Uma Biálgebra que admite uma extensão de Hopf-Galois é uma Álgebra de Hopf

Mateus Medeiros Teixeira

5 de dezembro de 2014

Resumo

Neste trabalho apresentamos como as extensões de álgebra sobre k-biálgebras influenciam na construção de álgebras de Hopf.

Palavras-chaves: Álgebra de Hopf; Extensão de Hopf-Galois

Introdução

No estudo de extensões é comum assumirmos que H é uma álgebra de Hopf. Uma exceção é feita em [2], onde extensões fendidas sobre uma biálgebra são consideradas.

Vemos que na verdade, podemos defirnir extensões sobre k-biálgebras sem nenhuma hipótese adicional, pois quando as definimos usualmente sobre álgebras de Hopf, não exigimos nenhuma condição sobre a antípoda.

Dentre as extensões, destacamos aqui as extensões de Hopf-Galois introduzidas por Chase e Sweedler em 1969, en que as idéias de ações de grupos sobre anéis comutativos (extensões de Galois) foram estendidas para coações de álgebras de Hopf agindo sobre uma k-álgebra comutativa, com k um anel comutativo. E generalizadas por Kreimer e Takeuchi no caso de álgebras de Hopf de dimensão finita.

Nosso foco será mostrar que uma k-biálgebra que admite uma extensão de Hopf-Galois é uma álgebra de Hopf, onde k é um anel comutativo.

1 Extensões de Álgebras obtidas a partir de Álgebras de Hopf

Iniciaremos este artigo apresentando um pouco da teoria de extensões, para então provarmos o principal resultado deste trabalho. Nos preocuparemos aqui em demonstrar apenas os resultados principais desta teoria, e que estão devidamente relacionados com a demonstração do Teorema fundamental deste trabalho.

Definição 1.1 *Dizemos que $B \subset A$ é uma H-extensão à direita se A é um H-comódulo álgebra com $A^{coH} = B$, onde A, B são álgebras e H é uma álgebra de Hopf.*

1.1 Extensões Fielmente Planas

Iniciamos esta seção definindo a estrutura de módulo fielmente plano, para então darmos sequência ao estudo de extensões fielmente planas, para maiores detalhes, indicamos [3].

Definição 1.2 *Seja P um módulo à direita sobre um anel R. Dizemos que P_R é um módulo fielmente plano se satisfaz qualquer uma das condições do teorema abaixo, cuja demonstração pode ser vista em [3].*

Teorema 1.3 *Para qualquer módulo à direita P sobre um anel R, são equivalentes:*

(i) A sequência

$$M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$$

é exata, se, e somente se,

$$P \otimes_R M' \longrightarrow P \otimes_R M \longrightarrow P \otimes_R M''$$

é uma sequência exata;

(ii) P é um módulo plano, e para qualquer R-módulo à esquerda M, $P \otimes_R M = 0$ implica em $M = 0$;

(iii) P é um módulo plano, e o morfismo $\phi : M' \to M''$, na categoria dos R-módulos à esquerda (${}_R\mathfrak{M}$), é nulo se o morfismo induzido $I_P \otimes \overline{\phi} : P \otimes_R M' \to P \otimes_R M''$ é nulo.

Exemplo 1.4 *Todo k-espaço vetorial, k corpo, é um k-módulo fielmente plano.*

Definição 1.5 *Uma extensão $B \subset A$ é dita fielmente plana se A é uma extensão em que A é B-módulo fielmente plano.*

Uma definição equivalente a esta, vista em [3], é dada por:

Definição 1.6 *Uma extensão $B \subset A$, A, B k-álgebras, é dita fielmente plana à esquerda se para qualquer morfismo de B-módulos à direita $f : M \to N$, f é injetora se, e somente se, $f \otimes I_A : M \otimes_B A \to N \otimes_B A$ é injetivo.*

Para mostrarmos a propriedade citada acima, precisamos definir o que chamamos de equalizador de dois morfismos.

Definição 1.7 *Sejam os morfismos $f, g : M \to N$, chamamos de equalizador de f e g o conjunto* $\ker(f, g) = \{m \in M : f(m) = g(m)\}$.

Dizemos que o diagrama do equalizador

$$0 \to L \xrightarrow{h} M \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$$

é exato se $Im(h) = \ker(f, g)$ e h for injetivo.

A partir de agora e no decorrer do todo este artigo, a menos que se diga o contrário, assumimos que k é um anel comutativo com unidade.

Lema 1.8 *Seja A uma k-álgebra k-fielmente plana e M um k-módulo à esquerda. Então a sequência*

$$0 \to M \xrightarrow{\theta} A \otimes M \xrightarrow{\delta} A \otimes A \otimes M$$

é exata, onde $\theta(m) = 1_A \otimes m$ e $\delta(a \otimes m) = a \otimes 1_A \otimes m - 1_A \otimes a \otimes m$.

Demonstração: Como A é k-fielmente plano, basta mostrarmos que a sequência

$$0 \to A \otimes_k M \xrightarrow{I_A \otimes \theta} A \otimes_k A \otimes_k M \xrightarrow{I_A \otimes \delta} A \otimes_k A \otimes_k A \otimes_k M$$

é exata, ou seja, temos de mostrar que $I_A \otimes \theta$ é injetor e também que $Im(I_A \otimes \theta) = \ker(I_A \otimes \delta)$.

Seja $\sum a_i \otimes m_i \in \ker(I_A \otimes \theta)$ então

$$0 = (I_A \otimes \theta)\left(\sum a_i \otimes m_i\right) = \sum a_i \otimes \theta(m_i) = \sum a_i \otimes 1_A \otimes m_i$$

e aplicando o morfismo $\mu \otimes I_M$ temos que

$$0 = \sum a_i \otimes m_i,$$

portanto, $I_A \otimes \theta$ é injetivo.

Vejamos que $Im(I_A \otimes \theta) = \ker(I_A \otimes \delta)$.

