CONTEXTO DE MORITA E MORITA EQUIVALÊNCIA

GABRIEL SAMUEL DE ANDRADE

Resumo. Estudamos o que vem a ser um contexto de Morita e o que significa dois anéis serem Morita equivalentes. Apresentamos os teoremas conhecidos como Morita I, II e III, que mostram a conexão entre progeradores em categorias de módulos e equivalências entre estas. Além disso, usamos Morita I para demonstrar o conhecido Teorema de Wedderburn-Artin para anéis simples, demonstramos caracterizações para geradores em uma categoria de módulos e mostramos o que caracteriza a classe de equivalência de uma anel R em relação à Morita equivalência. No final, fazemos um rápido comentário sobre propriedades Morita invariantes.

1. Contexto de Morita

A idéia principal da equivalência Morita pode ser ilustrada pelo seguinte exemplo. Sejam R anel com unidade e $M_n(R)$ o anel de matrizes $n \times n$ sobre R, para algum $n \in \mathbb{N}$. Se V é um R-módulo à esquerda, então V^n é um $M_n(R)$-módulo de maneira canônica, através da multiplicação de matrizes por vetores, e a correpondência $V \mapsto V^n$ é funtorial. Reciprocamente, todo $M_n(R)$-módulo pode ser obtido a partir de algum R-módulo. Portanto, os anéis R and $M_n(R)$ tem categorias equivalentes de módulos à esquerda.

Definição 1.1. *Escrevemos* ***mod-****R para a categoria dos R-módulos à direita. Dois anéis com unidade são* Morita equivalentes *se eles tem categorias equivalentes de módulos à direita.* ■

Apesar de termos definido a Morita equivalência em termos das categorias de módulos à direita, poderíamos ter feito a mesma definição considerando as categorias de módulos à esquerda. Veremos que as duas definições são equivalentes. Não vamos mostrar, mas é claro que a Morita equivalência é uma relação de equivalência na categoria dos anéis. Na última seção desse artigo vamos poder esclarecer melhor qual a classe de equivalência de um dado anel por essa relação de equivalência. Agora, vamos começar com um exemplo canônico que será usado pra introduzir a noção de contexto de Morita.

Exemplo 1.2. Vamos considerar as seguintes 4 informações: 1) um anel R, 2) um R-módulo à direita M, 3) o módulo dual $M^* = Hom(M_R, R_R)$, e 4) $R' = End(M_R)$. Podemos considerar M como um R'-R-bimódulo de uma maneira natural. Aqui, se $r' \in R'$ e $x \in M$, $r'x$ é a imagem de x por r'. Também, M^* pode ser visto como um R-R'-bimódulo se definirmos

$$(ry^*)x = r(y^*x), \quad (y^*r')x = y^*(r'x)$$

para $r \in R$, $r' \in R'$, $y^* \in M^*$ e $x \in M$. De agora em diante, vamos escrever (y^*, x) para $y^*x = y^*(x)$. Considere a aplicação de $M^* \times M$ levando o par (y^*, x) no elemento $(y^*, x) \in R$. Listamos as propriedades dessa aplicação:

$$\begin{aligned}
(y^*, x_1 + x_2) &= (y^*, x_1) + (y^*, x_2) \\
(y^*, xr) &= (y^*, x)r \\
(y_1^* + y_2^*, x) &= (y_1^*, x) + (y_2^*, x) \\
(ry^*, x) &= r(y^*, x) \\
(y^*r', x) &= (y^*, r'x).
\end{aligned}$$

