(x_{(1)}y_{(1)})g(x_{(2)}y_{(2)}) \\ &= f_{(1)}(x_{(1)})f_{(2)}(y_{(1)})g_{(1)}(x_{(2)})g_{(2)}(y_{(2)}) \\ &= f_{(1)}(x_{(1)})g_{(1)}(x_{(2)})f_{(2)}(y_{(1)})g_{(2)}(y_{(2)}) \\ &= (f_{(1)} * g_{(1)})(x)(f_{(2)} * g_{(2)})(y). \end{aligned}$$

Portanto, temos $(f * g)(xy) = (f_{(1)} * g_{(1)})(x)(f_{(2)} * g_{(2)})(y)$, o que significa que $\delta(f * g) = (f_{(1)} * g_{(1)}) \otimes (f_{(2)} * g_{(2)}) = (f_{(1)} \otimes f_{(2)}) * (g_{(1)} \otimes g_{(2)}) = \delta(f) * \delta(g)$.

Agora, sejam $f, g, h \in H^*$, temos

$$\begin{aligned} E(f * g_{(1)})E(g_{(2)} * h) &= (f * g_{(1)})(1_H)(g_{(2)}h)(1_H) \\ &= f(1_{(1)})g_{(1)}(1_{(2)})g_{(2)}(1_{(1')})h(1_{(2')}) \\ &= f(1_{(1)})g(1_{(2)}1_{(1')})h(1_{(2')}) \\ &= f(1_{(1)})g(1_{(2)})h(1_{(3)}) \\ &= (f * g * h)(1_H) \\ &= E(f * g * h). \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se $E(f * g_{(2)})E(g_{(1)} * h) = E(f * g * h)$.

Finalmente, temos para $x, y, z \in H$,

$$\begin{aligned} (\epsilon_{(1)} \otimes (\epsilon_{(2)} * \epsilon_{(1')}) \otimes \epsilon_{(2')})(x \otimes y \otimes z) &= \epsilon_{(1)}(x)(\epsilon_{(2)} * \epsilon_{(1')})(y)\epsilon_{(2')}(z) \\ &= \epsilon_{(1)}(x)\epsilon_{(2)}(y_{(1)})\epsilon_{(1')}(y_{(2)})\epsilon_{(2')}(z) \\ &= \epsilon(xy_{(1)})\epsilon(y_{(2)}z) \\ &= \epsilon(xyz) \\ &= \epsilon_{(1)}(x)\epsilon_{(2)}(y)\epsilon_{(3)}(z) \\ &= (\epsilon_{(1)} \otimes \epsilon_{(2)} \otimes \epsilon_{(3)})(x \otimes y \otimes z). \end{aligned}$$

Isso mostra que $\epsilon_{(1)} \otimes (\epsilon_{(2)} * \epsilon_{(1')}) \otimes \epsilon_{(2')} = \epsilon_{(1)} \otimes \epsilon_{(2)} \otimes \epsilon_{(3)}$. Analogamente, mostra-se $\epsilon_{(1)} \otimes \epsilon_{(2)} \otimes \epsilon_{(3)} = \epsilon_{(1)} \otimes (\epsilon_{(1')} * \epsilon_{(2)}) \otimes \epsilon_{(2')}$. ■

Observação 1.3. Usando a multiplicatividade da comultiplicação, note que

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \Delta(x1_H) = \Delta(x)\Delta(1_H) = x_{(1)}1_{(1)} \otimes x_{(2)}1_{(2)}, \\ \Delta(x) &= \Delta(1_Hx) = \Delta(1_H)\Delta(x) = 1_{(1)}x_{(1)} \otimes 1_{(2)}x_{(2)}. \end{aligned}$$

Portanto, daqui pra frente, sempre que for necessário vamos usar o fato de que $x_{(1)} \otimes x_{(2)} = x_{(1)}1_{(1)} \otimes x_{(2)}1_{(2)} = 1_{(1)}x_{(1)} \otimes 1_{(2)}x_{(2)}$.

Definimos agora duas aplicações que são muito importantes no estudo de biálgebras fracas. Nessa primeira seção vamos estudar as várias propriedades dessas aplicações. Definimos

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_t : H & \rightarrow & H \\ x & \mapsto & \epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \epsilon_s : H & \rightarrow & H \\ x & \mapsto & 1_{(1)}\epsilon(x1_{(2)}) \end{array}$$

Essas aplicações são chamadas de target e source, respectivamente. Elas definem naturalmente dois subespaços canônicos de H , a saber, $H_t = \epsilon_t(H)$ e $H_s = \epsilon_s(H)$. Exploramos agora uma série de propriedades dessas aplicações. Como as aplicações ϵ_t e ϵ_s são análogas, apresentamos as propriedades e demonstrações apenas para ϵ_t , e escrevemos as propriedades para ϵ_s quando for conveniente.

Proposição 1.4. Valem as seguintes propriedades:

- i) ϵ_t e ϵ_s são idempotentes em $\text{End}(H)$ em relação à composição;
- ii) $\epsilon(x\epsilon_t(y)) = \epsilon(xy)$, para $x, y \in H$;
- iii) $\epsilon(x\epsilon_t(t)) = \epsilon_t(xy)$, para $x, y \in H$.

Demonstração: i) Seja $x \in H$, então

$$\begin{aligned} \epsilon_t(\epsilon_t(x)) &= \epsilon(\epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)}) \\ &= \epsilon(1_{(1)}x)\epsilon(1_{(1')}1_{(2)})1_{(2')} \\ &= \epsilon(1_{(1)}x)\epsilon(1_{(2)})1_{(3)} \\ &= \epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)} \\ &= \epsilon_t(x). \end{aligned}$$

Portanto, $\epsilon_t \circ \epsilon_t = \epsilon_t$.

ii) Para $x, y \in H$, temos

$$\begin{aligned}\epsilon(x\epsilon_t(y)) &= \epsilon(x\epsilon(1_{(1)}y)1_{(2)}) \\ &= \epsilon(x1_{(2)})\epsilon(1_{(1)}y) \\ &= \epsilon(x1_Hy) \\ &= \epsilon(xy).\end{aligned}$$

iii) Sejam $x, y \in H$, temos

$$\begin{aligned}\epsilon_t(x\epsilon_t(y)) &= \epsilon(1_{(1)}x\epsilon_t(y))1_{(2)} \\ &= \epsilon(1_{(1)}xy)1_{(2)} \\ &= \epsilon_t(xy).\end{aligned}$$

■

Proposição 1.5. *Seja H biálgebra fraca, então $\Delta(1_H) \in H_s \otimes H_t$.*

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}(I \otimes \epsilon_t)\Delta(1_H) &= 1_{(1)} \otimes \epsilon_t(1_{(2)}) \\ &= 1_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(1')}1_{(2)})1_{(2')} \\ &= 1_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(2)})1_{(3)} \\ &= 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \\ &= \Delta(1_H).\end{aligned}$$

Portanto, temos $\Delta(1_H) \in H \otimes H_t$. Analogamente, mostra-se $\Delta(1_H) \in H_s \otimes H$. Logo, temos $\Delta(1_H) \in (H \otimes H_t) \cap (H_s \otimes H) = H_s \otimes H_t$. ■

Proposição 1.6. *Seja H biálgebra fraca, então*

- i) *se $x \in H_t$, então $\Delta(x) = 1_{(1)}x \otimes 1_{(2)} = x1_{(1)} \otimes 1_{(2)}$,*
- ii) *se $x \in H_s$, então $\Delta(x) = 1_{(1)} \otimes x1_{(2)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}x$.*

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \Delta(\epsilon_t(x)) \\ &= \Delta(\epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)}) \\ &= \epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)} \otimes 1_{(3)} \\ &= \epsilon(1_{(1)}x)1_{(1')}1_{(2)} \otimes 1_{(2')} \\ &= 1_{(1')}\epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)} \otimes 1_{(2')} \\ &= 1_{(1')}\epsilon_t(x) \otimes 1_{(2')} \\ &= 1_{(1')}x \otimes 1_{(2')}.\end{aligned}$$

Usando $1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \otimes 1_{(3)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}1_{(1')} \otimes 1_{(2')}$, obtemos a outra igualdade do item i). ■

Proposição 1.7. *Seja H biálgebra fraca, $x \in H$, então*

- i) $x_{(1)} \otimes \epsilon_t(x_{(2)}) = 1_{(1)}x \otimes 1_{(2)}$,
- ii) $\epsilon_s(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} = 1_{(1)} \otimes x1_{(2)}$.