Claramente $Im(I_A \otimes \theta) \subset \ker(I_A \otimes \delta)$, pois

$$\begin{aligned}(I_A \otimes \delta) \circ (I_A \otimes \theta) \left(\sum a_i \otimes m_i\right) &= I_A \otimes \delta \left(\sum a_i \otimes 1_A \otimes m_i\right) \\ &= \sum a_i \otimes 1_A \otimes 1_A \otimes m_i - \sum a_i \otimes 1_A \otimes 1_A \otimes m_i = 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, seja $\sum a_i \otimes b_i \otimes m_i \in \ \ker(I_A \otimes \delta)$ então

$$0 = I_A \otimes \delta \left(\sum a_i \otimes b_i \otimes m_i\right) = \sum a_i \otimes b_i \otimes 1_A \otimes m_i - \sum a_i \otimes 1_A \otimes b_i \otimes m_i,$$

logo, $\sum a_i \otimes 1_A \otimes b_i \otimes m_i = \sum a_i \otimes b_i \otimes 1_A \otimes m_i$ e aplicando o morfismo $\mu \otimes I_A \otimes I_M$ temos que

$$\sum a_i \otimes b_i \otimes m_i = \sum a_i b_i \otimes 1_A \otimes m_i = (I_A \otimes \theta) \left(\sum a_i b_i \otimes m_i\right).$$

Assim, $Im(I_A \otimes \varepsilon) = \ker(I_A \otimes \delta)$ e segue que a sequência $0 \to M \xrightarrow{\varepsilon} A \otimes M \xrightarrow{\delta} A \otimes A \otimes M$ é exata por A ser k-fielmente plano.

■

1.2 Extensão Fendida

As extensões fendidas são extensões que possuem uma estrutura trivial, sendo caracterizadas por produtos cruzados. Ao final desta seção veremos um teorema que descreve tal caracterização. Iniciamos o capítulo definindo uma extensão fendida.

Definição 1.9 *Dizemos que uma H-extensão $B \subset A$ é H-fendida (ou H-extensão fendida) se existe um morfismo de H-comódulos à direita $\gamma : H \to A$ que é inversível por convolução, ou seja, se existe $\psi : H \to A$ tal que $\gamma * \psi = \psi * \gamma = \eta \circ \varepsilon$.*

Observe que como $Hom(H, A)$ é uma álgebra com unidade, sabemos que se o inverso de um morfismo ϕ, se existir, é único.

Ainda, se $\psi : A \to A \otimes H$ é um morfismo de álgebras, então

$$\begin{array}{rccl}\psi_* : & Hom(H, A) & \to & Hom(H, A \otimes H) \\ & \phi & \mapsto & \psi_*(\phi) := \psi \circ \phi,\end{array}$$

é um morfismo de álgebras. E segue que $\psi_*(\phi)$ é inversível, se ϕ é inversível.

Note também que o morfismo γ dado acima pode ser normalizado.

De fato, seja $\widehat{\gamma} : H \to A$ como acima tal que $\widehat{\gamma}(1_H) := b$. Notemos que $b \in B$, pois

$$\begin{aligned}\rho(b) &= \rho \circ \widehat{\gamma}(1_H) = (\widehat{\gamma} \otimes I_H) \circ \Delta(1_H) \\ &= \widehat{\gamma}(1_H) \otimes 1_H = b \otimes 1_H.\end{aligned}$$

E mais, b é inversível, pois

$$\begin{aligned}1_A &= \eta \circ \varepsilon(1_H) &&= \widehat{\gamma} * \overline{\widehat{\gamma}}(1_H) \\ &= \widehat{\gamma}(1_H)\overline{\widehat{\gamma}}(1_H) &&= b\overline{\widehat{\gamma}}(1_H).\end{aligned}$$

Chamemos $\overline{\widehat{\gamma}}(1_H) = b^{-1}$, claramente $b^{-1} \in B$, pois

$$\begin{aligned}\rho(b^{-1}) &= (b^{-1}b \otimes 1_H)\rho(b^{-1}) &&= (b^{-1} \otimes 1_H)(b \otimes 1_H)\rho(b^{-1}) \\ &= (b^{-1} \otimes 1_H)\rho(b)\rho(b^{-1}) &&= (b^{-1} \otimes 1_H)\rho(bb^{-1}) \\ &= b^{-1} \otimes 1_H.\end{aligned}$$

Por fim, definamos o morfismo

$$\begin{aligned}\gamma : \ H &\to A \\ h &\mapsto b^{-1}\widehat{\gamma}(h).\end{aligned}$$

É fácil ver que γ é colinear à direita e inversível por produto de convolução, basta definirmos $\overline{\gamma} : H \to A$ por $\overline{\gamma}(h) = (\overline{\widehat{\gamma}}b)(h) := \overline{\widehat{\gamma}}(h)b$. Assim, γ é unital como queríamos.

O próximo teorema mostra que toda extensão fendida é de fato um produto cruzado. Sua demonstração pode ser encontrada em [3].

Teorema 1.10 *Uma extensão $B \subset A$ é H-fendida se, e somente se, $A \simeq B\#_\sigma H$ como álgebras.*

1.3 Extensões de Hopf-Galois

Na teoria de grupos, dizemos que uma extensão algébrica $E \subset F$ $(F\backslash E)$ é galoisiana (extensão de Galois) se $F\backslash E$ é uma extensão normal e separável. Por extensão normal, entendemos que para todo $\alpha \in F$, o polinômio minimal $Irr(\alpha, E)$ tem todas as raízes em F. Por separável, dizemos que para todo $\alpha \in F$, $Irr(\alpha, E)$ tem raízes simples.

Podemos ver tais extensões, de forma mais geral, como ações de grupos sobre anéis comutativos. Essas idéias foram estendidas para coações de álgebras de Hopf agindo sobre uma k-álgebra comutativa, com k um anel comutativo, ao que foram chamadas de extensões de Hopf-Galois por Chase e Sweedler. E generalizadas por Kreimer e Takeuchi no caso de álgebras de Hopf de dimensão finita. Formalmente, sejam H uma álgebra de Hopf, A, B álgebras.

Definição 1.11 *Dizemos que uma H-extensão $B = A^{coH} \subset A$ com $\rho : A \to A \otimes H$ (estrutura de H-comódulo de A), é H-Galois (H-extensão de Hopf-Galois) à direita se o morfismo*

$$can : A \otimes_B A \to A \otimes_k H$$

definido por $can(a \otimes_B b) = (a \otimes 1_H)\rho(b)$ é bijetivo.

Podemos definir também as H-extensões de Hopf-Galois à esquerda, através do morfismo can' dado por

$$\begin{array}{rrcl} can' & A \otimes_B A & \to & A \otimes_k H \\ & a \otimes b & \mapsto & \rho(a)(b \otimes 1_H). \end{array}$$

Se a antípoda, S, é bijetiva, temos o seguinte resultado:

Afirmação: O morfismo can' é bijetivo se, e somente se, o morfismo can é bijetivo.

Seja $\phi \in End(A \otimes H)$ tal que $\phi(a \otimes h) = \rho(a)(1_A \otimes S(h))$ e sua inversa $\phi^{-1} \in End(A \otimes H)$ dada por $\phi^{-1}(a \otimes h) = (1_A \otimes S^{-1}(h))\rho(a)$. Assim, vemos que $\phi \circ can = can'$ e $\phi^{-1} \circ can' = can$.