As duas primeiras igualdades seguem da definição de um homomorfismo de M_R em R_R e a terceira segue da definição de soma de dois homomorfismos; as duas últimas seguem da ação de R e R' sobre M^*. A primeira, terceira e quinta igualdades mostram que $(y^*, x) \mapsto (y^*, x)$ é um produto R'-balanceado de M^* e M. Portanto, temos um homomorfismo τ de $M^* \otimes_{R'} M$ em R tal que $\tau(y^* \otimes x) = (y^*, x)$. A segunda e quarta igualdades agora mostram que $\tau(y^* \otimes xr) = (\tau(y^*, x))r$ e $\tau(ry^* \otimes x) = r\tau(y^*, x)$. Portanto, se considerarmos $M^* = {}_R M^*_{R'}$, $M = {}_{R'} M_R$ e, conseqüentemente, $M^* \otimes_{R'} M$ como um R-R-bimódulo, então τ é um homomorfismo de R-R-bimódulos entre $M^* \otimes_{R'} M$ e R. Agora, seja (x, y^*) um elemento de $M \times M^*$. Então definimos uma aplicação

$$[x, y^*] : y \mapsto x(y^*, y)$$

de M em M. Evidentemente, $[x, y^*](y_1 + y_2) = [x, y^*](y_1) + [x, y^*](y_2)$ e $[x, y^*](yr) = ([x, y^*](y))r$, logo $[x, y^*] \in R' = End(M_R)$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
[x_1 + x_2, y^*] &= [x_1, y^*] + [x_2, y^*] \\
[x, y_1^* + y_2^*] &= [x, y_1^*] + [x, y_2^*] \\
[xr, y^*] &= [x, ry^*] \\
[r'x, y^*] &= r'[x, y^*] \\
[x, y^* r'] &= [x, y^*]r',
\end{aligned}$$

essas igualdades seguem imediatamente da definição e das igualdades anteriores. Segue que temos um homomorfismo de R'-R'-bimódulos μ de $M \otimes M^*$ em R' tal que $\mu(x \otimes y^*) = [x, y^*]$. Pela definição do colchete podemos escrever

$$[x, y^*]y = x(y^*, y)$$

e também temos

$$x^*[x, y^*] = (x^*, x)y^*,$$

pois

$$(x^*[x, y^*])y = x^*([x, y^*]y) = x^*(x(y^*, y)) = (x^*x)(y^*, y) = (x^*, x)(y^*, y)$$

e

$$((x^*, x)y^*)y = (x^*, x)(y^*y) = (x^*, x)(y^*, y).$$

■

Podemos agora abstrair os elementos essenciais dessa situação formulando a seguinte definição:

Definição 1.3. *Um* contexto de Morita *é uma sextupla* $(R, R', M, M', \tau, \mu)$ *em que* R,R' *são anéis,* $M = {}_{R'}M_R$ *é um* R'-R*-bimódulo,* $M' = {}_RM'_{R'}$ *é um* R-R'*-bimódulo,* τ *é um* R-R*-homomorfismo de* $M' \otimes_{R'} M$ *em* R*, e* μ *é um homomorfismo de* R'-R'*-bimódulos de* $M \otimes_R M'$ *em* R' *tais que se escrevermos* $\tau(x' \otimes x) = (x', x)$ *e* $\mu(x' \otimes x) = [x', x]$*, então*

(i) $[x, y']y = x(y', y)$,
(ii) $x'[x, y'] = (x', x)y'$.

■

Observamos que as condições (i) e (ii) são equivalentes, respectivamente, à comutatividade dos seguintes diagramas

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R M' \otimes_{R'} M \arrow[r, "1\otimes\tau"] \arrow[d, "\mu\otimes 1"'] & M \otimes_R R \arrow[d] \\
R' \otimes_{R'} M \arrow[r] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M' \otimes_{R'} M \otimes_R M' \arrow[r, "1\otimes\mu"] \arrow[d, "\tau\otimes 1"'] & M' \otimes_{R'} R' \arrow[d] \\
R \otimes_R M' \arrow[r] & M'
\end{tikzcd}$$

Agora, podemos nos referir ao exemplo inicial 1.2 como o contexto de Morita $(R, R' = End(M_R), M, M^*, \tau, \mu)$ para um R-módulo à direita M dado. Vamos chamar este o contexto de Morita determinado por M_R.

Exemplo 1.4. Outro exemplo importante é o seguinte: considere o módulo à esquerda livre ${}^{(n)}R$ e o módulo à direita livre $R^{(n)}$. Sejam $M = {}^{(n)}R$, $M' = R^{(n)}$ e denote os elementos de M como colunas

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

e os elementos de M' como linhas $x' = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Seja $R' = M_n(R)$, o anel das matrizes $n \times n$ com entradas em R. Então, M é um R'-módulo à esquerda se definirmos $r'x$, para $r' \in M_n(R)$, como sendo o produto de matrizes. Então, M é um R'-R-bimódulo. Similarmente, M' é um R-R'-bimódulo se definirmos a ação de r' em x' como o produto de matrizes $x'r'$. Também, definimos $[x, y'] = xy'$ como o produto de matrizes. Então temos a aplicação μ de $M \otimes_R M'$ em $R' = M_n(R)$ tal que $\mu(x \otimes y') = [x, y']$, que é um homomorfismo de R'-R'-bimódulos. Definimos $(y', x) = y'x$, isso é uma matriz 1×1, logo pode ser considerada como um elemento de R. Então, temos um homomorfismo de R-R-bimódulos τ de

$M' \otimes_{R'} M$ em R tal que $\tau(y' \otimes x) = (y', x)$. As relações (i) e (ii) seguem da lei associativa da multiplicação de matrizes. Portanto $(R, R' = M_n(R), R^{(n)}, {}^{(n)}R, \tau, \mu)$ é um contexto de Morita. ■

Se M é um R-módulo à direita e $M^* = Hom(M, R)$, então definimos

$$T(M) = \{\sum_{x,y^*} (y^*, x)\} \subseteq R.$$

Evidentemente, este é o subgrupo do grupo aditivo de R gerado pelos elementos $(y^*, x) = y^*(x)$, $y^* \in M^*$, $x \in M$. $T(M)$, que é chamado o traço do módulo M, é um ideal de R, pois se $r \in R$, então

$$(y^*, x)r = (y^*, xr) \in T(M)$$

$$r(y^*, x) = (ry^*, x) \in T(M).$$

Estamos agora quase prontos pra provar o primeiro teorema principal em contextos de Morita. Ele nos dá conclusões importantes a partir da hipótese de τ e μ serem sobrejetivos. Antes de apresentar tal teorema, precisamos de mais algumas informações. De agora em diante, vamos chamar um módulo de *progerador* se for projetivo finitamente gerado e seu ideal traço for o anel todo. Será importante sabermos a caracterização de módulos projetivos dada pelo Lema da Base Dual, por isso é conveniente demonstrarmos esse resultado, de maneira que o artigo fique autocontido.

Teorema 1.5. ***Lema da Base Dual*** *Um R-módulo à direita P é projetivo se, e somente se, existe um conjunto $\{x_\alpha | \alpha \in I\}$ de elementos de P e elementos $\{x^*_\alpha | \alpha \in I\}$ do módulo dual $P^* = Hom(P, R)$ tais que se $x \in P$, $x^*_\alpha(x) = 0$ exceto para uma quantidade finita dos x^*_α, e $x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha x^*_\alpha(x)$. Se a condição vale, então $\{x_\alpha\}$ é um conjunto de geradores e se P é projetivo, então $\{x_\alpha\}$ pode ser tomado como qualquer conjunto de geradores de P.*

Demonstração: Suponha primeiro que P é projetivo e $\{x_\alpha | \alpha \in I\}$ é um conjunto de geradores para P. Existe um módulo livre F com base $\{X_\alpha | \alpha \in I\}$ e um epimorfismo $p : F \to P$ tal que $p(X_\alpha) = x_\alpha$. Como P é projetivo, temos um homomorfismo $i : P \to F$ tal que $pi = 1_P$, em que 1_P é morfismo identidade em P. Como $\{X_\alpha\}$ é uma base de F, qualquer $X \in F$ pode ser escrito como uma soma $X_{\alpha_1} a_{\alpha_1} + X_{\alpha_2} a_{\alpha_2} + ... + X_{\alpha_n} a_{\alpha_n}$, em que $a_{\alpha_j} \in R$. Podemos escrever também $X = \sum_{\alpha \in I} X_\alpha a_\alpha$, em que apenas um número finito dos a_α são $\neq 0$ e a soma é tomada sobre os α_i para os quais $a_{\alpha_i} \neq 0$. Como os X_α formam uma base, os a_α (0 ou não) são unicamente determinados por X. Portanto, temos os morfismos $X^*_\alpha : X \mapsto a_\alpha$ e para um X particular, temos $X_\alpha(X) = 0$ exceto para um número finito dos α. É imediato da definição de X^*_α que $X^*_\alpha \in F^* = Hom(F, R)$. Então, $x^*_\alpha = X^*_\alpha i \in P^*$ e para $x \in P$, $x^*_\alpha(x) = X^*_\alpha(i(x)) = 0$ exceto para um número finito dos α. Se $x \in P$, então $i(x) = X \in F$ e $X = \sum X_\alpha X^*_\alpha(X)$. Como $x_\alpha = p(X_\alpha)$, temos $x = pi(x) = p(X) = \sum p(X_\alpha) X^*_\alpha(X) = \sum x_\alpha X^*_\alpha(X) = \sum x_\alpha X^*_\alpha i(x) = \sum x_\alpha x^*_\alpha(x)$. Portanto, $\{x_\alpha\}$ e $\{x^*_\alpha\}$ tem as propriedades exigidas.

Reciprocamente, suponha que para um módulo P temos $\{x_\alpha\}$ e $\{x^*_\alpha\}$ com as propriedades do enunciado. Novamente, considere F como o módulo livre com base $\{X_\alpha\}$ e p o homomorfismo $F \to P$ tal que $p(X_\alpha) = x_\alpha$. Para cada α temos o homomorfismo $x \mapsto X_\alpha x^*_\alpha(x)$ de P em F. Como para um dado $x \in P$, $x^*_\alpha(x) = 0$ exceto para um número finito dos α, temos um homomorfismo $i : P \to F$ tal que $i(x) = \sum X_\alpha x^*_\alpha(x)$. Então, $pi(x) = \sum p(X_\alpha) x^*_\alpha(x) = \sum x_\alpha x^*_\alpha(x) = x$. Portanto, $pi = 1_P$, isso nos diz que a sequência exata $0 \to P \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} P \to 0$ cinde. Então, P é um somando direto do módulo livre F, logo é projetivo. ■

A caracterização de módulos projetivos dada pelo Lema da Base Dual será importante no próximo teorema, conhecido como Morita I.

Teorema 1.6. ***Morita I*** *Seja $(R, R', M, M', \tau, \mu)$ um contexto de Morita em que τ e μ são sobrejetivos. Então*

(1) M_R, ${}_{R'}M$, $M'_{R'}$, ${}_RM'$ são progeradores.
(2) τ e μ são isomorfismos.
(3) a aplicação $l : x' \mapsto l(x')$, em que $l(x')$ é o morfismo $y \mapsto (x', y)$ de M em R, é um isomorfismo de bimódulos de ${}_RM'_{R'}$ em ${}_{R'}M^*_R$, em que $M^* = Hom(M_R, R_R)$. Temos isomorfismos de bimódulos similares de ${}_RM'_{R'}$ em $Hom({}_{R'}M, {}_{R'}R')$, de ${}_{R'}M_R$ em $Hom({}_RM', {}_RR)$, e de ${}_{R'}M'_R$ em $Hom(M'_{R'}, R'_{R'})$.
(4) A aplicação $\lambda : r' \mapsto \lambda'(r')$, em que $\lambda(r')$ é o morfismo $y \mapsto r'y$, é um isomorfismo de anéis de R' em $End(M_R) = Hom(M_R, M_R)$. Similarmente, $\rho : r \mapsto \rho(r)$, em que $\rho(r)$ é $y \mapsto yr$, é um

anti-isomorfismo de anéis de R em $End_{R'}M$, e temos um isomorfismo λ' de R em $End(M'_{R'})$ e um anti-isomorfismo ρ' de R' em $End({}_RM')$.

(5) *O par de funtores $\otimes_R M'$ e $\otimes_{R'} M$ definem uma equivalência das categorias **mod-**R e **mod-**R'. Similarmente, $M\otimes_R$ e $M'\otimes_{R'}$ definem uma equivalência de R-**mod** e R'-**mod**.*

(6) *Se I é um ideal à direita de R, pomos*

$$\eta(I) = IM' = \{\sum b_i x'_i \mid b_i \in I, x'_i \in M'\}$$

e se N' é um submódulo de $M'_{R'}$, pomos

$$\xi(N') = (N', M) = \{\sum (y'_i, x_i) \mid y'_i \in N', x_i \in M\}.$$

Então η e ξ são inversas e são isomorfismos de reticulados entre os reticulados de ideais à direita de R e o reticulado de submódulos de $M'_{R'}$. Além disso, eles induzem isomorfismos de reticulados entre o reticulado de ideais de R e o reticulado de sub-bimódulos de ${}_RM_{R'}$. Enunciados similares valem para os reticulados de ideais à esquerda de R, de ideais à esquerda de R', e o de ideais à direita de R'. Isso implica que R e R' tem reticulados de ideais isomorfos.

(7) *Os centros de R e R' são isomorfos.*

Demonstração: (1) Como μ é sobrejetivo, temos $u_i \in M$, $v'_i \in M'$, $1 \le i \le m$, tais que $\sum [u_i, v'_i] = 1_{R'}$. Então se $x \in M$, $x = 1_{R'}x = \sum [u_i, v'_i]x = \sum u_i(v'_i, x)$. Agora, o morfismo $l(v'_i) : x \mapsto (v'_i, x)$ está em $Hom(M_R, R)$. Portanto, segue do Lema da Base Dual que M_R é projetivo finitamente gerado. A hipótese de que τ é sobrejetivo significa que todo $r \in R$ pode ser escrito como $r = \sum (y'_i, x_i)$, $y'_i \in M'$, $x_i \in M$. Então, $r = \sum l(y'_i)(x_i) \in T(M)$ e $T(M) = R$. Portanto, M_R é um progerador. Os outros três enunciados seguem por simetria.

(2) Suponha $\sum x'_i \otimes y_i \in Ker(\tau)$, logo $\sum (x'_i, y_i) = 0$. Como τ é sobrejetivo, temos $w_j \in M$, $z'_j \in M'$ tal que $\sum (z'_j, w_j) = 1_R$. Então

$$\sum x'_i \otimes y_i = \sum_{i,j} x'_i \otimes y_i(z'_j, w_j) = \sum_{i,j} x'_i \otimes [y_i, z'_j]w_j = \sum_{i,j} x'_i[y_i, z'_j] \otimes w_j = \sum_{i,j} (x'_i, y_i)z'_j \otimes w_j = 0.$$

Portanto, $Ker(\tau) = 0$ e τ é um isomorfismo. Similarmente, μ é um isomorfismo.

(3) Notamos que $l(y') : x \mapsto (y', x)$ está em $Hom(M_R, R)$. Verificação direta, usando a definição das ações de R e R' em $Hom(M_R, R)$, mostra que $y' \mapsto l(y')$ é um homomorfismo de R-R'-bimódulos de M' em $Hom(M_R, R)$. Suponha $l(y') = 0$, logo $(y', x) = 0$ para todo x. Como antes, podemos escrever $1_{R'} = \sum [u_i, v'_i]$, $u_i \in M$, $v'_i \in M'$. Então, $y' = \sum y'[u_i, v'_i] = \sum (y', u_i)v'_i = 0$. Portanto, $l : y' \mapsto l(y')$ é injetivo. Agora, seja $x^* \in Hom(M_R, R)$ e ponha $y' = \sum (x^* u_i)v'_i$, em que $\sum [u_i, v'_i] = 1_{R'}$. Então

$$(y', x) = \sum_i ((x^* u_i)v'_i, x) = \sum_i (x^* u_i)(v'_i, x) = x^*(\sum u_i(v'_i, x)) = x^*(\sum [u_i, v'_i]x) = x^*(x).$$

Portanto, $x^* = l(y')$ e l é sobrejetivo. As outras 3 afirmações seguem por simetria.

(4) Como M é um R'-R-bimódulo, $\lambda(r') : x \mapsto r'x$ é um endomorfismo de M_R. É claro que λ é um homomorfismo de anéis de R' em $End(M_R)$. Agora, suponha que $\lambda(r') = 0$. Então $r'x = 0$, para todo $x \in M$; portanto, $r' = r'1_{R'} = r' \sum [u_i, v'_i]$, em que $\sum [u_i, v'_i] = 1_{R'}$, e $r' \sum [u_i, v'_i] = \sum r'[u_i, v'_i] = \sum [r'u_i, v'_i] = 0$. Portanto, $r' = 0$ e então λ é injetivo. Agora, seja $f \in End(M_R)$. Então, $r' = \sum [fu_i, v'_i] \in R'$ e

$$r'x = \sum [fu_i, v'_i]x = \sum fu_i(v'_i, x) = f(\sum u_i(v'_i, x)) = f(\sum [u_i, v'_i]x) = f(x).$$

Portanto, $f = \lambda(r')$, logo λ é injetivo. Concluímos que λ é um isomorfismo de anéis. Os outros casos seguem de maneira similar.

(5) Se N é um R-módulo à direita, então $N \otimes_R M'$ é um R'-módulo à direita e se N' é um R'-módulo à direita, então $N' \otimes_{R'} M$ é um R-módulo à direita. Portanto, obtemos os funtores $\otimes_R M'$ e $\otimes_{R'} M$ de **mod-**R em **mod-**R' e de **mod-**R' em **mod-**R, respectivamente. Iteração dá os funtores $\otimes_R M' \otimes_{R'} M$ e $\otimes_{R'} M \otimes_R M'$ de **mod-**R em si mesmo e de **mod-**R' em si mesmo. Agora, temos o isomorfismo associatividade de $(N \otimes_R M') \otimes_{R'} M$ com $N \otimes_R (M' \otimes_{R'} M)$. Seguindo com o isomorfismo τ de $M' \otimes_{R'} M$ em R, obtemos um isomorfismo de $N \otimes_R (M' \otimes_{R'} M)$ em $N \otimes_R R$. Aplicando o isomorfismo canônico de $N \otimes_R R$ em N e combinando todos eles, obtemos um isomorfismo de R-módulos à direita

$$(N \otimes_R M') \otimes_{R'} M \to N.$$

Como todos os isomorfismos intermediários que definimos são naturais em N, o último é natural em N. Portanto, $\otimes_R M' \otimes_{R'} M$ é naturalmente isomorfo ao funtor identidade $1_{\textbf{mod-}R}$. Similarmente, $\otimes_{R'} M \otimes_R M'$ é naturalmente isomorfo a $1_{\textbf{mod-}R'}$. Portanto, $\otimes_R M'$, $\otimes_{R'} M$ fornecem uma equivalência natural entre as categorias **mod-**R e **mod-**R'. As outras equivalências afirmadas em (5) seguem por simetria.

(6) É claro pela definição que se I é um ideal à direita de R, então $\eta(I)$ é um submódulo de $M'_{R'}$. Além disso, se I é um ideal, então $\eta(I)$ é um sub-bimódulo de ${}_R M_{R'}$. Similarmente, se N' é um submódulo de $M'_{R'}$, então $\xi(N')$ é um ideal à direita de R e se N' é um sub-bimódulo de ${}_R M_{R'}$, então $\xi(N')$ é um ideal de R. Se I é um ideal à direita de R, então $\xi(\eta(I))$ é o conjunto das somas de elementos da forma $(by', x) = b(y', x)$, em que $b \in I$, $y' \in M'$, $x \in M$. Como τ é sobrejetivo, este conjunto é I. Portanto $\xi\eta$ é o morfismo identidade no reticulado de ideais à direita. Se N' é um sub-bimódulo de ${}_R M_{R'}$, então $\eta(\xi(N'))$ é o conjunto das somas de elementos da forma $(y', x)x'$, $y' \in N'$, $x \in M$, $x' \in M'$. Como $(y', x)x' = y'[x, x']$ e μ é sobrejetivo, temos que $\eta(\xi(N')) = N'$. É claro que η e ξ preservam ordem para a ordem dada pela inclusão. Portanto, são isomorfismos entre os reticulados de ideais à direita de R e dos submódulos de $M_{R'}$. Evidentemente, esses isomorfismos induzem isomorfismos entre os reticulados de ideais de R e dos sub-bimódulos de ${}_R M_{R'}$. Os outros enunciados seguem por simetria. Em particular, temos um isomorfismso de reticulados $I' \mapsto M'I' = \{\sum x'_i b'_i \mid b'_i \in I', x'_i \in M'\}$ do reticulado de ideais I' de R' no reticulado de sub-bimódulos do bimódulo ${}_R M'_{R'}$. Combinando isomorfismos, vemos que dado qualquer ideal I de R existe um único ideal I' de R' tal que $IM' = M'I'$ e $I \mapsto I'$ é um isomorfismo do reticulado de ideais de R no reticulado de ideais de R'.

(7) Para estabelecer um isomorfismo entre o centro $C(R)$ e o centro $C(R')$, consideramos os dois anéis de endomorfismos $End(M_R)$ e $End({}_{R'}M)$. Ambos são subanéis de $End(M)$, o anel de endomorfimos de M considerado apenas como grupo abeliano. Agora, cada um dos anéis $End(M_R)$, $End({}_{R'}M)$ é o centralizador do outro no anel $End(M)$: por (4), $End(M_R)$ é o conjunto dos morfismos $y \mapsto r'y$, $r' \in R'$, e $End({}_{R'}M)$ é o conjunto dos morfismos $y \mapsto yr$. Por outro lado, a definição de $End(M_R)$ mostra que este subanel de $End(M)$ é o centralizador do subanel que consiste dos morfismos $y \mapsto yr$. Similarmente, $End({}_{R'}M)$ é o centralizador em $End(M)$ do conjunto dos morfismos $y \mapsto r'y$. Portanto, $End(M_R)$ e $End({}_{R'}M)$ é o centralizador um do outro em $End(M)$, Claramente, isso implica que o centro

$$C(End(M_R)) = End(M_R) \cap End({}_{R'}M) = C(End({}_{R'}M)).$$

Como temos um isomorfismo de $End(M_R)$ com R' e um anti-isomorfismo de $End({}_{R'}M)$ com R, temos um isomorfismo de $C(R)$ com $C(R')$. ■

Perceba que os itens (3) e (4) nos dizem que, sob a condição de τ e μ serem sobrejetivos, o contexto de Morita dado é, a menos de isomorfismos, o contexto de Morita determinado por M ou por M'. Os itens (1) e (5) mostram a primeira relação entre progeradores e funtores que definem equivalências entre categorias de módulo. O item (6) será usado na próxima seção, em que usamos Morita I para demonstrar o Teorema de Wedderburn-Artin. Por fim, o teorema mostrou que se existir um contexto de Morita entre dois anéis R e R' tal que τ e μ são sobrejetivos, então R e R' são Morita equivalentes. