Semisimplicidade nas categorias das álgebras e coálgebras

Gustavo Alexandre Albano Carli

7 de dezembro de 2014

Resumo

Nesse trabalho trataremos da categoria dos A-módulos semisimples à esquerda em que A é uma álgebra, e C-comódulos à direita em que C é uma coálgebra. Trabalharemos sempre com o corpo $\mathbb{K}$ dos números complexos e buscaremos relações interessantes entre aquelas duas categorias. Nosso objetivo é relacionar esses conceitos com os de álgebras semisimples e coálgebras cosemisimples e fazer um breve estudo sobre essas duas classes de objetos.

No primeiro capítulo demostramos o Teorema de Wedderburn para o caso das álgebras de dimensão finita. No segundo capítulo falamos sobre coágebras simples e comódulos simples e buscaremos dar um exemplo de uma coágebra simples associada a um comódulo simples. No terceiro capítulo falamos sobre coálgebras cosemisimples e temos por objetivo final mostrar que uma coálgebra é cosemisimples se, e somente se, seu dual é uma álgebra semisimples, desde que sua dimensão seja finita.

Palavras-chaves: Álgebras semisimples, coálgebras cosemisimples.

1 Álgebras Semisimples

Nesse capítulo, nosso objetivo é trabalhar com A-módulos semisimples em que A é uma álgebra. Será suficiente usar a definição clássica de A-módulos. Todos os espaços vetoriais serão de dimensão finita, a menos que se diga o contrário. A razão para isso é que trabalharemos no segundo capítulo com coálgebras simples que são de dimensão finita (devido ao Teorema Fundamental das Coálgebras). Veremos também no segundo capítulo que existe uma caracterização interessante entre essa classe de coálgebras com seus duais. Usamos a referência [1] como base para esse capítulo inicial.

Vamos a duas definições básicas a fim de estabelecermos notação:

Definição 1.1 *Seja A uma álgebra. Um módulo (à esquerda) sobre A é um par $(\cdot, V)$ em que V é um espaço vetorial e $\cdot : A \times V \to V$ é uma operação satisfazendo, para todos $x, y \in A$ e $v, w \in V$, as seguintes condições:*
(i) *x.(v+w) = x.v +x.w*
(ii) *(x+v).v = x.v+x.w*
(iii) *x.(y.v) = (xy).v*
(iv) *1.v = v*

Definição 1.2 *Sejam V e V' dois A-módulos. Um subespaço vetorial W de V é um submódulo de V se $x.w \in W$ para todos $x \in A$ e $w \in W$, e uma função $f : V \to V'$ é um morfismo de A-módulos se $f(x.v) = x.f(v)$ e se f for linear.*

Observação 1.3 *Núcleo e imagem de morfismos de A-módulos são submódulos.*

Definição 1.4 *Um A-módulo V é simples se seus únicos submódulos são os triviais, ou seja, V e 0.*

Observação 1.5 *Se V é um A-módulo não nulo então V admite um submódulo simples não nulo.*

Definição 1.6 *Um A-módulo é dito semisimples se satisfizer uma das condições da proposição abaixo:*

Proposição 1.7 *Seja V um A-módulo. São equivalentes:*
(i) *V é soma direta de submódulos simples;*
(ii) *V é soma de submódulos simples;*
(iii) *Para todo submódulo U de V existe um submódulo W de V (chamado de complementar de U), de modo que $V = U + W$ e $U \cap W = 0$, ou seja, V é soma direta de U por W.*

Demonstração:
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Suponha $V = V_1 + \cdots + V_k$ em que cada V_i é um submódulo simples de V. Seja U um submódulo de V ($U \neq V$ e $U \neq 0$). Para cada i tem-se que $V_i \cap U$ é submódulo de V_i. Se $V_i \cap U = V_i$ para todo i então $V = U$, um absurdo. Logo existe um i tal que $V_i \cap U = 0$. Portanto, existe um subconjunto maximal I de $\{1, \cdots, k\}$ de modo que

$$U \cap \sum_{i \in I} V_i = 0.$$

Defina $W := \sum_{i \in I} V_i$. Vamos mostrar que $V = U + W$. Se isso não ocorrer então existe $j \notin I$ de modo que V_j não está contido em $U + W$. Como V_j é simples então $V_j \cap (U + W) = 0$. Note que se $u \in (V_j + W) \cap U$ então $u = v_j + w$ e $v_j = u - w \in V_j \cap (U + W)$, ou seja, $v_j = 0$. Então $u = w$, mas como $W \cap U = 0$ segue que $u = 0$. Logo $(V_j + W) \cap U = 0$, contradizendo a maximalidade de I. Portanto, $V = U + W$ como queríamos demonstrar.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Por causa da Observação 1.5, podemos considerar um submódulo U de V de dimensão máxima tal que U é soma direta de módulos simples. Seja W o complementar de U. Suponha, por contradição, que $W \neq 0$. Então W não é simples. Seja Z um submódulo simples de W ($Z \neq W$ e $Z \neq 0$). Então $U + Z$ é soma direta de módulos simples, um absurdo, pois contradiz a maximalidade da dimensão de U. Portanto, $W = 0$ como queríamos. ∎