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}x_{(1)} \otimes \epsilon_t(x_{(2)}) &= x_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(1')}x_{(2)})1_{(2')} \\ &= 1_{(1)}x_{(1)}\epsilon(1_{(1')}1_{(2)}x_{(2)}) \otimes 1_{(2')} \\ &= 1_{(1)}x_{(1)}\epsilon(1_{(2)}x_{(2)}) \otimes 1_{(3)} \\ &= (1_{(1)}x)_{(1)}\epsilon((1_{(1)}x)_{(2)}) \otimes 1_{(2)} \\ &= 1_{(1)}x \otimes 1_{(2)}.\end{aligned}$$

■

Proposição 1.8. *Sejam $x, y \in H$, então*

- i) $x\epsilon_t(y) = \epsilon(x_{(1)}y)x_{(2)},$
- ii) $\epsilon_s(x)y = y_{(1)}\epsilon(xy_{(2)}).$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}
 x\epsilon_t(y) &= x\epsilon(1_{(1)}y)1_{(2)} \\
 &= \epsilon(1_{(1)}y)x1_{(2)} \\
 &= \epsilon(\epsilon_s(x_{(1)})y)x_{(2)} \\
 &= \epsilon(x_{(1)}y)x_{(2)}.
 \end{aligned}$$

■

Proposição 1.9. *Os subespaços H_t e H_s são subálgebras que contém a unidade 1_H e tais que $xy = yx$, para quaisquer $x \in H_t, y \in H_s$.*

Demonstração: Para $x, y \in H_t$, temos

$$\begin{aligned}
 xy &= x\epsilon_t(y) \\
 &= \epsilon(x_{(1)}y)x_{(2)} \\
 &= \epsilon(1_{(1)}xy)1_{(2)} \\
 &= \epsilon_t(xy).
 \end{aligned}$$

Portanto, $xy \in H_t$.

Agora, temos

$$\begin{aligned}
 \epsilon_t(1_H) &= \epsilon(1_{(1)}1_H)1_{(2)} \\
 &= \epsilon(1_{(1)})1_{(2)} \\
 &= 1_H.
 \end{aligned}$$

Logo, $1_H = \epsilon(1_H) \in H_t$.

Por fim, para $x \in H_t$ e $y \in H_s$, temos

$$\begin{aligned}
 xy &= \epsilon_t(x)\epsilon_s(y) \\
 &= \epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)}1_{(1')}\epsilon(1_{(2')}y) \\
 &= 1_{(1')}\epsilon(1_{(2')}y)\epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)} \\
 &= \epsilon_s(y)\epsilon_t(x) \\
 &= yx.
 \end{aligned}$$

■

Proposição 1.10. *Para $x \in H$, temos*

- i) $\epsilon_t(\epsilon_t(x)y) = \epsilon_t(x)\epsilon_t(y),$
- ii) $\epsilon_s(x\epsilon_s(y)) = \epsilon_s(x)\epsilon_s(y).$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}
 \epsilon_t(\epsilon_t(x)y) &= \epsilon(1_{(1)}\epsilon_t(x)y)1_{(2)} \\
 &= \epsilon(\epsilon_t(x)_{(1)}y)\epsilon_t(x)_{(2)} \\
 &= \epsilon_t(x)\epsilon_t(y).
 \end{aligned}$$

■

Vamos verificar qual a relação entre as aplicações source e target de H e de H^* .

Proposição 1.11. *Seja H biálgebra fraca, então já vimos qu H^* é biálgebra fraca com aplicações source e target dadas por*

$$\begin{array}{ccc}
 E_t : H^* & \rightarrow & H^* \\
 f & \mapsto & f \circ \epsilon_t
 \end{array}
 \quad e \quad
 \begin{array}{ccc}
 E_s : H^* & \rightarrow & H^* \\
 f & \mapsto & f \circ \epsilon_s
 \end{array}$$

Demonstração: Para $f \in H^*$, $x \in H$, temos

$$\begin{aligned}
E_t(f)(x) &= \epsilon_{(1)}(x)E(f * \epsilon_{(2)}) \\
&= \epsilon_{(1)}(x)(f * \epsilon_{(2)})(1_H) \\
&= \epsilon_{(1)}(x)f(1_{(1)}\epsilon_{(2)})(1_{(2)}) \\
&= f(1_{(1)}\epsilon_{(1)}(x)\epsilon_{(2)})(1_{(2)}) \\
&= f(1_{(1)}\epsilon(x1_{(2)})) \\
&= f(\epsilon_t(x)) \\
&= (f \circ \epsilon_t)(x).
\end{aligned}$$

■

Definição 1.12. Seja H uma biálgebra fraca. Dizemos que H é uma álgebra de Hopf fraca se existe uma função k -linear $S : H \rightarrow H$, chamada antípoda, que satisfaz, para todo $x \in H$

- i) $x_{(1)}S(x_{(2)}) = \epsilon_t(x)$;
- ii) $S(x_{(1)})x_{(2)} = \epsilon_s(x)$;
- iii) $S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(3)}) = S(x)$.

Proposição 1.13. Se H é álgebra de Hopf com antípoda S , então H^* é álgebra de Hopf, com antípoda S^* .

Demonstração: Só precisamos mostrar que S^* satisfaz as propriedades de antípoda. Para $f \in H^*$, $x \in H$, temos

$$\begin{aligned}
(f_{(1)} * S^*(f_{(2)}))(x) &= f_{(1)}(x_{(1)})S^*(f_{(2)})(x_{(2)}) \\
&= f_{(1)}(x_{(1)})(f_{(2)})(S(x_{(2)})) \\
&= f(x_{(1)}S(x_{(2)})) \\
&= f(\epsilon_t(x)) \\
&= E_t(f)(x).
\end{aligned}$$

Portanto, $f_{(1)} * S^*(f_{(2)}) = E_t(f)$. Analogamente, mostra-se $S^*(f_{(1)}) * f_{(2)} = E_s(f)$. Agora,

$$\begin{aligned}
(S^*(f_{(1)}) * f_{(2)} * S^*(f_{(3)}))(x) &= S^*(f_{(1)})(x_{(1)})f_{(2)}(x_{(2)})S^*(f_{(3)})(x_{(3)}) \\
&= f_{(1)}(S(x_{(1)}))f_{(2)}(x_{(2)})(f_{(3)})(S(x_{(3)})) \\
&= f(S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(3)})) \\
&= f(S(x)) \\
&= S^*(f)(x).
\end{aligned}$$

Portanto, $S^*(f_{(1)}) * f_{(2)} * S^*(f_{(3)}) = S^*(f)$.

■

Proposição 1.14. Para $x \in H$, valem as seguintes propriedades

- i) $\epsilon_t(x) = \epsilon(S(x)1_{(1)})1_{(2)} = S(1_{(1)})\epsilon(1_{(2)}x)$;
- ii) $\epsilon_s(x) = 1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}S(x)) = \epsilon(x1_{(1)})S(1_{(2)})$.

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}
\epsilon_t(x) &= \epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)} \\
&= \epsilon(1_{(1)}\epsilon_t(x))1_{(2)} \\
&= \epsilon(\epsilon_t(x)1_{(1)})1_{(2)} \\
&= \epsilon(x_{(1)}S(x_{(2)})1_{(1)})1_{(2)} \\
&= \epsilon(\epsilon_s(x_{(1)})S(x_{(2)})1_{(1)})1_{(2)} \\
&= \epsilon(S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(3)})1_{(1)})1_{(2)} \\
&= \epsilon(S(x)1_{(1)})1_{(2)}.
\end{aligned}$$

Como o que acabamos de provar vale para qualquer álgebra de Hopf fraca, aplicando para H^* , temos

$$E_t(f) = E(S^*(f) * \epsilon_{(1)})\epsilon_{(2)}, \text{ para } f \in H^*.$$

Aplicando essa expressão em $x \in H$,

$$\begin{aligned}
 f(\epsilon_t(x)) &= E_t(f)(x) \\
 &= E(S^*(f) * \epsilon_{(1)})\epsilon_{(2)}(x) \\
 &= (S^*(f) * \epsilon_{(1)})(1_H)\epsilon_{(2)}(x) \\
 &= S^*(f)(1_{(1)})\epsilon_{(1)}(1_{(2)})\epsilon_{(2)}(x) \\
 &= f(S(1_{(1)}))\epsilon(1_{(2)}x) \\
 &= f(S(1_{(1)})\epsilon(1_{(2)}x)).
 \end{aligned}$$

Como essa igualdade vale para todo $f \in H^*$, obtemos o resultado. ■

Proposição 1.15. *Seja H uma álgebra de Hopf fraca, valem*

- i) $\epsilon_t S = \epsilon_t \epsilon_s = S \epsilon_s$;
- ii) $\epsilon_s S = \epsilon_s \epsilon_t = S \epsilon_t$.

Demonstração: Seja $x \in H$, então

$$\begin{aligned}
 \epsilon_t(\epsilon_s(x)) &= \epsilon_t(1_{(1)})\epsilon(1_{(2)}S(x)) \\
 &= \epsilon(1_{(1')}1_{(1)})1_{(2')}\epsilon(1_{(2)}S(x)) \\
 &= \epsilon(1_{(1')}1_{(1)})\epsilon(1_{(2)}S(x))1_{(2')} \\
 &= \epsilon(1_{(1')}S(x))1_{(2')} \\
 &= \epsilon_t(S(x)) \\
 &= S(1_{(1)})\epsilon(1_{(2)}S(x)) \\
 &= S(1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}S(x))) \\
 &= S(\epsilon_s(x)).
 \end{aligned}$$
■

Teorema 1.16. *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então a antípoda S é um antimorfismo de biálgebras, isto é,*

- i) $S(xy) = S(y)S(x)$, para $x, y \in H$;
- ii) $S(x)_{(1)} \otimes S(x)_{(2)} = S(x_{(2)}) \otimes S(x_{(1)})$;
- iii) $S(1_H) = 1_H$;
- iv) $\epsilon S = \epsilon$.

Demonstração: Vamos mostrar que S é antimultiplicativa. Sejam $x, y \in H$, então

$$\begin{aligned}
S(xy) &= S((xy)_{(1)})(xy)_{(2)}S((xy)_{(3)}) \\
&= S((xy)_{(1)})\epsilon_t((xy)_{(2)}) \\
&= S(x_{(1)}y_{(1)})\epsilon_t(x_{(2)}y_{(2)}) \\
&= S(x_{(1)}y_{(1)})\epsilon_t(x_{(2)}\epsilon(y_{(2)})) \\
&= S(x_{(1)}y_{(1)})\epsilon_t(\epsilon(x_{(2)}y_{(2)})x_{(3)}) \\
&= S(x_{(1)}y_{(1)})\epsilon(x_{(2)}y_{(2)})\epsilon_t(x_{(3)}) \\
&= S(x_{(1)}y_{(1)})\epsilon(x_{(2)}y_{(2)})x_{(3)}S(x_{(4)}) \\
&= S(x_{(1)}y_{(1)})x_{(2)}\epsilon_t(y_{(2)})S(x_{(3)}) \\
&= S(x_{(1)}y_{(1)})x_{(2)}y_{(2)}S(y_{(3)})S(x_{(3)}) \\
&= \epsilon_s(x_{(1)}y_{(1)})S(y_{(2)})S(x_{(2)}) \\
&= \epsilon_s(\epsilon_s(x_{(1)})y_{(1)})S(y_{(2)})S(x_{(2)}) \\
&= \epsilon_s(y_{(1)}\epsilon(x_{(1)}y_{(2)}))S(y_{(3)})S(x_{(2)}) \\
&= \epsilon_s(y_{(1)})\epsilon(x_{(1)}y_{(2)})S(y_{(3)})S(x_{(2)}) \\
&= \epsilon_s(y_{(1)})\epsilon(x_{(1)}y_{(2)})S(y_{(3)})S(x_{(2)}) \\
&= S(y_{(1)})y_{(2)}\epsilon(x_{(1)}y_{(2)})S(y_{(3)})S(x_{(2)}) \\
&= S(y_{(1)})\epsilon_s(x_{(1)})y_{(2)}S(y_{(3)})S(x_{(2)}) \\
&= S(y_{(1)})\epsilon_s(x_{(1)})\epsilon_t(y_{(2)})S(x_{(2)}) \\
&= S(y_{(1)})\epsilon_t(y_{(2)})\epsilon_s(x_{(1)})S(x_{(2)}) \\
&= S(y_{(1)})y_{(2)}S(y_{(3)})S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(2)}) \\
&= S(y)S(x).
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que S é anticomultiplicativa. Seja $x \in H$, então

$$\begin{aligned}
\Delta(S(x)) &= \Delta(S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(3)})) \\
&= \Delta(S(x_{(1)})\epsilon_t(x_{(2)})) \\
&= \Delta(S(x_{(1)}))\Delta(\epsilon_t(x_{(2)})) \\
&= \Delta(S(x_{(1)}))(1_{(1)}\epsilon_t(x_{(2)}) \otimes 1_{(2)}) \\
&= S(x_{(1)})_{(1)}1_{(1)}\epsilon_t(x_{(2)}) \otimes S(x_{(1)})_{(2)}1_{(2)} \\
&= S(x_{(1)})_{(1)}1_{(1)}x_{(2)}S(x_{(3)}) \otimes S(x_{(1)})_{(2)}1_{(2)} \\
&= S(x_{(1)})_{(1)}x_{(2)(1)}S(x_{(3)}) \otimes S(x_{(1)})_{(2)}\epsilon_t(x_{(2)}) \\
&= S(x_{(1)})_{(1)}x_{(3)}S(x_{(4)}) \otimes S(x_{(1)})_{(2)}\epsilon_t(x_{(2)}) \\
&= S(x_{(1)})_{(1)}x_{(3)}S(x_{(5)}) \otimes S(x_{(1)})_{(2)}x_{(2)}S(x_{(3)}) \\
&= (S(x_{(1)})x_{(2)})_{(1)}S(x_{(4)}) \otimes (S(x_{(1)})x_{(2)})_{(2)}S(x_{(3)}) \\
&= \epsilon_s(x_{(1)})_{(1)}S(x_{(3)}) \otimes \epsilon_s(x_{(1)})_{(2)}S(x_{(2)}) \\
&= 1_{(1)}S(x_{(3)}) \otimes \epsilon_s(x_{(1)})1_{(2)}S(x_{(2)}) \\
&= 1_{(1)}S(x_{(3)}) \otimes 1_{(2)}\epsilon_s(x_{(1)})S(x_{(2)}) \\
&= 1_{(1)}S(x_{(4)}) \otimes 1_{(2)}S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(3)}) \\
&= 1_{(1)}S(x_{(2)}) \otimes 1_{(2)}S(x_{(1)}) \\
&= \epsilon_s(1_{(1)})S(x_{(2)}) \otimes 1_{(2)}S(x_{(1)}) \\
&= \epsilon(1_{(1)}1_{(1')})S(1_{(2')})S(x_{(2)}) \otimes 1_{(2)}S(x_{(1)}) \\
&= S(1_{(2')})S(x_{(2)}) \otimes \epsilon(1_{(1)}1_{(1')})1_{(2)}S(x_{(1)}) \\
&= S(1_{(2')})S(x_{(2)}) \otimes \epsilon_t(1_{(1')})S(x_{(1)}) \\
&= S(1_{(2')})S(x_{(2)}) \otimes \epsilon_t(\epsilon_s(1_{(1')}))S(x_{(1)}) \\
&= S(1_{(2')})S(x_{(2)}) \otimes S(\epsilon_s(1_{(1')}))S(x_{(1)}) \\
&= S(1_{(2')})S(x_{(2)}) \otimes S(1_{(1')})S(x_{(1)}) \\
&= S(x_{(2)}1_{(2')}) \otimes S(x_{(1)}1_{(1')}) \\
&= S(x_{(2)}) \otimes S(x_{(1)}).
\end{aligned}$$

Portanto, temos $\Delta(S(x)) = S(x_{(1)}) \otimes S(x_{(2)})$. Finalmente, mostramos que a unidade e a counidade são preservadas. Temos

$$\begin{aligned} S(1_H) &= S(\epsilon_t(1_H)) \\ &= \epsilon_s(\epsilon_t(1_H)) \\ &= \epsilon_s(1_H) \\ &= 1_H \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon(S(x)) &= \epsilon(S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(3)})) \\ &= \epsilon(S(x_{(1)})\epsilon_t(x_{(2)})) \\ &= \epsilon(S(x_{(1)})x_{(2)}) \\ &= \epsilon(\epsilon_s(x)) \\ &= \epsilon(x). \end{aligned}$$

Portanto, S preserva a unidade e counidade. ■

A fim de mostrarmos que a antípoda é transformaçã linear invertível, observamos que $S(H)$ é uma álgebra de Hopf fraca com os mesmos morfismos de estrutura de H restritos a $S(H)$.

Corolário 1.17. *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então, $S(H)$ é álgebra de Hopf fraca.*

Demonstração: Pelo teorema anterior, S é um anti-homomorfismo de álgebras, logo $S(H)$ é álgebra. Também, S é anti-homomorfismo de coálgebras, logo $S(H)$ é coálgebra. Claramente, Δ é multiplicativa e ainda vale a multiplicatividade fraca da unidade. Sejam $x, y, z \in H$, então

$$\begin{aligned} \epsilon(S(x)S(y)S(z)) &= \epsilon(S(zyx)) \\ &= \epsilon(zyx) \\ &= \epsilon(zy_{(1)})\epsilon(y_{(2)}z) \\ &= \epsilon(S(zy_{(1)}))\epsilon(S(y_{(2)}x)) \\ &= \epsilon(S(x)S(y_{(2)}))\epsilon(S(y_{(1)})S(z)) \\ &= \epsilon(S(x)S(y)_{(1)})\epsilon(S(y)_{(2)}S(z)). \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se

$$\epsilon(S(x)S(y)S(z)) = \epsilon(S(x)S(y)_{(1)})\epsilon(S(y)_{(2)}S(z)).$$

Finalmente, para verificarmos que $S(H)$ é uma álgebra de Hopf fraca com a mesma antípoda, temos

$$\begin{aligned} S(x)_{(1)}S(S(x)_{(2)}) &= S(x_{(2)})S(S(x_{(1)})) \\ &= S(S(x_{(1)})x_{(2)}) \\ &= S(\epsilon_s(x)) \\ &= \epsilon_t(S(x)). \end{aligned}$$

Analogamente, $S(S(x)_{(1)})S(x_{(2)}) = \epsilon_s(S(x))$. Finalmente,

$$\begin{aligned} S(S(x)_{(1)})S(x)_{(2)}S(S(x)_{(3)}) &= S(S(x_{(3)}))S(x_{(2)})S(S(x_{(1)})) \\ &= S(S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(3)})) \\ &= S(S(x)). \end{aligned}$$

Portanto, $S(H)$ é álgebra de Hopf fraca. ■

Por indução, podemos concluir que $S^n(H)$ é álgebra de Hopf fraca, para todo n natural.

Teorema 1.18. *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então a antípoda é invertível.*

Demonstração: Consideremos a cadeia descendente de subálgebras de H ,

$$H \supseteq S(H) \supseteq S^2(H) \supseteq S^3(H) \supseteq \dots$$

Agora, H é álgebra artinianiana, pois tem dimensão finita, logo existe n natural tal que

$$S^{n+m}(H) = S^n(H) \subseteq S^{n-1}(H), \text{ para todo } m \text{ natural. } (\star)$$

Vamos provar que $\star$ implica $S^n(H) = S^{n-1}(H)$ e então vamos concluir que $S(H) = H$, mostrando que S é invertível, pois H tem dimensão finita. Suponha $n = 1$. Por hipótese, temos

$$S^{1+m}(H) = S(H) \subseteq H, \text{ para todo } m \text{ natural}$$

e, em particular, para $m = 1$ segue que $S^2(H) = S(H)$. Logo $Im(S^2) = Im(S)$, e portanto $dim(Ker(S)) = dim(Ker(S^2))$. Como $Ker(S) \subseteq Ker(S^2)$, segue que $Ker(S(H)) = Ker(S^2(H))$. Assim, se $x \in Ker(S) \cap Im(S)$, então $S(x) = 0$ e $x = S(y)$, para algum $y \in H$, e isso implica $S^2(y) = S(x) = 0$, isto é, $Ker(S^2) = Ker(S)$, donde $x = 0$. Logo, $Ker(S) \cap Im(S) = 0$. Portanto, podemos definir $\bar{S} = S|_{S(H)} : S(H) \rightarrow S(H)$ e $\bar{S}$ é bijetora, pois $Ker(\bar{S}) = Ker(S) \cap Im(S) = 0$ e é claramente sobrejetora. Note que $\bar{S}$ é anti-homomorfismo de álgebras e portanto $\bar{S}^{-1}$ também o é. Consideremos $P_S = \bar{S}^{-1}S : H \rightarrow S(H)$. Notemos que $P_S(1_H) = 1_H$ e, para quaisquer $x, y \in H$, temos

$$\begin{aligned} P_S(xy) &= \bar{S}^{-1}(S(xy)) \\ &= \bar{S}^{-1}(S(y)S(x)) \\ &= \bar{S}^{-1}(S(x))\bar{S}^{-1}(S(y)) \\ &= P_S(x)P_S(y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_S(P_S(x)) &= P_S(\bar{S}^{-1}(S(x))) \\ &= \bar{S}^{-1}(S(\bar{S}^{-1}(S(x)))) \\ &= \bar{S}^{-1}(\bar{S}(\bar{S}^{-1}(S(x)))) \\ &= \bar{S}^{-1}(S(x)) \\ &= P_S(x) \end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} P_S(xS(y)) &= \bar{S}^{-1}(S(xS(y))) \\ &= \bar{S}^{-1}(S^2(y)S(x)) \\ &= \bar{S}^{-1}(S(x))\bar{S}^{-1}(S^2(y)) \\ &= P_S(x)S(y). \end{aligned}$$

Usando o fato de que $S(H_t) = H_s$ e $S(H_s) = H_t$, isto é, $H_t, H_s \subseteq S(H)$, as propriedades de P_S que acabamos de mostrar e $x_{(1)}\epsilon_s(x_{(2)}) = x = \epsilon_t(x_{(1)})x_{(2)}$, para todo $x \in H$, segue que

$$\begin{aligned} P_S(x) &= P_S(x_{(1)}\epsilon_s(x_{(2)})) \\ &= P_S(x_{(1)})\epsilon_s(x_{(2)}) \\ &= P_S(x_{(1)})S(x_{(2)})x_{(3)} \\ &= P_S(x_{(1)}S(x_{(2)}))x_{(3)} \\ &= P_S(\epsilon_t(x_{(1)}))x_{(2)} \\ &= \epsilon_t(x_{(1)})x_{(2)}. \end{aligned}$$

Portanto, $Ker(P_S) = 0$. Claramente, $Ker(S) \subseteq Ker(P_S)$, o que implica $Ker(S) = 0$. Segue que $S(H) = H$, pois H tem dimensão finita. $\blacksquare$

Lema 1.19. *Seja H uma álgebra de Hopf fraca, então são válidas as seguintes igualdades, para todo $h \in H$,*

- i) $h_{(1)} \otimes h_{(2)}S(h_{(3)}) = 1_{(1)}h \otimes 1_{(2)}$.
- ii) $S(h_{(1)})h_{(2)} \otimes h_{(3)} = 1_{(1)} \otimes h1_{(2)}$.
- iii) $h_{(1)} \otimes S(h_{(2)})h_{(3)} = h1_{(1)} \otimes S(1_{(2)})$.
- iv) $h_{(1)}S(h_{(2)}) \otimes h_{(3)} = S(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}h$.
- v) $1_{(1)} \otimes 1_{(2)} = S(1_{(2)}) \otimes S(1_{(1)})$.
- vi) $h_{(2)}S^{-1}(h_{(1)}) \otimes h_{(3)} = S^{-1}(\epsilon_t(h_{(1)})) \otimes h_{(2)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}h$.

Demonstração: i) Temos $h_{(1)} \otimes h_{(2)}S(h_{(3)}) = h_{(1)} \otimes \epsilon_t(h_{(2)}) = 1_{(1)}h \otimes 1_{(2)}$ e ii) é análogo.

iii) Notemos que

$$\begin{aligned}
 h_{(1)} \otimes S(h_{(2)})h_{(3)} &= h_{(1)} \otimes \epsilon_s(h_{(2)}) \\
 &= h_{(1)} \otimes \epsilon(h_{(2)}1_{(1')})S(1_{(2')}) \\
 &= h_{(1)}1_{(1)} \otimes \epsilon(h_{(2)}1_{(2)}1_{(1')})S(1_{(2')}) \\
 &= h_{(1)}1_{(1)}\epsilon(h_{(2)}1_{(2)}) \otimes S(1_{(3)}) \\
 &= (h1_{(1)})_{(1)}\epsilon((h1_{(1)})_{(2)}) \otimes S(1_{(2)}) \\
 &= h1_{(1)} \otimes S(1_{(2)})
 \end{aligned}$$

e isso verifica iii). De maneira semelhante, pode-se provar iv).

v) Sabemos que $S(1_H) = 1_H$ e daí

$$\begin{aligned}
 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} &= \Delta(1_H) \\
 &= \Delta(S(1_H)) \\
 &= S(1_H)_{(1)} \otimes S(1_H)_{(2)} \\
 &= S(1_{(2)}) \otimes S(1_{(2)}).
 \end{aligned}$$

vi) Mostramos em iii) que $h_{(1)}S(h_{(2)}) \otimes h_{(3)} = S(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}h$. Aplicando $S^{-1} \otimes I$ em ambos os lados dessa igualdade, obtemos

$$h_{(2)}S^{-1}(h_{(1)}) \otimes h_{(3)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}h$$

e, além disso, $h_{(1)}S(h_{(2)}) \otimes h_{(3)} = \epsilon_t(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}$. Novamente, aplicando $S^{-1} \otimes I$, temos

$$h_{(2)}S^{-1}(h_{(1)}) \otimes h_{(3)} = S^{-1}(\epsilon_t(h_{(1)})) \otimes h_{(2)}.$$

Isso mostra vi). ■

Lema 1.20. *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então, para $z \in H_t$ e $y \in H_s$, temos*

- i) $1_{(1)}S^{-1}(z) \otimes 1_{(2)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}z$;
- ii) $1_{(1)} \otimes S^{-1}(y)1_{(2)} = y1_{(1)} \otimes 1_{(2)}$.

Demonstração: Se $z \in H_t$, então $S^{-1}(z) \in H_s$ e

$$\begin{aligned}
 1_{(1)}S^{-1}(z) \otimes 1_{(2)} &= S^{-1}(z)_{(1)} \otimes \epsilon_t(S^{-1}(z)_{(2)}) \\
 &= 1_{(1)} \otimes \epsilon_t(S^{-1}(z)1_{(2)}) \\
 &= 1_{(1)} \otimes \epsilon_t(1_{(1)}S^{-1}(z)) \\
 &= 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}\epsilon_t(S^{-1}(z)) \\
 &= 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}\epsilon_t(\epsilon_s(S^{-1}(z))) \\
 &= 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}\epsilon_t(S(S^{-1}(z))) \\
 &= 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}z.
 \end{aligned}$$

Agora, se $y \in H_s$, então $S^{-1}(y) \in H_t$ e

$$\begin{aligned}
 1_{(1)} \otimes S^{-1}(y)1_{(2)} &= \epsilon_s(S^{-1}(y)_{(1)}) \otimes S^{-1}(y)_{(2)} \\
 &= \epsilon_s(1_{(1)}S^{-1}(y)) \otimes 1_{(2)} \\
 &= \epsilon_s(S^{-1}(y)1_{(1)}) \otimes 1_{(2)} \\
 &= \epsilon_s(S^{-1}(y))1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \\
 &= \epsilon_s(\epsilon_t(S^{-1}(y)))1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \\
 &= \epsilon_s(S(S^{-1}(y)))1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \\
 &= y1_{(1)} \otimes 1_{(2)}.
 \end{aligned}$$

Fica provado o resultado. ■

Antes de enunciarmos a próxima proposição, lembramos uma das definições equivalentes para que uma álgebra seja separável.

Definição 1.21. *Uma álgebra A é separável se existe um elemento $e = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \in A \otimes A$ tal que $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 1_A$ e $\sum_{i=1}^n x a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i x$, para todo $x \in A$. O elemento e é chamado idempotente de separabilidade.*

Proposição 1.22. *Seja H uma álgebra de Hopf fraca. Então as subálgebras canônicas H_t e H_s são separáveis.*

Demonstração: Considere $e^t = S(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}$. Então, e^t é claramente idempotente. Aplicando $S \otimes id$ à igualdade $1_{(1)}S^{-1} \otimes 1_{(2)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}z$, obtemos, para $z \in H_t$,

$$zS(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)} = S(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}z.$$

Portanto, H_t é uma álgebra separável com idempotente de separabilidade $e^t = S(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}$. ■

A proposição seguinte apresenta caracterizações de quando uma álgebra de Hopf fraca é uma álgebra de Hopf no sentido clássico.

Proposição 1.23. *Seja H uma álgebra de Hopf fraca, são equivalentes*

- i) H é uma álgebra de Hopf no sentido clássico;
- ii) $\Delta(H) = 1_H \otimes 1_H$;
- iii) $\epsilon(xy) = \epsilon(x)\epsilon(y)$;
- iv) $S(x_{(1)})x_{(2)} = \epsilon(x)1_H$, para todo $x \in H$;
- v) $x_{(1)}S(x_{(2)}) = \epsilon(x)1_H$, para todo $x \in H$;
- vi) $H_t = k1_H = H_s$.

Demonstração: i) $\Rightarrow$ ii) Imediato pela definição de álgebra de Hopf clássica. ii) $\Rightarrow$ iii) Temos $\epsilon(xy) = \epsilon(x1_Hy) = \epsilon(x1_{(1)})\epsilon(1_{(2)}y) = \epsilon(x)\epsilon(y)$. iii) $\Rightarrow$ ii) Notemos que

$$\begin{aligned} 1_H \otimes 1_H &= 1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}) \otimes 1_{(1')}\epsilon(1_{(2')}) \\ &= 1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}1_{(1')}) \otimes 1_{(2')} \\ &= 1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}) \otimes 1_{(3)} \\ &= 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \\ &= \Delta(1_H). \end{aligned}$$

iii) $\Rightarrow$ iv) Temos

$$\begin{aligned} S(x_{(1)})x_{(2)} &= \epsilon_s(x) \\ &= \epsilon(x1_{(1)})1_{(2)} \\ &= \epsilon(x)\epsilon(1_{(2)})1_{(1)} \\ &= \epsilon(x)1_H. \end{aligned}$$

iv) $\Rightarrow$ iii) Notemos que, para $x, y \in H$, temos

$$\begin{aligned} \epsilon(xy)1_H &= S((xy)_{(1)})(xy)_{(2)} \\ &= S(y_{(1)})S(x_{(1)})x_{(2)}y_{(2)} \\ &= S(y_{(1)})\epsilon(x)y_{(2)} \\ &= \epsilon(x)\epsilon(y)1_H, \end{aligned}$$

isso implica iii). iii) $\Rightarrow$ v) É análoga à equivalência iii) $\Rightarrow$ v). iii) $\Rightarrow$ vi) Seja $x \in H_t$, então

$$\begin{aligned} x &= \epsilon_t(x) \\ &= \epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)} \\ &= \epsilon(x)\epsilon(1_{(1)})1_{(2)} \\ &= \epsilon(x)1_H. \end{aligned}$$

Logo, $x = \epsilon(x)1_H \in k1_H$. Analogamente, se $x \in H_s$, então $x = \epsilon(x)1_H \in k1_H$. Como $1_H \in H_t \cap H_s$, segue que $H_t = k1_H = H_s$. vi) $\Rightarrow$ iii) Sabendo que $\Delta(1_H) \in H_s \otimes H_t$, temos $\Delta(1_H) = \alpha 1_H \otimes 1_H$.

Também, temos $\epsilon_t(x) \in k1_H$, logo vamos escrever $\epsilon_t(x) = \alpha_x 1_H$, em que $\alpha_x \in k$. Seja $x \in H$, então

$$\begin{aligned}
\epsilon(x)1_H &= \epsilon(S(x))1_H \\
&= \epsilon(S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(3)}))1_H \\
&= \epsilon(S(x_{(1)})\epsilon_t(x_{(2)}))1_H \\
&= \epsilon(S(x_{(1)})\alpha_{x_{(2)}})1_H \\
&= \epsilon(S(x_{(1)}))\alpha_{x_{(2)}}1_H \\
&= \epsilon(S(x_{(1)})\epsilon_t(x_{(2)})) \\
&= \epsilon(x_{(1)})\epsilon_t(x_{(2)}) \\
&= \epsilon(x) \\
&= \epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)} \\
&= \alpha\epsilon(x)1_H.
\end{aligned}$$

Isso implica $\epsilon(x) = \alpha\epsilon(x)$, para todo $x \in H$. Como ϵ não é o morfismo nulo, existe $x \in H$ com $\epsilon(x) \neq 0$, e então concluímos que $\alpha = 1_k$. Portanto, $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$, e então $\epsilon(xy) = \epsilon(x1_H y) = \epsilon(x1_H)\epsilon(1_H y) = \epsilon(x)\epsilon(y)$. ■

2. MÓDULOS DE HOPF NO CONTEXTO FRACO

Apresentamos agora a noção de módulos de Hopf fracos e um teorema fundamental dos módulos de Hopf fracos, generalização do caso clássico.

Definição 2.1. *Seja H uma álgebra de Hopf fraca, um H -módulo de Hopf à direita M é um k -espaço vetorial tal que*

- i) *M é um H -módulo à direita via $m \otimes x \mapsto m \cdot x$; item [ii)] M é um H -comódulo à direita via $m \mapsto \rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$;*
- iii) *$\rho(m \cdot x) = m_{(0)} \cdot x_{(1)} \otimes m_{(1)}x_{(2)}$, para quaisquer $m \in M$ e $x \in H$.*

No caso em que H é uma álgebra de Hopf no sentido clássico e M é uma H -módulo de Hopf à direita, é conhecido que $M \otimes H$ é um H -módulo de Hopf à direita com a ação $(m \otimes x) \cdot y = m \cdot y_{(1)} \otimes xy_{(2)}$, para $m \in M$ e $x, y \in H$. Nesse caso, a condição iii) implica ρ ser morfismo de H -módulos à direita. No caso fraco, H é uma álgebra de Hopf fraca e M é um H -módulo de Hopf à direita, e assim $M \otimes H$ pode não ser um H -módulo de Hopf à direita com a ação descrita. Isso porque

$$(m \otimes x) \cdot 1_H = m \cdot 1_{(1)} \otimes x1_{(2)}$$

e não necessariamente isso será igual a $m \otimes x$. Todavia, nesse contexto, conseguimos transpor tal estrutura de H -módulo de Hopf fraco para o espaço $(M \otimes H)\Delta(1_H)$, assim para quaisquer $m \in M$ e $x, y \in H$, temos

$$\begin{aligned}
((m \otimes x)\Delta(1_H)) \cdot y &= (m \cdot 1_{(1)} \otimes x1_{(2)}) \cdot y \\
&= (m \cdot 1_{(1)}) \cdot y_{(1)} \otimes x1_{(2)}y_{(2)} \\
&= m \cdot 1_{(1)}y_{(1)} \otimes x1_{(2)}y_{(2)} \\
&= m \cdot y_{(1)} \otimes xy_{(2)}.
\end{aligned}$$