Portanto, can é bijetiva se, e somente se, can' é bijetiva.

■

Observação 1.12 *Para extensões de Hopf-Galois $B \subset A$, consideraremos para todo $h \in H$, $l_i(h)$, $r_i(h) \in A$, $i \in I$, uma quantidade finita de termos tais que*

$$1_A \otimes h = \sum_i \sum_{(h)} l_i(h) r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)} \in A \otimes H \tag{1}$$

Dizemos que $\sum l_i(h) \otimes r_i(h)$ é unicamente determinada como a imagem inversa de $1_A \otimes h$ pelo isomorfismo can.

Vejamos ainda, que no contexto das extensões algébricas de corpos, as definições de extensão de Galois e extensão de Hopf-Galois se equivalem.

Teorema 1.13 *Seja $F \backslash E$ uma extensão algébrica finita e $G = gal(F \backslash E)$, então $F \backslash E$ é uma extensão galoisiana se, e somente se, $E \subset F$ é uma $(EG)^*$-extensão de Hopf Galois.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Tome $G = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ e sejam $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ uma E-base de F, $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ a base dual de $(EG)^*$ e uma coação dada por

$$\begin{array}{rccl} \rho: & F & \to & F \otimes_E (EG)^* \\ & a & \mapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \triangleright a) \otimes p_i. \end{array}$$

Afirmação: $E = F^{co((EG)^*)}$

De fato, seja $a \in E$, então

$$\rho(a) = \sum a \otimes p_i = a \otimes \sum p_i = a \otimes 1_{(EG)^*}.$$

Por outro lado, seja $b \in F^{co((EG)^*)}$, logo, $\rho(b) = b \otimes 1_{(EG)^*}$, assim,

$$x_i \triangleright b = \sum b^{(0)} < \delta_{x_i}, b^{(1)} >= b \Rightarrow b \in E.$$

Portanto, $E = F^{co((EG)^*)}$.

Definimos:

$$\begin{array}{rccl} can: & F \otimes_E F & \to & F \otimes_E (EG)^* \\ & a \otimes b & \mapsto & (a \otimes 1_{(EG)^*})\rho(b) := \sum a(x_i \triangleright b) \otimes p_i. \end{array}$$

Mostremos que can é injetivo. Seja $w = \sum a_j \otimes b_j \in \ker(can)$, então

$$0 = can(w) = can(\sum a_j \otimes b_j) = \sum a_j(x_i \triangleright b_j) \otimes p_i$$

em que $\{b_j\}$ é base de $F \backslash E$. Como $\{p_i\}$ é base de $(EG)^*$, concluímos que $\sum a_j(x_i \triangleright b_j) = 0$, para todo i, assim, $a_j = 0$, pelo Lema de Dedekind (ver Lema **??**) e o fato de $A = (x_i \triangleright b_j)_{i,j}$ ser uma matriz inversível e portanto, $w = \sum a_j \otimes b_j = 0$.

Como $dim(F \otimes_E F) = n^2 = dim(F \otimes (EG)^*)$, segue que can é sobrejetiva, e portanto, bijetiva.

($\Leftarrow$) Sabemos que $dim(F \otimes_E F) = [F : E]^2$ e também que $dim(F \otimes (EG)^*) = |G|[E : F]$. Logo, como

$$dim(F \otimes_E F) = dim(F \otimes (EG)^*),$$

temos que $[F : E] = |G|$ e portanto, $F \backslash E$ é uma extensão galoisiana.

■

No próximo exemplo, caracterizamos os anéis graduados como extensões de Hopf-

Galois. Antes de enunciá-lo, lembramos que uma álgebra A ser fortemente graduada é o mesmo que dizermos $A_x \cdot A_y = A_{xy}$, para todo $x,\ y \in G$.

Exemplo 1.14 *Sejam G um grupo e A uma álgebra G-graduada, ou seja, A é um kG-comódulo álgebra via $\rho : A \to A \otimes kG$, dada por $\rho(a) = \sum\limits_{x\in G} a_x \otimes x$, em que $a = \sum\limits_{x\in G} a_x \in \bigoplus\limits_{x\in G} A_x$. Ainda, como $H = kG$, segue que $A^{coH} = A_e$.*

Então $A_e \subset A$ é kG-extensão de Hopf-Galois se, e somente se, A é fortemente graduada.

Vejamos agora um lema que nos dá algumas propriedades sobre a inversa do morfismo can, com base no que foi definido na Observação 1.12.

Lema 1.15 *Seja $B \subset A$ uma H-extensão de Hopf-Galois. Escrevendo $can^{-1}(1_A \otimes h) = \sum l_i(h) \otimes r_i(h)$ como na Observação 1.12. Então, para todo $h \in H$ e $a \in A$, temos:*

(i) $\sum a^{(0)} l_i(a^{(1)}) \otimes r_i(a^{(1)}) = 1_A \otimes a$;

(ii) $\sum l_i(h) r_i(h) = \varepsilon(h) 1_A$;

(iii) $\sum l_i(h) \otimes r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)} = \sum l_i(h_{(1)}) \otimes r_i(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}$

Demonstração: (i) Seja $a \in A$, então

$$\begin{aligned}
1_A \otimes a &= can^{-1} \circ can(1_A \otimes a)\\
&= can^{-1}\left(\sum a^{(0)} \otimes a^{(1)}\right)\\
&\overset{(*)}{=} \sum a^{(0)} can^{-1}(1_A \otimes a^{(1)})\\
&= \sum a^{(0)} l_i(a^{(1)}) \otimes r_i(a^{(1)}).
\end{aligned}$$

Notemos que $(*)$ é válido pois can^{-1} é um morfismo de A-módulos à esquerda.

(ii) Seja $h \in H$, logo, temos

$$\begin{aligned}
\varepsilon(h)1_A &= \mu(I_A \otimes \varepsilon)(1_A \otimes h)\\
&= \mu(I_A \otimes \varepsilon) can \circ can^{-1}(1_A \otimes h)\\
&= \mu(I_A \otimes \varepsilon)\left(\sum l_i(h) r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)}\right)\\
&= \sum l_i(h) r_i(h)^{(0)} \varepsilon(r_i(h)^{(1)})\\
&= \sum l_i(h) r_i(h).
\end{aligned}$$

(iii) Para mostrarmos (iii), consideramos o morfismo $can \otimes I_H$ e aplicamo-lo dos dois lados da equação, então

$$
\begin{aligned}
&(can \otimes I_H)\left(\sum l_i(h) \otimes r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)}\right) = \\
&= \sum l_i(h) r_i(h)^{(0)(0)} \otimes r_i(h)^{(0)(1)} \otimes r_i(h)^{(1)} \\
&= \sum l_i(h) r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)} \otimes r_i(h)^{(2)} \\
&= (I_A \otimes \Delta)\left(\sum l_i(h) r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)}\right) \\
&= (I_A \otimes \Delta)(1_A \otimes h) \\
&= 1_A \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}.
\end{aligned}
$$

Pelo outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
&(can \otimes I_H)\left(\sum l_i(h_{(1)}) \otimes r_i(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}\right) = \\
&= \sum l_i(h_{(1)}) r_i(h_{(1)})^{(0)} \otimes r_i(h_{(1)})^{(1)} \otimes h_{(2)} \\
&= 1_A \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}.
\end{aligned}
$$

O que mostra a igualdade (iii).

■

Finalizamos essa seção com um lema que caracteriza uma extensão de Hopf-Galois a partir de certas propriedades dadas. Para sua demonstração, entretanto, precisamos antes provar que existe um isomorfismo $\phi : \ker(\mu) \to A \otimes_C A/C$, em que A é um H-comódulo álgebra à direita e C uma subálgebra de A^{coH}.

De fato, consideremos a sequência exata

$$0 \to C \overset{i}{\hookrightarrow} A \overset{\pi}{\to} A/C \to 0.$$

Tensorizando em A sobre C, temos a seguinte sequência exata,

$$A \otimes_C C \overset{I_A \otimes i}{\hookrightarrow} A \otimes_C A \overset{I_A \otimes \pi}{\to} A \otimes_C A/C \to 0.$$

Notemos que mesma cinde, de fato, se considerarmos o morfismo $\Lambda : A \to A \otimes_C C$, definido por $\Lambda(a) = a \otimes 1_C$ então $\Lambda \circ \mu$ é um morfismo de $A \otimes_C A \to A \otimes_C C$ tal que $\Lambda \circ \mu \circ (I_A \otimes i) = I_{A \otimes_C C}$, ainda, vemos que $I_A \otimes i$ é injetora, pois como

$$(\Lambda \circ \mu) \circ (I_A \otimes i) = I_A \otimes_C e,$$

temos que $\Lambda \circ \mu$ é epimorfismo e $I_A \otimes i$ é monomorfismo, e que

$$0 \to A \otimes_C C \to A \otimes_C A \to A \otimes_C A/C \to 0$$

é exata e cindida.

Assim, como a sequência cinde, existe $Q \subset A \otimes_C A$ tal que $A \otimes_C A = Im(I_A \otimes i) \oplus Q$ e deduzimos que $Q = \ker(\Lambda \circ \mu)$. Se provarmos que Λ é injetora, obtemos que $Q = \ker(\mu)$, mas, temos a aplicação k-linear

$$
\begin{array}{rccc}
p: & A \otimes_C C & \rightarrow & A \\
 & a \otimes c & \mapsto & ac,
\end{array}
$$

e como $p \circ \Lambda = I_A$, temos que Λ é injetora.

Lema 1.16 *Sejam A um H-comódulo álgebra à direita e C uma subálgebra de A^{coH} tal que*

$$
\begin{array}{rccc}
\psi: & A \otimes_C A & \rightarrow & A \otimes H \\
 & a \otimes b & \mapsto & \sum ab^{(0)} \otimes b^{(1)}
\end{array}
$$

é bijetivo e exista $s : A \rightarrow C$ homomorfismo unital e C-linear à direita. Então $C = A^{coH}$ e A é uma extensão H-Galois de C.

Demonstração: Claramente $C \subseteq A^{coH}$. Mostremos que $A^{coH} \subseteq C$.

Notamos primeiramente que dado $x \in A^{coH}$, temos,

$$
\begin{array}{rclcl}
1_A \otimes x & = & \psi^{-1}(\psi(1_A \otimes x)) & = & \sum \psi^{-1}(x^{(0)} \otimes x^{(1)}) \\
 & = & \psi^{-1}(x \otimes 1_H) & = & \psi^{-1}(\psi(x \otimes 1_A)) = x \otimes 1_A.
\end{array}
$$

Então, como existe o isomorfismo $\phi : \ker(\mu) \rightarrow A \otimes_C A/C$ dado por $\phi(\sum a_i \otimes b_i) = \sum a_i \otimes [b_i]_C$. Temos que, em particular, ϕ leva $1_A \otimes x - x \otimes 1_A$ em $1_A \otimes [x]_C$, daí, aplicando o morfismo $\mu \circ (s \otimes I)$ em $1_A \otimes [x]_C$, temos que $0 = \mu \circ (s \otimes I_{A/C})(1_A \otimes [x]_C) = [x]_C$, ou seja, $x \in C$ como queríamos.

■

1.4 Extensões Fendidas e a Propriedade da Base Normal

Um teorema clássico da teoria de Galois diz que se $F \backslash E$ é uma extensão de Galois finita de corpos, e G é o grupo de Galois associado, então $F \backslash E$ tem uma base normal, isto é, existe $a \in F$ tal que o conjunto $\{x \triangleright a : x \in G\}$ é uma base para F sobre E (vide [?]). Assim como na seção anterior, estenderemos essa noção para H-extensões de Galois.

Definição 1.17 *Seja $B \subset A$ uma H-extensão à direita. Dizemos que ela tem a propriedade da base normal se $A \simeq B \otimes H$ como B-módulo à esquerda e H-comódulo à direita.*

O exemplo abaixo nos mostra que a definição de base normal para extensões de Hopf-Galois é equivalente a definição clássica de base normal para extensões de Galois, quando a álgebra de Hopf H tem dimensão finita.

Exemplo 1.18 *Sejam H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, $dimH = n$, e $B \subset A$ uma H-extensão. Consideremos H^* agindo sobre A, com $A^{H^*} = B$.*

Suponhamos que A tenha uma base normal no sentido usual. Isto é, existe $u \in A$ e $\{f_i\} \subset H^*$ tais que $\{f_1 \triangleright u, f_2 \triangleright u, \cdots, f_n \triangleright u\}$ é uma base para o B-módulo livre à esquerda A.

Lembramos que, se $0 \neq t \in \int_H^l$ então $H \simeq H^* \rightharpoonup t$, isto é,

$$\begin{array}{rccc} \psi: & H^* & \to & H \\ & f & \mapsto & (f \rightharpoonup t). \end{array}$$

é isomorfismo de H^*-módulo à esquerda. E portanto, definimos

$$\begin{array}{rccc} \phi: & B \otimes H & \to & A \\ & b \otimes (f \rightharpoonup t) & \mapsto & b(f \triangleright u). \end{array}$$

Como $B \otimes H$ é um H^*-módulo à esquerda com ação dada por $f \cdot (b \otimes h) = b \otimes (f \rightharpoonup h)$, segue pela dualidade, que $B \otimes H$ tem estrutura de H-comódulo à direita, com coação dada por $(I \otimes \Delta)$.

Além disso, o morfismo ϕ dado acima é um morfismo de H^*-módulo à esquerda e portanto, morfismo de H-comódulo à direita, e claramente, ϕ é isomorfismo de B-módulo à esquerda.

Por outro lado, consideremos $A \simeq B \otimes H$. Seja $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ uma k-base para H^*, então

$$\{1_B \otimes (f_1 \rightharpoonup t), 1_B \otimes (f_2 \rightharpoonup t), \cdots, 1_B \otimes (f_n \rightharpoonup t)\}$$

é uma B-base para $B \otimes H$.

Daí, via $\phi : B \otimes H \overset{\simeq}{\to} A$, segue que

$$\{f_1 \triangleright u, f_2 \triangleright u, \cdots, f_n \triangleright u\}$$

é base de A, em que $u = \phi(1_B \otimes t)$.

O próximo exemplo, na verdade um contra-exemplo, evidencia que nem toda extensão de Hopf-Galois tem a propriedade da base normal.

Exemplo 1.19 *Seja $A = M_3(k)$. A é $\mathbb{Z}_2$-graduado pelos conjuntos*

$$A_{\overline{0}} = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad e \quad A_{\overline{1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix}.$$

É fácil vermos que A é fortemente graduado, logo, pelo Exemplo 1.14, $A_{\overline{0}} \subset A$ é uma extensão de Hopf-Galois. Porém, $A \not\simeq A_{\overline{0}} \otimes k\mathbb{Z}_2$, pois $dim(A) = 9 \neq 10 = (dim A_{\overline{0}} \otimes k\mathbb{Z}_2)$.

Para finalizarmos essa seção, relacionamos as extensões fendidas com as extensões de Hopf-Galois que possuem a propriedade da base normal através do seguinte teorema, e mostramos algumas aplicações.

Teorema 1.20 *Seja $B \subset A$ uma H-extensão, então são equivalentes:*

(i) *$B \subset A$ é H-fendida;*

(ii) *$B \subset A$ é H-extensão de Hopf-Galois e tem a propriedade da base normal.*

O corolário a seguir relaciona as extensões de Hopf-Galois que possuem a propriedade da base normal com o produto cruzado de B com H. A demonstração segue do teorema acima e do Teorema 1.10.

Corolário 1.21 *Seja $B \subset A$ uma H-extensão à direita. Então $B \subset A$ é H-extensão de Hopf-Galois com a propriedade da base normal se, e somente se, $A \simeq B\#_\sigma H$.*

A partir deste corolário, vemos que dada uma extensão de Hopf-Galois fendida, conseguimos determinar o cociclo e a ação do cociclo, que definem a estrutura de produto cruzado, através das fórmulas:

$$\sigma_\gamma(h \otimes l) := \sum \gamma(h_{(1)})\gamma(l_{(1)})\overline{\gamma}(h_{(2)}l_{(2)});$$

$$h \triangleright_\gamma b := \sum \gamma(h_{(1)})b\overline{\gamma}(h_{(2)}),$$

em que $h,\ l \in H$, $b \in B = A^{coH}$ e $\gamma : H \to A$ é um morfismo fenda.

Por outro lado, com a ajuda de γ, podemos construir um morfismo de B-módulos à esquerda, unital, que nos permite calcular o cociclo σ_γ de maneira mais simples que a dada acima. A saber, definimos

$$\begin{array}{rccl} s_\gamma & A & \to & B \\ & a & \mapsto & \mu \circ (I_A \otimes \overline{\gamma}) \circ \rho(a). \end{array}$$

Lema 1.22 *Seja A uma H-extensão Hopf-Galois fendida. Então o cociclo σ_γ é dado por*

$$\sigma_\gamma = s_\gamma \circ \mu \circ (\gamma \otimes \gamma),$$

em que γ é um morfismo fenda.

Demonstração: Sejam $h,\ l \in H$, então,

$$\begin{aligned}
s_\gamma \circ \mu \circ (\gamma \otimes \gamma)(h \otimes l) &= s_\gamma(\gamma(h)\gamma(l)) \\
&= \mu \circ (I_A \otimes \overline{\gamma})\rho(\gamma(h))\rho(\gamma(l)) \\
&= \mu \circ (I_A \otimes \overline{\gamma})((\gamma \otimes I_H) \circ \Delta(h))((\gamma \otimes I_H) \circ \Delta(l)) \\
&= \mu \circ (I_A \otimes \overline{\gamma})(\gamma(h_{(1)})\gamma(l_{(1)}) \otimes h_{(2)}l_{(2)}) \\
&= \mu((\gamma(h_{(1)})\gamma(l_{(1)}) \otimes \overline{\gamma}(h_{(2)}l_{(2)}))) = \sigma_\gamma(h \otimes l).
\end{aligned}$$

■

Salientamos ainda que, com a ajuda do morfismo translação $\tau : H \to A \otimes_B A$ definido por $\tau(h) := can^{-1}(1 \otimes h) = \sum l_i(h) \otimes r_i(h)$, podemos calcular o morfismo $\gamma : H \to A$. A saber,

$$\begin{aligned}
\mu \circ (I_A \otimes s_\gamma) \circ \tau(h) &= l_i(h)s_\gamma(r_i(h)) \\
&= l_i(h)(r_i(h))^{(0)}\overline{\gamma}((r_i(h))^{(1)}) \\
&= (\mu \circ (I_A \otimes \overline{\gamma}) \circ can)(\textstyle\sum l_i(h) \otimes r_i(h)) \\
&= (\mu \circ (I_A \otimes \overline{\gamma}) \circ can)(can^{-1}(1 \otimes h)) = \overline{\gamma}(h).
\end{aligned}$$

E portanto, $\gamma = \overline{(\mu \circ (I_A \otimes s_\gamma) \circ \tau)}$.

2 Uma biálgebra que admite extensão de Hopf-Galois é uma álgebra de Hopf

Nesta sessão, veremos como as extensões definidas anteriormente influem na construção de álgebras de Hopf, desde que as consideremos definidas sobre biálgebras. Nosso objetivo é construir um morfismo S, chamado de antípoda, que é o inverso por produto de convolução do morfismo identidade.

Lembramos que, dado um morfismo inversível por convolução $\psi : H \to A$, com inversa $\overline{\psi}$, e um morfismo de álgebras $\phi : A \to A \otimes H$, a composta $\phi \circ \psi$ é inversível por produto de convolução, com inversa $\phi \circ \overline{\psi}$.

Os próximos dois resultados começam a dar base para a construção do morfismo

S. Neles, relacionamos a noção de extensão, ou seja, o fato de A ser um H-comódulo álgebra, com a noção de integral total, ou seja, a existência de um morfismo $\phi : H \to A$ de H-comódulo à direita, ou seja, $\rho_A \circ \phi = (\phi \otimes I_H) \circ \Delta$. Notamos que a noção de Integral é diferente do morfismo fenda, uma vez que o morfismo ϕ não é necessariamente inversível por produto de convolução.

Lembramos que de agora, e até o final deste trabalho, consideramos H uma k-biálgebra.

Lema 2.1 *Seja $\phi : H \to A$ um morfismo de k-módulo. Se ϕ é uma integral total sobre H então $\rho_A \circ \phi = (i_1 \circ \phi) * \eta_0$, em que:*

$$\begin{array}{rccc} i_1 : & A & \to & A \otimes H \\ & a & \mapsto & a \otimes 1_H \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} \eta_0 : & H & \to & A \otimes H \\ & h & \mapsto & 1_A \otimes h. \end{array}$$

Demonstração: Como ϕ é uma integral total sobre H, sabemos que $\rho_A \circ \phi = (\phi \otimes I_H) \circ \triangle_H$, logo

$$\begin{aligned} \rho_A \circ \phi(h) &= (\phi \otimes I_H) \circ \triangle_H(h) \\ &= \sum \phi(h_1) \otimes h_2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (i_1 \circ \phi) * \eta_0(h) &= \mu \left(\sum (i_1 \circ \phi(h_1)) \otimes \eta_0(h_2)\right) \\ &= \sum \mu((\phi(h_1) \otimes 1_H) \otimes (1_A \otimes h_2)) \\ &= \sum \phi(h_1) \otimes h_2. \end{aligned}$$

E portanto, vale a igualdade.

■

Proposição 2.2 *Seja $\phi : H \to A$ um morfismo de k-módulos, tal que ϕ é uma integral total inversível por convolução sobre H, ou seja, um morfismo fenda, então:*

(i) *O morfismo η_0 dado acima é inversível por convolução;*

(ii) *Se existe um morfismo de álgebras $\alpha : A \to k$, então I_H é inversível por convolução.*

Demonstração: (i) Vimos acima que $\rho_A \circ \phi = (i_1 \circ \phi) * \eta_0$. Como ϕ é inversível por convolução e ρ_A e i_1 são morfismos de álgebra, temos que $\rho_A \circ \phi$ e $i_1 \circ \phi$ são inversíveis por convolução e segue que η_0 é inversível por convolução.

(ii) Notemos que $(\alpha \otimes I_H) \circ \eta_0 = I_H$, logo, I_H é invertível por convolução usando (i).

■

Um resultado imediato que tiramos da proposição acima é que se H é uma extensão fendida sobre H, então H é uma álgebra de Hopf, pois $H^{coH} = k$ neste caso.

O próximo corolário é um caso particular do principal resultado desse trabalho, o Teorema 2.5, provado mais adiante. Nele consideramos que a extensão dada é fendida, o que é um resultado mais forte do que trabalharmos com extensões de Hopf-Galois, como observamos no Teorema 1.20, Seção 1.4.

Corolário 2.3 *Se A é H-fendida e k-fielmente plana, então H é uma álgebra de Hopf.*

Os próximos resultados, assim como o último lema deste capítulo, dão os passos finais para a demonstração do teorema. O primeiro trata de algumas propriedades de extensões de Hopf-Galois não tratadas no Capítulo 2. O último, mais técnico por exigir apenas a condição de coálgebra ao invés da habitual k-biálgebra que estamos considerando neste capítulo, estabelece uma propriedade importante sobre k-álgebras fielmente planas, justificando o porquê desta condição aparecer como hipótese do teorema.

Proposição 2.4 *Sejam H uma k-biálgebra, E uma k-álgebra, $B \subset A$ uma H-extensão de Hopf-Galois e $\alpha : A \to E$ um morfismo de álgebra, onde E é um A-bimódulo com estrutura dada por:*

$$a \cdot x = \alpha(a)x \quad \text{e} \quad x \cdot a = x\alpha(a), \text{ para todo } a \in A, \text{ e todo } x \in E.$$

Então aplicando o funtor $Hom_{B^-}(-, E)$, em que B^- é uma notação para B-módulo à esquerda, em $can : A \otimes_B A \to A \otimes H$ temos que

$$\begin{array}{rccc} \omega : & Hom_{B^-}(A \otimes H, E) & \to & Hom_{B^-}(A \otimes_B A, E) \\ & f & \mapsto & f \circ can, \end{array}$$

é um isomorfismo de k-módulos à esquerda. E também, temos que

$$\begin{array}{rccc} \pi : & Hom(H, E) & \to & Hom_{B^-}(A, E) \\ & f & \mapsto & \pi(f), \end{array}$$

em que $\pi(f)(a) = \sum \alpha(a^{(0)})f(a^{(1)})$, é um isomorfismo de B-bimódulos.

Demonstração: Mostraremos primeiro que ω é um isomorfismo de k-módulos, demonstrando a injetividade e a sobrejetividade. Notemos que ω é claramente um morfismo de k-módulos.

Seja $f \in \ker(\omega)$ então

$$0 = \omega(f)\left(\sum a_i \otimes b_i\right) \text{ para todo } \sum a_i \otimes b_i \in A \otimes_B A.$$

Vejamos que $f \equiv 0$.

De fato, para todo $\sum a_i \otimes h_i \in A \otimes H$,

$$\begin{aligned} f\left(\sum a_i \otimes h_i\right) &= f \circ (can \circ can^{-1})\left(\sum a_i \otimes h_i\right) \\ &= f \circ can(can^{-1}\left(\sum a_i \otimes h_i\right)) \\ &= \omega(f)(can^{-1}\left(\sum a_i \otimes h_i\right)) = 0. \end{aligned}$$

Seja agora $\psi \in Hom_{B-}(A \otimes_B A, E)$. Definamos o morfismo $\gamma := \psi \circ can^{-1} \in Hom(A \otimes H, E)$. Daí

$$\omega(\gamma) = \omega(\psi \circ can^{-1}) = (\psi \circ can^{-1}) \circ can = \psi \circ (can^{-1} \circ can) = \psi$$

como queríamos.