Proposição 1.8 *Submódulos de A-módulos semisimples são semisimples.*

Demonstração: Seja V um A-módulo semisimples. Seja U um submódulo de V. Seja Z um submódulo de U. Por 1.7(iii) existe W submódulo de V tal que $V = Z + W$ e $Z \cap W = 0$. Queremos mostrar que $U = Z + W \cap U$ e $Z \cap (W \cap U) = 0$. Seja $u \in U$. Como $u \in V$ então podemos escrever $u = z + w$. Assim $w \in U$. Portanto, U é semisimples. ∎

Proposição 1.9 *Quocientes de A-módulos semisimples são semisimples.*

Demonstração: Sejam V um A-módulo semisimples e U um submódulo de V. Por 1.7 (iii), existe um submódulo W de V de modo que $V = U \oplus W$. Considere a aplicação $f : (U \oplus W)/U \to W$ dada por $f(u + w + U) = w$. É fácil ver que f está bem definida, é linear, injetiva, sobrejetiva e que é morfismo de A-módulos. Em outras palavras, f é um isomorfimo de A-módulos. Mas por 1.8, W é semisimples. Poratnto, V/U é semisimples como queríamos. ∎

Definição 1.10 *Uma álgebra A é semisimples se A é um A-módulo semisimples (com ação igual à aperação produto de A).*

Proposição 1.11 *A é uma álgebra semisimples se, e somente se, todo A-módulo é semisimples.*

Demonstração: Suponha que A é uma álgebra semisimples. Seja V um A-módulo e $\{v_1, \ldots, v_k\}$ uma base de V. Denote $A^k := A \oplus \cdots \oplus A$ (k-vezes), soma direta de

A A-módulos. Note que A^k é semisimples pois A é semsimples. Defina a aplicação $f : A^k \to V$ por

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto x_1.v_1 + \cdots + x_k.v_k.$$

Claro que f é morfismo sobrejetivo de A-módulos. Portanto, $V \cong A^k/\operatorname{Ker}(f)$. Por 1.3 e 1.9 segue que V é semisimples. ■

Exemplo 1.12 *Se G é um grupo finito então a álgebra de grupo $\mathbb{K}G$ é semisimples. Para mostrar esse resultado vamos verificar o item (iii) de 1.7 para V um $\mathbb{K}G$-módulo. Seja U um submódulo de V. Como U é subespaço vetorial de V então existe uma aplicação linear $\pi : V \to U$ de modo que $\pi(u) = u$ para todo $u \in U$. Defina a aplicação $\pi' : V \to U$ por:*

$$\pi'(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1}.\pi(gv).$$

Vamos mostrar que π' é morfismo de $\mathbb{K}G$-módulos. Note que para todo $h \in G$ e para todo $v \in V$, tem-se

$$\pi'(h.v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1}.\pi(g.hv) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} ht^{-1}.\pi(tv) = h.\pi'(v).$$

Note também que

$$\pi'(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1}\pi(gu) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1}(gu) = u.$$

Portanto $U = Im(\pi')$. Seja $W := Ker(\pi')$. Como π' é morfismo de módulo então W é submódulo de V. Note que $W \cap U = 0$ pois se $w \in W \cap U$ então $w = \pi'(w) = 0$. Como $Im(\pi') = U$ então $dim(V) = dimKer(\pi') + dimIm(\pi') = dim(W) + dim(U)$. Mas $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = dim(V)$. Logo, $U + W = V$. Portanto, V é $\mathbb{K}G$-módulo semisimples. □

Definição 1.13 *Seja A uma álgebra. Sejam V e U A-módulos. Denotamos $Hom_A(V, W)$ o $\mathbb{K}$ espaço vetorial dos morfismos lineares que são morfismos de A-módulos (èsquerda).*

Proposição 1.14 *Sejam V e W A-módulos simples. Seja $f \in Hom_A(V, W)$ e $f \neq 0$. Então f é um isomorfismo. Mais ainda, se $V = W$ então existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que, para todo $v \in V$, tem-se $f(v) = \lambda v$.*

Demonstração: Como $f \neq 0$, W é A-módulo simples, $f \in \operatorname{Hom}_A(V, W)$ e $Im(f) \subseteq W$ é submódulo de W por 1.3, segue que $Im(f) = W$. Como $Ker(f) \neq V$ e $Ker(f)$

é submódulo de V por 1.3 então $Ker(f) = 0$. Portanto, f é um isomorfismo de A-módulos.