Claramente, $(M \otimes H)\Delta(1_H)$ é um H -módulo à direita. Fazendo $h = 1_H$ na igualdade acima, temos $(m \cdot 1_{(1)} \otimes x1_{(2)}) \cdot 1_H = m \cdot 1_{(1)} \otimes x1_{(2)}$ e

$$\begin{aligned}
(m \cdot 1_{(1)} \otimes x1_{(2)}) \cdot yz &= m \cdot (y_{(1)}z_{(1)}) \otimes x(y_{(2)}z_{(2)}) \\
&= (m \cdot (y_{(1)}) \cdot z_{(1)}) \otimes (xy_{(2)})z_{(2)} \\
&= ((m \cdot (y_{(1)}) \cdot 1_{(1)}) \otimes (xy_{(2)})1_{(2)}) \cdot z \\
&= (m \cdot (y_{(1)}1_{(1)}) \otimes x(y_{(2)}1_{(2)})) \cdot z \\
&= (m \cdot y_{(1)} \otimes xy_{(2)}) \cdot z \\
&= ((m \cdot 1_{(1)} \otimes x1_{(2)}) \cdot y) \cdot z
\end{aligned}$$

Notemos que $\rho : M \mapsto (M \otimes H)\Delta(1_H)$, dada por $\rho(m) = m_{(0)} \cdot 1_{(1)} \otimes m_{(1)}1_{(2)}$ é um homomorfismo de H -módulos à direita. De fato, para quaisquer $m \in M$ e $x \in H$, temos

$$\begin{aligned}\rho(m) \cdot x &= \rho(m \cdot 1_H) \cdot x \\ &= (m_{(0)} \cdot 1_{(1)} \otimes m_{(1)}1_{(2)}) \cdot x \\ &= m_{(0)} \cdot x_{(1)} \otimes m_{(1)}x_{(2)} \\ &= \rho(m \cdot x).\end{aligned}$$

Definição 2.2. *Sejam H uma álgebra de Hopf frac e M um H -comódulo à direita com morfismo estrutura ρ . Definimos os coinvariantes de M por*

$$M^{coH} = \{m \in M : \rho(m) = m_{(0)} \otimes \epsilon_t(m_{(1)})\}$$

Proposição 2.3. *Seja M um H -módulo de Hopf à direita. Então são verdadeiras as seguintes afirmações.*

- i) $M^{coH} = \{m \in M : \rho(m) = m \cdot 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}\};$
- ii) M^{coH} é um H_t -submódulo à direita de M .

Demonstração: i) Notemos que por M ser um H -módulo de Hopf à direita, então para qualquer $m \in M$, temos

$$m_{(0)} \otimes m_{(1)} = \rho(m) = \rho(m \cdot 1_H) = m_{(0)} \cdot 1_{(1)} \otimes m_{(1)}1_{(2)}.$$

Seja $m \in M^{coH}$, então $m_{(0)} \otimes m_{(1)} \in M \otimes H_t$ e assim

$$\begin{aligned}m_{(0)} \otimes m_{(1)} &= m_{(0)} \otimes \epsilon_t(m_{(1)}) \\ &= m_{(0)} \otimes \epsilon(1_{(1)}m_{(1)})1_{(2)} \\ &= m_{(0)} \otimes \epsilon(m_{(1)}1_{(1)})1_{(2)} \\ &= m_{(0)} \cdot 1_{(1')} \otimes \epsilon(m_{(1)}1_{(2')}1_{(1)})1_{(2)} \\ &= m_{(0)} \cdot 1_{(1')} \otimes \epsilon(m_{(1)}1_{(1)}1_{(2')})1_{(2)} \\ &= m_{(0)} \cdot 1_{(1)} \otimes \epsilon(m_{(1)}1_{(2)})1_{(3)} \\ &= m_{(0)} \cdot 1_{(1)} \otimes \epsilon(m_{(1)}1_{(2)})1_{(3)} \\ &= m_{(0)} \cdot 1_{(1)(1)} \epsilon(m_{(1)}1_{(1)(2)}) \otimes 1_{(2)} \\ &= (m \cdot 1_{(1)})_{(0)} \epsilon((m1_{(1)})_{(1)}) \otimes 1_{(2)} \\ &= m \cdot 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}\end{aligned}$$

Seja $m \in \{n \in M : \rho(n) = n \cdot 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}\}$. Então, $\rho(m) = m \cdot 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \in M \otimes H_t$, portanto $\rho(m) = m_{(0)} \otimes \epsilon_t(m_{(1)})$.

ii) Pelo fato de ρ ser k -linear, segue que M^{coH} é um k -subespaço vetorial de M . Para mostrarmos que M^{coH} é H_t -submódulo de M , basta mostrarmos que $m \cdot x \in M^{coH}$, para quaisquer $m \in M^{coH}$ e $x \in H_t$. Sejam $x \in H_t$ e $m \in M^{coH}$, então

$$\begin{aligned}\rho(m \cdot x) &= (m \cdot x)_{(0)} \otimes (m \cdot x)_{(1)} \\ &= m_{(0)} \cdot x_{(1)} \otimes m_{(1)}x_{(2)} \\ &= (m_{(0)} \cdot 1_{(1)}) \cdot x_{(1)} \otimes m_{(1)}1_{(2)}x_{(2)} \\ &= m_{(0)} \cdot x_{(1)} \otimes x_{(2)} \\ &= m_{(0)} \cdot (x_{(1)}1_{(1)}) \otimes 1_{(2)} \\ &= (m_{(0)} \cdot x_{(1)}) \cdot 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}\end{aligned}$$

isso implica $m \cdot x \in M^{coH}$. ■

Sendo M^{coH} um H_t -módulo à direita e H um H_t -módulo à esquerda, via a multiplicação, podemos considerar $M^{coH} \otimes_{H_t} H$. Não é difícil ver que a seguinte ação fornece a $M^{coH} \otimes_{H_t} H$ uma estrutura de H -módulo à direita:

$$(m \otimes x) \cdot y = xy, \text{ para } m \in M^{coH}, x, y \in H.$$

Além disso, $M^{coH} \otimes_{H_t} H$ é um H -comódulo à direita com a estrutura

$$\rho(m \otimes x) = (I \otimes \Delta)(m \otimes x) = m \otimes x_{(1)} \otimes x_{(2)}.$$

Proposição 2.4. *Com a ação e coação acima, $M^{coH} \otimes_{H_t} H$ é um H -módulo de Hopf à direita.*

Demonstração: Sejam $m \in M^{coH}$, $x, y \in H$, então

$$\begin{aligned}
 \rho((m \otimes x) \cdot y) &= \rho(m \otimes xy) \\
 &= m \otimes (xy)_{(1)} \otimes (xy)_{(2)} \\
 &= m \otimes x_{(1)}y_{(1)} \otimes x_{(2)}y_{(2)} \\
 &= (m \otimes x_{(1)}) \cdot y_{(1)} \otimes x_{(2)}y_{(2)} \\
 &= (m \otimes x)_{(0)} \cdot y_{(1)} \otimes (m \otimes x)_{(1)}y_{(2)}
 \end{aligned}$$

Logo, $M^{coH} \otimes_{H_t} H$ é um H -módulo de Hopf à direita. ■

Essa estrutura de H -módulo de Hopf é chamada trivial. No caso clássico, é sabido que todo H -módulo de Hopf é isomorfo a H -módulo de Hopf trivial. Mostramos agora que o mesmo vale no caso fraco.

Teorema 2.5. Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf no contexto fraco.

Seja M um H -módulo de Hopf à direita. Com as notações apresentadas acima, a aplicação

$$\begin{aligned}
 \alpha : M^{coH} \otimes_{H_t} H &\rightarrow M \\
 m \otimes x &\mapsto m \cdot x
 \end{aligned}$$

é um isomorfismo de H -módulos de Hopf à direita.

Demonstração: Começamos observando que a propriedade universal do produto tensorial nos garante que α está bem definida assim como é um homomorfismo de grupos abelianos. É imediato verificar que α é um homomorfismo de H -módulos de Hopf à direita. Assim, para verificarmos que α é um homomorfismo de H -módulos de Hopf à direita, resta mostrarmos que α é homomorfismo de H -comódulos. Sejam $m \in M^{coH}$ e $x \in H$, então

$$\begin{aligned}
 \rho(\alpha(m \otimes x)) &= \rho(m \cdot x) \\
 &= n_{(0)} \cdot x_{(1)} \otimes n_{(1)}x_{(2)} \\
 &= (n \cdot 1_{(1)}) \cdot h_{(1)} \otimes 1_{(1)}x_{(2)} \\
 &= n \cdot (1_{(1)}x_{(1)}) \otimes 1_{(1)}x_{(2)} \\
 &= n \cdot x_{(1)} \otimes x_{(2)} \\
 &= \alpha(n \otimes x_{(1)}) \otimes x_{(2)} \\
 &= (\alpha \otimes I)(n \otimes x_{(1)} \otimes x_{(2)})
 \end{aligned}$$

Vamos mostrar que

$$\begin{aligned}
 \beta : M &\rightarrow M^{coH} \otimes H \\
 m &\mapsto (m_{(0)} \cdot S(m_{(1)})) \otimes m_{(2)}
 \end{aligned}$$

é a inversa de α . Para isso, primeiramente mostremos que β está bem definida, isto é, $m_{(0)} \cdot S(m_{(1)})$, para todo $m \in M$. De fato, seja $m \in M$, então

$$\begin{aligned}
 \rho(m_{(0)} \cdot S(m_{(1)})) &= m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(1)})_{(1)} \otimes m_{(0)(1)}S(m_{(1)})_{(2)} \\
 &= m_{(0)} \cdot S(m_{(3)}) \otimes m_{(1)}S(m_{(2)}) \\
 &= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)(3)}) \otimes m_{(1)(1)}S(m_{(1)(2)}) \\
 &= m_{(0)} \cdot S(1_{(2)}m_{(1)}) \otimes S(1_{(1)}) \\
 &= (m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \cdot S(1_{(2)})) \otimes S(1_{(1)}) \\
 &= (m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \cdot 1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}
 \end{aligned}$$

Logo, $m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \in M^{coH}$, para todo $m \in M$. Mostremos que β é homomorfismo de H -módulos de Hopf. Sejam $m \in M$ e $x \in H$. Então

$$\begin{aligned}
 \beta(m \cdot x) &= (m \cdot x)_{(0)} \cdot S((m \cdot x)_{(1)}) \otimes (m \cdot x)_{(2)} \\
 &= (m_{(0)} \cdot x_{(1)}) \cdot S(m_{(1)} \cdot x_{(2)}) \otimes m_{(2)}x_{(3)} \\
 &= m_{(0)} \cdot (x_{(1)}S(x_{(2)})S(m_{(1)})) \otimes m_{(2)}x_{(3)} \\
 &= m_{(0)} \cdot (S(1_{(1)})S(m_{(1)})) \otimes m_{(2)}1_{(2)}x \\
 &= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)(1)}1_{(1)}) \otimes m_{(1)(2)}1_{(2)}x \\
 &= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)(1)}) \otimes m_{(1)(2)}x \\
 &= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)}x \\
 &= (m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)}) \cdot x \\
 &= \beta(m) \cdot x.
 \end{aligned}$$

Assim, β é morfismo de H -módulos à direita. Agora, mostremos que β é morfismo de H -comódulos à direita. Seja $m \in M$, então

$$\begin{aligned} \rho(\beta(m)) &= \rho(m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)}) \\ &= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)(1)} \otimes m_{(2)(2)} \\ &= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)} \otimes m_{(3)} \\ &= m_{(0)(0)} \cdot S(m_{(0)(1)}) \otimes m_{(0)(2)} \otimes m_{(1)} \\ &= \beta(m_{(0)}) \otimes m_{(1)} \\ &= (\beta \otimes I) \\ &= \rho(m). \end{aligned}$$

Portanto, β é homomorfismo de H -comódulos à direita. Finalmente, usando $\rho(m) = m_{(0)} \cdot 1_{(1)} \otimes m_{(1)} 1_{(2)}$, temos

$$\begin{aligned} \alpha(\beta(m)) &= \alpha(m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)}) \\ &= (m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \cdot m_{(2)}) \\ &= m_{(0)} \cdot S(m_{(1)(1)}) m_{(1)(2)} \\ &= m_{(0)} \cdot \epsilon_s(m_{(1)}) \\ &= m_{(0)} \cdot 1_{(1)} \epsilon(m_{(1)} 1_{(2)}) \\ &= (m_{(0)} \cdot 1_{(1)}) \epsilon(m_{(1)} 1_{(2)}) \\ &= m_{(0)} \epsilon_{(1)} \\ &= m \end{aligned}$$

isso mostra que $\alpha\beta = I_M$.

Sejam $m \in M$ e $x \in H$, temos

$$\begin{aligned} \beta(\alpha(m \otimes x)) &= \beta(m \cdot x) \\ &= \beta(m) \cdot x \\ &= (m_{(0)} \cdot S(m_{(1)}) \otimes m_{(2)}) \cdot x \\ &= (m \cdot 1_{(1)}) \cdot S(1_{(2)}) \otimes 1_{(3)} x \\ &= m \cdot (1_{(1)} S(1_{(2)})) \otimes 1_{(3)} x \\ &= m \cdot \epsilon_t(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)} x \\ &= m \otimes \epsilon_t(1_{(1)}) 1_{(2)} x \\ &= m \otimes x. \end{aligned}$$

Logo, $\beta\alpha = I_{M^{coH} \otimes_{H_t} H}$. Assim, α é isomorfismo de H -módulos de Hopf à direita. ■

3. INTEGRAIS EM ÁLGEBRAS DE HOPF FRACAS

Definição 3.1. *Seja H uma biálgebra fraca, um elemento integral à esquerda em H é um elemento $l \in H$ tal que*

$$hl = \epsilon_t(h)l, \text{ para todo } h \in H.$$

Analogamente, um elemento integral à direita em H é um elemento $l \in H$ tal que

$$lh = l\epsilon_s(h), \text{ para todo } h \in H.$$

Essa noção de elemento integral generaliza a noção de elemento integral no caso de álgebras de Hopf no sentido clássico. Isso é imediato, pois $hl = \epsilon_t(h)l = \epsilon(h)1_H l$, para todo $h \in H$, e analogamente para integral à direita. Denotamos por $\int_H^l$ e $\int_H^r$ os conjuntos de elementos integrais à esquerda e à direita, respectivamente. Como ϵ_t e ϵ_s são k -lineares, segue que $\int_H^l$ e $\int_H^r$ são k -subespaços de H . A próxima proposição fornece condições equivalentes para que $l \in H$ seja um elemento integral à esquerda em H .

Proposição 3.2. *Seja $l \in H$, são equivalentes*

- i) $l \in \int_H^l$;
- ii) $l_{(1)} \otimes hl_{(2)} = S(h)l_{(1)} \otimes l_{(2)}$;
- iii) $l \mapsto H^* \subseteq (H^*)_t$;
- iv) $\text{Ker}(\epsilon_t)l = 0$;
- v) $S(l) \in \int_H^r$.

Demonstração: i) $\Rightarrow$ ii) Para $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
 l_{(1)} \otimes hl_{(2)} &= 1_{(1)}l_{(1)} \otimes h1_{(2)}l_{(2)} \\
 &= S(h_{(1)})h_{(2)}l_{(1)} \otimes h_{(3)}l_{(2)} \\
 &= S(h_{(1)})(h_{(2)}l)_{(1)} \otimes (h_{(2)}l)_{(2)} \\
 &= S(h_{(1)})(\epsilon_t(h_{(2)})l)_{(1)} \otimes (\epsilon_t(h_{(2)})l)_{(2)} \\
 &= S(h_{(1)})\epsilon_t(h_{(2)})_{(1)}l_{(1)} \otimes \epsilon_t(h_{(2)})_{(2)}l_{(2)} \\
 &= S(h_{(1)})\epsilon_t(h_{(2)})1_{(1)}l_{(1)} \otimes 1_{(2)}l_{(2)} \\
 &= S(h_{(1)})\epsilon_t(h_{(2)})l_{(1)} \otimes l_{(2)} \\
 &= S(h_{(1)})h_{(2)}S(h_{(3)})l_{(1)} \otimes l_{(2)} \\
 &= S(h)l_{(1)} \otimes l_{(2)}.
 \end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ i) Por hipótese, $l_{(1)} \otimes hl_{(2)} = S(h)l_{(1)} \otimes l_{(2)}$, para todo $h \in H$ e isso implica $l_{(1)}\epsilon(hl_{(2)}) = S(h)l_{(1)}\epsilon(h_{(2)}) = S(h)l$, para todo $h \in H$. Portanto, para $h \in H$,

$$\begin{aligned}
 hl &= (hl)_{(1)}\epsilon((hl)_{(2)}) \\
 &= h_{(1)}(l_{(1)}\epsilon(h_{(2)}l_{(2)})) \\
 &= h_{(1)}S(h_{(2)})l_{(1)}\epsilon(l_{(2)}) \\
 &= h_{(1)}S(h_{(2)})l \\
 &= \epsilon_t(h)l.
 \end{aligned}$$

Logo, $l \in \int_H^l$.

i) $\Rightarrow$ iii) Seja $f \in H^*$, para $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
 E_t(l \rightharpoonup f)(h) &= E_t(f_{(1)}f_{(2)}(l))(h) \\
 &= E(\epsilon_{(1)} * f_{(1)})\epsilon_{(2)}(h)f_{(2)} \\
 &= \epsilon_{(1)}(1_{(1)})f_{(1)}(1_{(2)})\epsilon_{(2)}(h)f_{(2)}(l) \\
 &= f_{(1)}(\epsilon_{(1)}(1_{(1)})\epsilon_{(2)}(h)1_{(2)})f_{(2)}(l) \\
 &= f_{(1)}(\epsilon(1_{(1)}h)1_{(2)})f_{(2)}(l) \\
 &= f_{(1)}(\epsilon_t(h))f_{(2)}(l) \\
 &= f(\epsilon_t(h)l) \\
 &= f(hl) \\
 &= f_{(1)}(h)f_{(2)}(l) \\
 &= (l \rightharpoonup f)(h).
 \end{aligned}$$

Portanto, $l \rightharpoonup f \in H_t^*$.

iii) $\Rightarrow$ i) Por hipótese, para $g \in H^*$, $l \rightharpoonup g = E_t(l \rightharpoonup g)$. Por um lado, temos

$$(l \rightharpoonup g)(h) = g_{(1)}(h)g_{(2)}(l) = g(hl).$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
 E_t(l \rightharpoonup g)(h) &= (l \rightharpoonup g)(\epsilon_t(h)) \\
 &= g_{(1)}(\epsilon_t(h))g_{(2)}(l) \\
 &= g(\epsilon_t(h)l).
 \end{aligned}$$

Logo, $g(hl) = g(\epsilon_t(h)l)$, para todo $g \in H^*$. Portanto, $hl = \epsilon_t(h)l$, para todo $h \in H$, o que quer dizer que $l \in \int_H^l$.

i) $\Rightarrow$ iv) Seja $z \in \text{Ker}(\epsilon_t)$. Então, $\epsilon_t(z) = 0$ e, por hipótese, $zl = \epsilon_t(z)l$. Logo, $zl = 0$, e assim $\text{Ker}(\epsilon_t)l = 0$.

iv) $\Rightarrow$ i) Seja $h \in H$, notemos que $h - \epsilon_t(h) \in \text{Ker}(\epsilon_t)$, pois

$$\epsilon_t(h - \epsilon_t(h)) = \epsilon_t(h) - \epsilon_t(\epsilon_t(h)) = \epsilon_t(h) - \epsilon_t(h) = 0.$$

Assim, $(h - \epsilon_t(h))l = 0$, portanto $hl = \epsilon_t(h)l$, para todo $h \in H$. Logo, $l \in \int_H^l$.

i) $\Rightarrow$ v) Seja $h \in H$, como $l \in \int_H^l$, temos que $S^{-1}l = \epsilon_t(S^{-1}(h))l$ e, aplicando S em ambos os lados dessa igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} S(l)h &= S(l)S(\epsilon_t(S^{-1}(h))) \\ &= S(l)\epsilon_s(S(S^{-1}(h))) \\ &= S(l)\epsilon_s(h), \end{aligned}$$

portanto $S(l) \in \int_H^r$.

v) $\Rightarrow$ i) Por hipótese, para todo $h \in H$, $S(l)S(h) = S(l)\epsilon_s(S(h))$. Aplicando S^{-1} a essa igualdade, obtemos

$$hl = S^{-1}(\epsilon_s(S(h)))l = S^{-1}(S(\epsilon_t(h)))l = \epsilon_t(h)l.$$

Portanto, $l \in \int_H^l$. ■

Finalmente, mostramos um Teorema de Maschke no contexto fraco, que relaciona a existência de integrais à esquerda em uma álgebra de Hopf fraca H com a separabilidade e semissimplicidade de H . Antes, lembramos a definição de álgebra separável e álgebra semissimples.

Definição 3.3. Uma álgebra A é separável se existe um elemento $e = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \in A \otimes A$ tal que $\sum a_i b_i = 1$ e $\sum_{i=1}^n x a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i x$, para $x \in A$. O elemento e é chamado idempotente de separabilidade.

Definição 3.4. Uma álgebra A é semissimples se todo A -módulo à esquerda M é semissimples, ou seja, se todo A -submódulo de M é somando direto de M .

Teorema 3.5. Teorema de Maschke.

Seja H uma álgebra de Hopf fraca não nula, então são equivalentes

- i) H é semissimples;
- ii) existe uma integral à esquerda $l \in H$ tal que $\epsilon_t(l) = 1$;
- iii) H é separável.

Demonstração: i) $\Rightarrow$ ii) Note que $\text{Ker}(\epsilon_t)$ é ideal à esquerda de H , pois se $k \in \text{Ker}(\epsilon_t)$, para $h \in H$, temos

$$\epsilon(hk) = \epsilon(h\epsilon_t(k)) = 0,$$

assim $hk \in \text{Ker}(\epsilon_t)$. Como H é semissimples, existe idempotente $p \in H$ tal que $\text{Ker}(\epsilon_t) = Hp$. Assim, se $k \in \text{Ker}(\epsilon_t)$, temos $k = hp$, para algum $h \in H$, e então

$$k(1_H - p) = hp(1_H - p) = hp - hp^2 = 0.$$

Logo, $\text{Ker}(\epsilon_t)(1_H - p) = 0$, e por uma das caracterizações de integral à esquerda, temos $1_H - p \in \int_H^l$. Por fim, $\epsilon_t(1_H - p) = \epsilon_t(1_H) - \epsilon_t(p) = 1_H$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Considere o elemento $l_{(1)} \otimes S(l_{(2)}) \in H \otimes H$, vamos mostrar que é idempotente de separabilidade. Utilizando a caracterização de integral $l_{(1)} \otimes hl_{(2)} = S(h)l_{(1)} \otimes l_{(2)}$, para todo $h \in H$, temos

$$l_{(1)} \otimes S^{-1}(h)l_{(2)} = hl_{(1)} \otimes l_{(2)}.$$

Aplicando $I \otimes S$ em ambos lados da igualdade, obtemos

$$l_{(1)} \otimes S(l_{(2)})h = hl_{(1)} \otimes S(l_{(2)}).$$

Por fim, $l_{(1)}S(l_{(2)}) = \epsilon_t(l) = 1_H$. Portanto, $l_{(1)} \otimes S(l_{(2)})$ é idempotente de separabilidade e H é separável.

iii) $\Rightarrow$ i) Seja $\sum_i r_i \otimes l_i \in H \otimes H$ o idempotente de separabilidade de H . Sejam M um H -módulo à esquerda e N H -submódulo de M . Considere $\pi : M \rightarrow N$ uma projeção k -linear. Definimos

$$\begin{aligned} \hat{\pi} : M &\rightarrow N \\ m &\mapsto \sum_i r_i \cdot \pi(l_i \cdot m) \end{aligned}$$

Então, $\hat{\pi}$ é morfismo de H -módulos à esquerda, pois para $h \in H$ e $m \in M$,

$$\begin{aligned}
 \hat{\pi}(h \cdot m) &= \sum_i r_i \cdot \pi(l_i \cdot (h \cdot m)) \\
 &= \sum_i r_i \cdot \pi((l_i h) \cdot m) \\
 &= \sum_i (h r_i) \cdot \pi(l_i \cdot m) \\
 &= \sum_i h \cdot r_i \cdot \pi(l_i \cdot m) \\
 &= h \cdot \hat{\pi}(m).
 \end{aligned}$$

Também, $\hat{\pi}$ é idempotente, pois

$$\begin{aligned}
 \hat{\pi}(\hat{\pi}(m)) &= \hat{\pi}\left(\sum_i r_i \cdot \pi(l_i \cdot m)\right) \\
 &= \hat{\pi}\left(\sum_i r_i \cdot \pi(l_i \cdot m)\right) \\
 &= \sum_i r_i \cdot \hat{\pi}(\pi(l_i \cdot m)) \\
 &= \sum_i r_i \cdot \sum_j r_j \cdot \pi(\pi(l_j \cdot (l_i \cdot m))) \\
 &= \sum_i \sum_j (r_i r_j) \cdot \pi((l_j l_i) \cdot m) \\
 &= \sum_i \sum_j (r_i r_j) \cdot \pi((l_j l_i) \cdot m) \\
 &= \sum_i \sum_j (r_i l_i r_j) \cdot \pi(l_j \cdot m) \\
 &= \sum_j r_j \cdot \pi(l_j \cdot m) \\
 &= \hat{\pi}(m).
 \end{aligned}$$

Como $\hat{\pi}$ é morfismo de H -módulos idempotente, temos que N é somando direto de M . Portanto, M é semissimples, provando que H é álgebra semissimples. ■

Como é possível observar, biálgebras fracas são boas generalizações do conceito de biálgebra, uma vez que muitos dos resultados que valem para biálgebras tem análogos no contexto fraco, entre eles os que demonstramos nesse artigo, Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf e o Teorema de Maschke. Outras generalizações são verdade, por exemplo, a categoria de H -módulos, em que H é álgebra de Hopf fraca, é monoidal rígida com objeto unidade sendo H_t . Também, foi provado por Etingof, Nikshych e Ostrik que qualquer categoria de fusão é equivalente a uma categoria de módulos sobre uma álgebra de Hopf. Outras generalizações que também podem ser estudadas estão relacionadas com produto smash no contexto fraco e o Teorema de dualidade de Montgomery-Blattner.

REFERÊNCIAS

- [1] D. R. PANSERA; **Álgebras de Hopf Fracas: Teoremas de Dualidade e de Maschke**, Dissertação de Mestrado, UFSC.
- [2] G. BOHM, S. CAENEPEEL, AND K. JANSSEN **Weak Bialgebras and Monoidal Categories**.
- [3] F. NILL, **Axioms for Weak Bialgebras**, Chigago: CBMS, 1992.