Por fim π é um isomorfismo de B-bimódulos. Para tanto, consideramos as estruturas de B-bimódulo em $Hom(H, E)$ e $Hom_{B-}(A, E)$ dadas por $(b_1 f b_2)(h) = b_1 \cdot (f(h)) \cdot b_2$ e $(b_1 f' b_2)(a) = f'(ab_1) \cdot b_2$ respectivamente, para todo $b_1, b_2 \in B$, $a \in A$, $h \in H$, $f \in Hom(H, E)$ e todo $f' \in Hom_{B-}(A, E)$.

Notemos que π está bem definida pois

$$\begin{aligned} \pi(f)(ba) &= \sum \alpha((ba)^{(0)}) f((ba)^{(1)}) \\ &= \sum \alpha(b^{(0)})\alpha(a^{(0)}) f(b^{(1)}a^{(1)}) \\ &= \alpha(b)(\sum \alpha(a^{(0)}) f(a^{(1)})) \\ &= b \cdot \pi(f)(a), \end{aligned}$$

para todo $f \in Hom(H, E)$, $a \in A$ e $b \in B = A^{coH}$.

E π é um morfismo de B-bimódulos, pois

$$\begin{aligned} \pi(b_1 \cdot f \cdot b_2)(a) &= \alpha(\sum a^{(0)})(b_1 \cdot f \cdot b_2)(a^{(1)}) \\ &= \sum \alpha(a^{(0)})\alpha(b_1) f(a^{(1)})\alpha(b_2) \\ &= \sum \alpha(a^{(0)} b_1^{(0)}) f(a^{(1)} b_1^{(1)})\alpha(b_2) \\ &= \pi(f)(ab_1) \cdot b_2 \\ &= b_1 \cdot \pi(f) \cdot b_2(a), \end{aligned}$$

para todo $f \in Hom(H,E)$, $a \in A$ e b_1, $b_2 \in B$.

Ainda, seja $f \in \ker(\pi)$ então $0 = \pi(f)(a) = \sum \alpha(a^{(0)})f(a^{(1)})$ e

$$\begin{aligned}
f(h) &= \alpha(1_A)f(h) \\
&= \mu(\alpha \otimes f)(1_A \otimes h) \\
&= \mu(\alpha \otimes f)can \circ can^{-1}(1_A \otimes h) \\
&= \mu(\alpha \otimes f)\sum l_i(h)r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)} \\
&= \sum \alpha(l_i(h)r_i(h)^{(0)})f(r_i(h)^{(1)}) \\
&= \sum \alpha(l_i(h))\alpha(r_i(h)^{(0)})f(r_i(h)^{(1)}) \\
&= \alpha(l_i(h))\pi(f)(r_i(h)) = 0,
\end{aligned}$$

para todo $h \in H$, em que $\sum l_i(h) \otimes r_i(h) = can^{-1}(1_A \otimes h)$ dada na Observação 1.12, o que implica $1_A \otimes h = \sum l_i(h)r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)}$.

Por fim, seja $F \in Hom_{B-}(A,E)$, definamos $\widetilde{F} : A \otimes A \to E$ dada por $\widetilde{F}(a \otimes b) = \sum a \cdot F(b)$. Como $\widetilde{F} \in Hom_{B^-}(A \otimes A, E)$ então existe $\widehat{F} \in Hom_{B^-}(A \otimes H, E)$ tal que $\widehat{F} \circ can = \widetilde{F}$.

Assim, defina $f : H \to E$ tal que $f(h) = \widehat{F}(1_A \otimes h)$, daí

$$\begin{aligned}
\pi(f)(a) &= \sum \alpha(a^{(0)}) \cdot f(a^{(1)}) \\
&= \widehat{F}(\sum a^{(0)} \otimes a^{(1)}) \\
&= \widetilde{F}(1_A \otimes a) \\
&= F(a).
\end{aligned}$$

Portanto π é um isomorfismo de B-bimódulos como queríamos.

■

Teorema 2.5 *Seja H uma k-biálgebra e A uma extensão H-Galois à direita de $B = A^{coH}$ tal que A é k-fielmente plano sobre k. Então H é uma álgebra de Hopf.*

Demonstração: Queremos ver se existe $S : H \to H$ inversa por convolução de I_H. Para tanto, consideremos

$$\begin{array}{rccc}
\widehat{S}: & H & \to & A \otimes H \\
& h & \mapsto & \sum l_i(h)^{(0)}r_i(h) \otimes l_i(h)^{(1)}.
\end{array}$$

Mostremos que o morfismo η_0 dado por $\eta_0(h) = 1_A \otimes h$ visto no Lema 2.1 é o inverso por convolução de $\widehat{S}$. Ou seja, temos de ver que:

(a) $\sum l_i(h_{(1)})^{(0)}r_i(h_{(1)}) \otimes l_i(h_{(1)})^{(1)}h_{(2)} = \varepsilon(h)1_A \otimes 1_H$.

(b) $\sum l_i(h_{(2)})^{(0)}r_i(h_{(2)}) \otimes h_{(1)}l_i(h_{(2)})^{(1)} = \varepsilon(h)1_A \otimes 1_H$.

Para (a) usamos o Lema 1.15, itens (ii) e (iii), ou seja, as equações

$$\sum l_i(h)r_i(h) = \varepsilon(h)1_A$$

e

$$\sum l_i(h) \otimes r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)} = \sum l_i(h_{(1)}) \otimes r_i(h_{(1)}) \otimes h_{(2)},$$

respecivamente, juntamente com a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \psi: & A \otimes A \otimes H & \to & A \otimes H \\ & x \otimes y \otimes h & \mapsto & \sum x^{(0)} y \otimes x^{(1)} h. \end{array}$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} \sum l_i(h_{(1)})^{(0)} r_i(h_{(1)}) \otimes l_i(h_{(1)})^{(1)} h_{(2)} & = & \psi\left(\sum l_i(h_{(1)}) \otimes r_i(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}\right) \\ & \overset{\text{(iii)}}{=} & \psi\left(\sum l_i(h) \otimes r_i(h)^{(0)} \otimes r_i(h)^{(1)}\right) \\ & = & \sum l_i(h)^{(0)} r_i(h)^{(0)} \otimes l_i(h)^{(1)} r_i(h)^{(1)} \\ & = & \rho(\sum l_i(h) r_i(h)) \\ & \overset{\text{(ii)}}{=} & \rho(\varepsilon(h)1_A) \\ & = & \varepsilon(h)1_A \otimes 1_H. \end{array}$$

Para (b) usamos a Proposição 2.4, considerando $E = A \otimes H$, juntamente com o morfismo

$$\begin{array}{rccc} can': & A \otimes A & \to & A \otimes H \\ & x \otimes y & \mapsto & \sum x^{(0)} y \otimes x^{(1)}, \end{array}$$

e a equação (i) do Lema 1.15, ou seja, $\sum a^{(0)} l_i(a^{(1)}) \otimes r_i(a^{(1)}) = 1_A \otimes a$.

Definamos

$$\begin{array}{rccc} f: & H & \to & A \otimes H \\ & h & \mapsto & \sum l_i(h_{(2)})^{(0)} r_i(h_{(2)}) \otimes h_{(1)} l_i(h_{(2)})^{(1)} \end{array}$$

e ainda $g: H \to A \otimes H$ por $g(h) = \varepsilon(h)1_A \otimes 1_H$. Vejamos que para todo $a \in A$, $\pi(f)(a) = \pi(g)(a)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\pi(f)(a) &= \sum a^{(0)} f(a^{(1)}) \\
&= \sum a^{(0)} l_i(a^{(1)}_{(2)})^{(0)} r_i(a^{(1)}_{(2)}) \otimes a^{(1)}_{(1)} l_i(a^{(1)}_{(2)})^{(1)} \\
&= \sum a^{(0)} l_i(a^{(2)})^{(0)} r_i(a^{(2)}) \otimes a^{(1)} l_i(a^{(2)})^{(1)} \\
&= \sum (a^{(0)} l_i(a^{(1)}))^{(0)} r_i(a^{(1)}) \otimes (a^{(0)} l_i(a^{(1)}))^{(1)} \\
&\overset{(*)}{=} a \otimes 1_H,
\end{aligned}
$$

notemos que $(*)$ é verdadeira desde que apliquemos o morfismo can' em (i) do Lema 1.15 pois

$$
\begin{aligned}
a \otimes 1_H &= can'(1_A \otimes a) = can' \left(\sum a^{(0)} l_i(a^{(1)}) \otimes r_i(a^{(1)}) \right) \\
&= \sum (a^{(0)} l_i(a_{(1)}))^{(0)} r_i(a_{(1)}) \otimes (a^{(0)} l_i(a_{(1)}))^{(1)}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$\pi(g)(a) = \sum a^{(0)} g(a^{(1)}) = \sum a^{(0)} \varepsilon(a^{(1)}) 1_A \otimes 1_H = a \otimes 1_H.$$

Assim, $\pi(f)(a) = \pi(g)(a)$ para todo $a \in A$, como queríamos e segue que $f = g$ pois π é um morfismo injetor.

Portanto $\widehat{S} * \eta_0 = \eta_{A\otimes H} \circ \varepsilon_H = \eta_0 * \widehat{S}$, onde $\eta_{A\otimes H}$ é a unidade em $A \otimes H$. Logo, aplicando o Lema 2.6, temos que $I_H : H \to H$ é inversível por convolução, e portanto sua inversa, S, será o que entendemos por antípoda da álgebra de Hopf, o que nos diz que H é uma álgebra de Hopf.

■

Lema 2.6 *Seja C uma k-coálgebra, H uma k-álgebra e um morfismo de k-módulos $f : C \to H$. Se existe uma k-álgebra k-fielmente plana A tal que*

$$
\begin{aligned}
\widehat{f} : \; C &\to A \otimes H \\
c &\mapsto 1_A \otimes f(c).
\end{aligned}
$$

é inversível por convolução, então f também é inversível por convolução.

Demonstração: A idéia da demonstração é encontrarmos um morfismo $g : C \to H$ tal que $f * g = \eta_H \circ \varepsilon_C = g * f$.

Para tanto, como H pode ser visto como um k-módulo, usaremos o Lema 1.8 que nos diz que

$$0 \to H \overset{\eta_0}{\to} A \otimes H \underset{\eta_2}{\overset{\eta_1}{\rightrightarrows}} A \otimes A \otimes H$$

é exata. Ou seja, H é um equalizador de η_1 e η_2, onde $\eta_0(h) = 1_A \otimes h$, $\eta_1(a \otimes h) = a \otimes 1_A \otimes h$

e $\eta_2(a \otimes h) = 1_A \otimes a \otimes h$.

Sendo $\widehat{g}$ a inversa por convolução de $\widehat{f}$, notamos que $\eta_1 \circ \widehat{g}$ é inversa de $\eta_1 \circ \widehat{f}$ e que $\eta_2 \circ \widehat{g}$ é inversa de $\eta_2 \circ \widehat{f}$ pelo Lema **??**, e que $\eta_1 \circ \widehat{f} = \eta_2 \circ \widehat{f}$ o que implica $\eta_1 \circ \widehat{g} = \eta_2 \circ \widehat{g}$ pela unicidade da inversa.

Daí, pela propriedade universal do equalizador, existe único $g : C \to H$ tal que $\widehat{g} = \eta_0 \circ g$. Mostremos que g é inversa por convolução de f. Notamos primeiro que

$$\begin{aligned}
\varepsilon(c)1_A \otimes 1_H &= \widehat{g} * \widehat{f}(c) \\
&= \mu\left(\sum \widehat{g}(c_{(1)}) \otimes \widehat{f}(c_{(2)})\right) \\
&= \sum \mu((1_A \otimes g(c_{(1)})) \otimes (1_A \otimes f(c_{(2)}))) \\
&= \sum 1_A \otimes g(c_{(1)}) f(c_{(2)}).
\end{aligned}$$

O que implica em $\eta_0(\varepsilon(c)1_H) = \eta_0\left(\sum g(c_{(1)}) f(c_{(2)})\right)$ e como η_0 é injetivo, segue que g é inversa por convolução à esquerda de f. Analogamente, obtemos o resultado à direita e portanto, g é inverso por convolução de f.

■

Referências

[1] DASCALESCU, S., NASTASESCU, C., RAIANU, S. "Hopf Algebras: An Introduction", Marcel Dekker Inc. (2001).

[2] DOI, Y., TAKEUCHI, M. "Cleft comodule algebras for a bialgebra". Comm. in Algebra 14 (1986), 801-817.

[3] LAM, T.Y.: "Lectures on Modules and Rings". Springer-Verlag, 1998.

[4] MONTGOMERY, S. "Hopf algebras and Their Actions on Rings", AMS (1993).

[5] SCHAUENBURG, P. "A bialgebra that admits a Hopf-Galois algebra extension is a Hopf algebra". Proceedings of the American Mathematical Society 125, number 1 (1997), 83-85.

[6] SCHNEIDER, H.J.: "Normal Basis and Transitivity of Crossed Product for Hopf Algebras". J. Alg. 152 (2), 289-312 (1992).