Agora suponha que $V = W$. Seja λ um autovalor de f. Então a aplicação $g := f - \lambda Id_V : V \to V$ é um morfismo de A-módulos. Como o núcleo de f é não trivial e V é A-módulo simples então $g \equiv 0$. ■

Proposição 1.15 *Seja T um A-módulo simples. Se V é um A-módulo que é soma de submódulos simples, $V = S_1 + \cdots + S_k$, nenhum dos quais isomorfo a T, então V não tem um submódulo isomorfo a T.*

Demonstração: Suponha que V tem um submódulo simples $T^{'}$ isomorfo a T. Como V é semisimples e $T^{'}$ é submódulo de V, então existe um submódulo W tal que $V = W \oplus T^{'}$. Considere o morfismo não nulo de A-módulos $\pi : W \oplus T \to T$ dado por $\pi(w+t) = t$. . Como $V = S_1 + \cdots + S_k$, então existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ de modo que $\pi_{|S_i}$ é não nulo. Como S_i e T são simples e $\pi_{|S_i}$ é morfismo de A-módulos, segue de 1.14 que S_i e T são isomorfos, o que é um absurdo. ■

Proposição 1.16 *Se A é uma álgebra semisimples então todo A-módulo simples é isomorfo a um submódulo de A.*

Demonstração: Sejam V um A-módulo simples e $v \in V$ não nulo. Considere a aplicação $f : A \to V$, $x \mapsto x.v$. Note que f é morfismo de A-módulos pois $f(xy) = (xy).v = x.(y.v) = x.f(y)$. Observe também que f é sobrejetiva pois $f(1) = 1.v = v$, ou seja, $Im(f) \neq 0$ e como V é simples segue que $Im(f) = V$. Portanto, $A/U \cong V$ em que $U = Ker(f)$. Como A é semisimples segue de 1.7 que existe um submódulo W de A tal que $A = U \oplus W$. Como W e A/U têm mesma dimensão então $W \cong A/U \cong V$. ■

Definição 1.17 *Se A é uma álgebra semisimples e S é A-módulo simples, denotamos $S(A)$ como a soma de todos os submódulos de A que são isomorfos a S.*

Observação 1.18 *Se A é uma álgebra então A^{op} é a álgebra oposta, ou seja, a álgebra com multiplicação dada por $(x, y) \mapsto yx$ para todos $x, y \in A$.*

Observação 1.19 *Se V é um A-módulo então $End_A(V) := Hom_A(V, V)$ é uma $\mathbb{K}$-álgebra com multiplicação dada pela composição, ou seja, $(f, g) \mapsto f \circ g$.*

Observação 1.20 *A álgebras $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})^{op}$ e $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ são isomorfas através da aplicação transposição $f : A \to A^T$ que é um isomorfismo de espaços vetoriais, preserva produto pois*

$$f(A._{op}B) = f(BA) = (BA)^T = A^T B^T = f(A)f(B),$$

e claramente preserva unidade. Essa observação será importante no transcorrer da demonstração do Teorema de Wedderburn que vem após os dois próximo resultados.

Proposição 1.21 *Para toda álgebra A tem-se que $End_A(A) \cong A^{op}$.*

Demonstração: Considere a aplicação $\xi : A^{op} \to \mathrm{End}_A(A)$ definida pela seguinte regra: $\xi(x)(a) = ax$. Sejam $x, y, a \in A$ e note que ξ preserva produto pois

$$\xi(x.y)(a) = \xi(yx)(a) = a(yx) = (ay)x = \xi(x)(ay) = \xi(x)(\xi(y)(a)) = (\xi(x) \circ \xi(y))(a).$$

Também vale que ξ preserva unidade pois $\xi(1)(a) = a1 = a = Id_A(a)$. Note que se $\xi(x) = 0$ então $ax = 0$ para todo $a \in A$, ou seja, $x = 1x = 0$. Logo ξ é injetiva. Para mostrar que ξ é sobrejetiva, seja $f \in \mathrm{End}_A(A)$. Então $f(x) = f(x1) = xf(1)$. Portanto, $\xi(f(1))(x) = xf(1) = f(x)$, ou seja, $\xi(f(1)) = f$. Portanto, $\mathrm{End}_A(A)$ é isomorfo A^{op} como álgebras. ■

Proposição 1.22 *Se S é A-módulo simples, denote $S^n := S \oplus \cdots \oplus S$ (n vezes). Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_k$ A-módulos simples dois a dois não isomorfos. Denote por $V := S_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus S_k^{n_k}$. Então a álgebra $End_A(V)$ é isomorfa a $M_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \cdots M_{n_k}(\mathbb{K})$.*

Demonstração: Para $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq n_i$, considere $\imath_j^{(i)} : S_i \to V$ a imerção padrão na j-ésima componente do submódulo $S_i^{n_i}$ em V. Defina também a projeção $\pi_j^{(i)} : V \to S_i$ na j-ésima componente de $S_i^{n_i}$. Para $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j, l \leq n_i$, defina $e_{jl}^{(i)} \in \mathrm{End}_A(V)$ por $e_{jl}^{(i)} = \imath_j^{(i)} \circ \pi_l^{(i)}$. Seja $C := (C_1, \ldots, C_k) \in M_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \cdots M_{n_k}(\mathbb{K})$ com a entrada $(j.l)$ de C_i igual a $c_{jl}^{(i)} \in \mathbb{K}$. Defina o homomorfismo de álgebras

$$\xi(C) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} c_{jl}^{(i)} e_{jl}^{(i)}.$$

Note que se $\xi(C) = 0$ então $0 = \pi_j^{(i)} \circ \xi(C) \circ \imath_l^{(i)} = c_{ij}^{(l)} Id_{S_i}$, para todo i, j, l, pois $\pi_j^{(i)} \imath_{j'}^{i'} = \delta_{ii'} \delta_{jj'} Id_{S_i}$. Então $C = 0$ e ξ é injetiva.

Vamos mostrar que ξ é sobrejetiva comparando as dimensões. Claramente, temos $\dim(M_{n_1}(\mathbb{K}) \oplus \cdots M_{n_k}(\mathbb{K})) = n_1^2 + \cdots + n_k^2$. Por outro lado, $\mathrm{End}_A(V)$ é isomorfo a soma direta

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \bigoplus_{j=1}^{n_i} \bigoplus_{i'=1}^{k} \bigoplus_{j'=1}^{n_{i'}} \mathrm{Hom}_A(S^i i, S^{i'}).$$

Uma consequência de 1.14 é que $\dim(\mathrm{Hom}_A(S_i, S_{i'})) = \delta_{ii'}$. Portanto,

$$\dim(\mathrm{End}_A(V)) = n_1^2 + \cdots + n_k^2.$$

■

Teorema 1.23 *(Wedderburn) Suponha que A é uma álgebra semisimples. Então A é uma soma direta de matrizes. Mais precisamente, existe somente uma quantidade finita de A-módulos simples que, a menos de isomorfismo, se os denotarmos por $S_1, \ldots, S_k$, e também denotarmos $n_i := dim(S_i)$, vale que a álgebra A é isomorfa a soma direta de $S_i(A)$, e para cada i, a álgebra $S_i(A)$ é isomorfa a álgebra de matrizes $\mathbb{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.*

Demonstração: Como A é A-módulo semisimples, então pode ser decomposto como somo direta de módulos simples. Escreva

$$A = T_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus T_l^{m_l},$$

em que $T_1, \ldots, T_l$ são simples e dois a dois não isomorfos. Por 1.21 e 1.22 temos o seguinte isomorfismo de álgebras

$$A^{op} \cong \mathrm{End}_A(A) \cong \mathbb{M}_{m_1}(\mathbb{K}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{M}_{m_l}(\mathbb{K}).$$

Como para todo n natural vale que $\mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{M}_n(K)^{op}$ temos que

$$A \cong \mathbb{M}_{m_1}(\mathbb{K}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{M}_{m_l}(\mathbb{K}).$$

A partir de agora vamos enxergar A como a soma direta das álgebras de matrizes acima. Escrevemos os elementos de A como $x := (x_1, \ldots, x_l)$ em que $x_i \in \mathbb{M}_{m_i}(\mathbb{K})$. Podemos dar uma estrutura de A-módulo para o espaço vetorial $\mathbb{K}^{m_i}$ através da ação definida por $x.v := x_i v$ para todo $x \in A$ e para todo $v \in \mathbb{K}^{m_i}$. Vamos denotar esse módulo por S_i e vamos mostrar que S_i é simples. De fato, seja $U \subseteq S_i$ um submódulo não nulo. Escolha $u \in U$ não nulo. Um fato elementar de álgebra linear nos garante que para todo vetor $v \in S_i$ existe uma matix $x_i \in \mathbb{M}_{m_i}(\mathbb{K})$ de modo que $x_i u = v$. Disso segue que $v \in U$ e assim $U = S_i$.

Seja $e_i := (0, \ldots, I_i, \ldots, 0) \in A$. Então $e_i S_i = S_i$ e $e_i S_j = 0$ para todo $i \neq j$. Portanto os módulos $S_1, \ldots, S_l$ são dois a dois não isomorfos. Para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m_i$, seja

$$T_{ij} := \{(0, \ldots, x_i, \ldots, 0) \in A;\ x_i \text{ possui entradas nulas fora da j-ésima coluna}\}.$$

Observe que cada T_{ij} é submódulo de A, $T_{ij} \cong S_i$ e $A = \bigoplus_{i=1}^{l} \bigoplus_{j=1}^{m_i} T_{ij}$ como um A-módulo. Por 1.16, os módulos $S_1, \ldots, S_l$ são todos os A-módulos simples a menos de isomorfismo. Note que $\dim(S_i) = m_i$. Vamos mostrar agora que $S_i(A) = \mathbb{M}_{m_i}(\mathbb{K})$. Já sabemos que $\mathbb{M}_{m_i} \subseteq S_i(A)$. Suponha que existe um submódulo Q de A isomorfo a S_i e que não está contido em $\mathbb{M}_{m_i}(\mathbb{K})$. Considere $\pi : A \to A/\mathbb{M}_{m_i}(\mathbb{K})$ o morfismo canônico de módulos. Então $\pi(Q) \neq 0$ e $\pi(Q) \cong S_i$. Então $\pi(Q)$ é um submódulo de $\pi(A)$, que é soma direta dos módulos $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_l$, nenhum dos quais isomorfos a S_i. Isso contradiz 1.15. ■

2 C-Comódulos Simples e Coálgebras Simples

Nesse capítulo fixaremos uma coálgebra (C, Δ, ϵ) em que Δ e ϵ são a comultiplicação e a counidade, respectivamente. Trabalharemos com C-comódulos simples à direita. Trataremos do socle de um C-comódulo que é a soma de todos os C-subcomódulos simples à direita e veremos que comódulos simples tem dimensão finita. Depois definiremos coálgebras simples e veremos uma caracterização interessante com sua álgebra dual e um exemplo importante de uma coálgebra simples associada a um comódulo simples e por fim que comódulos simples estão diretamente relacionados com suas coálgebras associadas. Usamos a referência [2] como base para esse estudo.

Definição 2.1 *Dada uma coálgebra (C, Δ, ϵ), diremos que um C-comódulo à direita é livre se for isomorfo a um comódulo da forma $X \otimes C$, em que X é um espaço vetorial. (Lembre-se que $X \otimes C$ é C-comódulo à direita com coação $I \otimes \Delta$).*

Observação 2.2 *Note se X é um espaço vetorial com base $(e_i)_{i \in I}$ então o comódulo $X \otimes C$ é isomorfo a soma direta C^I (na categoria dos C-comódulos à direita).*

Proposição 2.3 *Se (C, Δ, ϵ) é uma coálgebra então todo C-comódulo à direita é isomorfo a um subcomódulo de um C-comódulo livre.*

Demonstração: Seja (M, p) um C-comódulo à direita. Note que $M \otimes C$ é C-comódulo à direita com coação $I \otimes \Delta$. Claro que a coação $p : M \to M \otimes C$ é morfismo de C-comódulo à direita. Também é verdade que p é injetivo pois se $p(m) = 0$ então $m = (I \otimes \epsilon) \circ p(m) = 0$. Portanto, M é isomorfo ao C-subcomódulo à direita $Im(p) \subseteq M \otimes C$. ■

Definição 2.4 *Um C-comódulo à direita é chamado de simples se $M \neq 0$ e se seus únicos subcomódulos são os triviais, ou seja, M e 0.*

Observação 2.5 *Se M é um C-comódulo simples à direita então M é C^*-módulo racional simples à esquerda pois já é um fato que a categoria dos comódulos à direita é isomorfa a categoria dos módulos racionais à esquerda.*

Definição 2.6 *Dado M um C-comódulo à direita, chamamos de socle de M e o denotamos por $s(M)$, a soma de todos os C^*-submódulos simples à esquerda de M.*

Proposição 2.7 *Todo comódulo contém um subcomódulo simples.*

Demonstração: Seja M um C-comódulo à direita e não nulo. Seja $m \in M$ e $m \neq 0$. Como já é de conhecimento, o subcomódulo $C^*.m$ gerado por m tem dimensão finita. Considere S, dentre todos os subcomódulos de $C^*.m$, um subcomódulo de menor dimensão. Então é claro que S é simples. ■

Proposição 2.8 *Um C-comódulo simples tem dimensão finita.*

Demonstração: Seja S um C-comódulo simples à direita. Seja $s \in S$ e $s \neq 0$. Então S é C^*-módulo simples. Como $C^*.s$ é submódulo de S e tem dimensão finita segue que é o próprio S. ■

Proposição 2.9 *Se S é um C-comódulo simples à direita então S é isomorfo a um C-subcomódulo à direita de C.*

Demonstração: Suponha que a dimensão de S é n. Por 2.2 e 2.3 segue que existe um morfismo injetivo de comódulos $S \to C^n$. Enxergando essa aplicação como um morfismo de C^*-módulos temos que $S \subseteq s(C^n)$. Portanto S é isomorfo a um submódulo de $s(C^n)$. Como $s(C^n)$ é soma direta de módulos simples então S é isomorfo a um submódulo simples de C, portanto a um C-subcomódulo à direita de C. ■

Definição 2.10 *Uma coálgebra C é dita simples se suas únicas subcoálgebras são as triviais.*

Observação 2.11 *O Teorema Fundamental das coálgebras, encontrado em [2], nos diz que todo elemento de uma coálgebra está contido numa subcoálgebra de dimensão finita.*

Observação 2.12 *A Observação 2.11 nos diz que toda coálgebra simples tem dimensão finita.*

Observação 2.13 *Se C é uma coálgebra com comultiplicação Δ, então seu dual C^* é uma álgebra com multiplicação, chamada de convolução, definida por $(f \star g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2)$, em que $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$ (aqui usamos a notação de Sweedler).*

Observação 2.14 *Se C é uma coálgebra e I é um ideal de C^* então $I^\perp$ é uma subcoálgebra de C. De fato, seja $\{e_j\}_j$ uma base de C. Considere um elemento $c \in I^\perp \subseteq C$. Podemos escrever $\Delta(c) = \sum c_j \otimes e_j$. Vamos mostrar que $c_j \in I^\perp$, para todo j. Fixe j_o e tome $f \in C^*$ de modo que $f(e_j) = \delta_{j,j_0}$ para todo j. Se $g \in I$ então $0 = (g * f)(c) = \sum g(c_j)f(e_j) = g(c_{j_0})$. Logo $c_{j_0} \in I^\perp$, ou seja, $\Delta(I^\perp) \subseteq I^\perp \otimes C$. De forma análoga, se mostra que $\Delta(I^\perp) \subseteq C \otimes I^\perp$. Portanto $I^\perp$ é uma subcoálgebra de C, como desejávamos.*

Definição 2.15 *Uma álgebra A é denominada artiniana (à esquerda) se satisfaz a condição da cadeia descendente para ideais (à esquerda), isto é, se $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ é uma tal cadeia então existe $k \geq 1$ tal que $I_n = I_k$, para todo $n \geq k$.*

Proposição 2.16 *Uma coálgebra é simples se, e somente se, C^* é uma álgebra simples artiniana.*

Demonstração: Suponha que C é cálgebra simples. Seja I um ideal de C^*. Então $I^\perp$ é subcoálgebra de C por 2.14. Como C é simples então $I^\perp = 0$ ou $I^\perp = C$. Em outras palavras, $I = C^*$ ou $I = 0$. Logo C^* é álgebra simples. Como C tem dimensão finita então C^* tem dimensão finita. Logo C^* é artiniana. Reciprocamente, se C^* é álgebra simples artiniana, tome J uma subcoálgebra de C. Então $J^\perp$ é ideal de C^*. Logo $J^\perp = C^*$ ou $J^\perp = 0$. Portanto, $J = 0$ ou $J = C$, e assim C é coálgebra simples. ■

Observação 2.17 *Dada uma coálgebra C, podemos enxergar C como um C^*-módulo à esquerda através da ação de C^* em C dada por $f \rightharpoonup c = \sum f(c_2)c_1$*

Proposição 2.18 *Se C é coálgebra simples então C é soma de C-subcomódulos simples à direita.*

Demonstração: Supondo a coálgebra C simples, então C^* é álgebra artiniana simples e assim, se M é um C^*-módulo qualquer então M é semisimples por 1.11. Enxergando C como um C^*-módulo semisimples à esquerda então C é soma de C^*-submódulos simples a esquerda. Noutras palavras, C é soma de C-subcomódulos simples à direita. ■

O resultado a seguir será útil para nos dar um exemplo importante de uma coálgebra simples que é conhecida como a coálgebra associada a um comódulo (simples). Vejamos:

Lema 2.19 *Seja C uma coálgebra . Então as seguintes proposições são verificadas:*
(i) *Se I é um ideal à esquerda de C^*, então*

$$I^\perp = \{c \in C; I \rightharpoonup c = 0\} =: ann_C(I).$$

(ii) *Se X é um coideal à esquerda de C então*

$$X^\perp = \{f \in C^*; f \rightharpoonup x = 0, \forall x \in X\} =: ann_{C^*}(X),$$

(iii) *Sejam* M *um* C*-comódulo à direita,* $p : M \to M \otimes C$ *sua coação e* J *um ideial de* C^* *de modo que* $JM = 0$*. Então* $p(M) \subseteq M \otimes J^{\perp}$*.*

(iv) *Se* M *é um* C*-comódulo à direita então*

$$A = ann_{C^*}(M)^{\perp} = \{f \in C^*; f \rightharpoonup x = 0, \forall x \in m\}^{\perp}$$

é a menor subcoálgebra de C *tal que* $p(M) \subseteq M \otimes A$*.*

Demonstração:
(i) Seja $c \in \mathrm{ann}_C(I)$. Então $f \rightharpoonup c = 0$ para todo $f \in I$. Portanto $c \in I^{\perp}$ pois

$$f(c) = f(\epsilon(c_1)c_2) = \epsilon(c_1)f(c_2) = \epsilon(c_1 f(c_2)) = \epsilon(f \rightharpoonup c) = \epsilon(0) = 0.$$

Portanto, $I^{\perp} \supseteq \{c \in C; I \rightharpoonup c = 0\}$. Por outro lado, se $c \in I^{\perp}$ então $f(c) = 0$ para todo $f \in I$. Escreva $\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ em que $\{x_i\}_i$ e $\{y_i\}_i$ são linearmente independentes. Seja $t \in \{1, \ldots, n\}$. Existe $g \in C^*$ tal que $g(x_t) = 1$ e $g(x_i) = 0$ para $i \neq t$. Como $g * f \in I$, pois I é ideal a esquerda, segue que

$$0 = (g * f)(c) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)f(y_i) = f(y_t).$$

Ou seja, $f(y_t) = 0$ para todo $t \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto $f \rightharpoonup c = \sum_{i=1}^{n} x_i f(y_i) = 0$ e assim $c \in \mathrm{ann}_C(I)$. Logo $I^{\perp} \subseteq \mathrm{ann}_C(I)$. Seque que $I^{\perp} = \mathrm{ann}_C(I)$ como queríamos demonstrar.

(ii) Seja $f \in X^{\perp}$. Então $f(x) = 0$ para todo $x \in X$. Assim $f \rightharpoonup x = \sum f(x_2)x_1 = 0$. Em outras palavras, $f \in \mathrm{ann}_{C^*}(X)$. Por outro lado, suponha que $f \in \mathrm{ann}_{C^*}(X)$. Então para todo $x \in X$ tem-se que

$$f(x) = f(\epsilon(x_1)x_2) = \epsilon(x_1)f(x_2) = \epsilon(x_1 f(x_2)) = \epsilon(f \rightharpoonup x) = \epsilon(0) = 0.$$

Logo, $f \in X^{\perp}$ e temos a igualdade do item (ii).

(iii) Para $m \in M$, escreva $p(m) = \sum m^0 \otimes m^1$ em que $\{m^0\}$ e $\{m^1\}$ são linearmente independentes (aqui usamos a notação de Sweedler para comódulos). Se $f \in J$ então

$$0 = f.m = \sum f(m^1)m^0$$

e assim $f(m^1) = 0$ para todo m^1. Portanto, $m^1 \in J^\perp$ e assim $p(M) \subseteq M \otimes J^\perp$.

(iv) Denote $J = \mathrm{ann}_{C^*}(M)$. Então J é um ideial bilateral de C^* e pelo item (iii) temos que $p(M) \subseteq M \otimes A$. Além disso temos que $A = J^\perp$ é subcoálgebra de C. Assuma que B é uma subcoálgebra tal que $p(M) \subseteq M \otimes B$. Se $f \in B^\perp$ e $m \in M$ temos $0 = f.m = \sum f(m^1)m^0$ em que $p(m) = \sum m^0 \otimes m^1$. Portanto $B^\perp \subseteq \mathrm{ann}_{C^*}(M) = J$. Logo $J^\perp \subseteq (B^\perp)^\perp = B$. ∎

Observação 2.20 *A subcoálgebra A de 2.19 é chamada de coálgebra associada ao comódulo M.*

Exemplo 2.21 *Seja M um C-comódulo simples à direita. Queremos mostrar que a coálgebra A associada a M é simples. Segue do resultado anterior que A é a menor subcoálgebra de C de modo que M é A-comódulo à direita. Então enchergamos M como um objeto na categoria $\mathcal{M}^A$. Portanto, temos que $A = ann_{A^*}(M)^\perp$ e assim $ann_{A^*}(M) = 0$. Portanto, M é um A^*-módulo simples fiel à esquerda. Logo, A^* é uma álgebra simples artiniana. Segue de 2.16 que A é uma álgebra simples.* □

Proposição 2.22 *Sejam M e N dois C-comódulos simples à direita. Então M e N são isomorfos se, e somente se, tem a mesma coálgebra associada.*

Demonstração: Suponha primeiro que M e N são C-comódulos à direita e isomorfos. Então eles são C^*-módulos à esquerda e isomorfos. Portanto $ann_{C^*}(M) = ann_{C^*}(N)$ e as coálgebras associadas são as mesmas. Reciprocamente, se M e N tem a mesma coálgebra associada A então A é uma subcoálgebra simples e portanto quaisquer dois A-comódulos simples são isomorfos. Em particular, M e N são isomorfos. ∎

3 Coálgebras Cosemisimples

Nesse capítulo, fixaremos uma coálgebra C e mostraremos que a soma de todas as subcoálgebras simples de C é igual a soma de todos os subcomódulos simples à direita de C. Quando esta coálgebra for igual a essa soma então isso será equivalente a dizer que C é uma coálgebra cosemisimples à direita ou à esquerda e chamaremos C de coálgebra cosemisimples. Finalizaremos demonstrando que se C tem dimensão finita então se ela for cosemisimples, sua álgebra dual é semisimples e que a recíproca é verdadeira. Usamos a referência [2] como base para esse estudo.

Definição 3.1 *Dada uma coálgebra C, denotamos C_0 a soma de todas as subcoálgebras simples de C. C_0 é uma subcoálgebra de C chamada de corradical de C (em algumas referências também é denotado por $Corad(C)$).*

Definição 3.2 *Dada uma coálgebra C e enchergando C como um C-comódulo a direita, denotamos $s(C_C)$ como a soma de todos os subcomódulos simples à direita de C.*

Definição 3.3 *Um C-comódulo é dito cosemisimples se pode ser escrito como soma de subcomódulos simples.*

Proposição 3.4 *Dada uma coálgebra C então $C_0 = s(C_C)$.*

Demonstração: Note que toda subcoálgebra simples A de C é um C-subcomódulo de C. Como A é uma soma direta finita de coideais simples à direita de A então A é um C-comódulo semisimples de dimenção finita. Portanto, $A \subseteq s(C_C)$. Logo $C_0 \subseteq s(C_C)$. Por outro lado, seja $S \subseteq s(C_C)$ um C-comódulo simples a direita. Seja A a coálgebra associada a S. Porque A é simples temos $A \subseteq C_0$. Mas $S \subset A$ pois $c = \sum \epsilon(c_1)c_2 \in A$ para todo $c \in S$. Portanto $S \subseteq A \subseteq C_0$, e assim $s(C_C) \subseteq C_0$. ■

Observação 3.5 *Analogamente, se mostra que C_0 é a soma de todos os subcomódulos simples à esquerda de C.*

Definição 3.6 *Uma coálgebra C é chamada de cosemisimples a direita se a categoria $\mathcal{M}^C$ é semisimples, ou seja, se todo C-comódulo a direita é cosemisimples.*

Proposição 3.7 *Se C é uma coálgebra então as seguintes afrimações são equivalentes:*

(i) *C é uma coálgebra cosemisimples a direita.*

(ii) *C é coálgebra cosemisimples a esquerda.*

(iii) $C = C_0$.

(iv) *Todo C^*-módulo racional a esquerda (a direita) é semisimples.*

(v) *Todo C-comódulo é projetivo na categoria $\mathcal{M}_C$.*

(vi) *Todo C-comódulo é injetivo na categoria $\mathcal{M}_C$.*

Demonstração: As três primeiras afrmações são equivalentes por 3.4. Vamos mostrar que as afirmações (i) e (iv) são equivalentes. Note que se $M \in \mathcal{M}^C$ então é simples na categoria $\mathcal{M}^C$ se, e somente se, M é C^*-módulo simples a esquerda. Vamos mostrar que (v) implica (i). Suponha que todo objeto de $M \in \mathcal{M}^C$ seja projetivo. Então todo subojeto N de M é um somando direto. Isso significa que todo objeto de dimenção finita é semisimples. Por outro lado, $\mathcal{M}^C$ tem uma família de geradores de dimenção finita, o que mostra que todo objeto de $\mathcal{M}^C$ é semisimples.

Uma demonstração completa desse resultado pode ser encontrada em [2] ■

Definição 3.8 *Uma coálgebra C é chamada de cosemisimples se satisfizer as condições equivalentes de 3.7*

Lema 3.9 *Seja $(C_i)_{i\in I}$ uma famiília de subcoálgebras de uma coálgebra C e A uma subcoálgebra simples de $\sum_{i\in I} C_i$. Então existe um índice i de modo que $A \subseteq C_i$.*

Demonstração: Como A tem dimensão finita, podemos supor sem perda de generalidade que a família $(C_i)_{i\in I}$ é finita, digamos $A \subseteq C_1 + \cdots + C_n$. Vamos provar o resultado para $n = 2$ e o resto seguirá por indução. Suponha então que $A \subseteq D + E$ em que D e E são subcoálgebras de C. Se $A \cap D \neq 0$ então $A \cap D = A$ pois A é simples e assim $A \subseteq D$. Se $A \cap D = 0$, seja $a \in A$. Portanto

$$\Delta(a) \in \Delta(D + E) = \Delta(D) + \Delta(E) \subseteq D \otimes D + E \otimes E.$$

Então $\Delta(a) = \sum a_1 \otimes a_2 + \sum b_1 \otimes b_2$ com $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in E$. Como $A \cap D = 0$ existe $f \in C^*$ tal que $f_{|D} = 0$ e $f_{|A} = \epsilon_{|A}$. Então $f \rightharpoonup a \in A$ (pois A é C^*-módulo à esquerda (à direita)), e assim $f \rightharpoonup a = \epsilon \rightharpoonup a = a$. Por outro lado,

$$f \rightharpoonup a = \sum f(a_2)a_1 + \sum f(b_2)b_1 = \sum f(b_2)b_1 \in E.$$

Isso mostra que $A \subseteq E$. Indutivamente, o resultado segue. ■

Lema 3.10 *Se A é uma subcoálgebra de $C = \bigoplus_{i\in I} C_i$, então existe uma família $(A_i)_{i\in I}$ tal que A_i é subcoálgebra de C_i para todo $i \in I$ e $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$.*

Demonstração: A demonstração desse resultado é bastante técnica e longa e pode ser encontrada na referência [2] em 2.2.18. ■

Com esses dois últimos resultados conseguimos demonstrar uma teorema importante a respeito das coálgebras cosemisimples:

Teorema 3.11 *Se C é uma coálgebra cosemisimples então C é soma direta de subcoálgebras simples e todo subcoálgebra de C é cosemisimples.*

Demonstração: Seja $(C_i)_{i\in I}i$ a família de todas as subcoálgebras simples de C. Vamos mostrar que a soma $\sum_{i\in I} C_i$ é direta. Se para algum j temos $C_j \subseteq \sum_{i\in I-j} C_i$ então por 3.9 tem-se que $C_j \subseteq C_t$ para algum $t \in I - j$. Como C_t é simples segue que $C_t = C_j$, uma contradição.

Se D é uma subcoĺgebra de $C = \bigoplus_{i\in I} C_i$ então $D = \bigoplus_{i\in I} A_i$ em que A_i é subcoálgebra de C_i para todo $i \in I$. Portanto, $A_i = 0$ ou $A_i = C_i$. ■

No Capítulo 1 trabalhamos com álgebras semisimples e para concluir esse trabalho demonstramos um resultado simples porém importante que relaciona semisimplicidade e cosesisimplicidade.

Teorema 3.12 *Seja C uma coálgebra de diimensão finita. Então C é cosemisimples se, e somente se, C^* é álgebra semisimples*

Demonstração: Já sabemos que C é coálgebra cosemisimples se, e somente se, a categoria dos C-comódulos à direita é semisimples. Também, C^* é semisimples se, e somente se, a categoria dos C^*-módulos à esquerda é semisimples (veja a Proposição 1.11). Então o resultado segue do fato de que essas categorias são isomorfas. ■

REFERÊNCIAS

[1] web.mat.bham.ac.uk/A.Evseev/pdf/wedderburn.pdf

[2] Dascalescu, C. Nastasescu and S. Raianu. Hopf Algebras An Introduction. Marcel Dekker 2001.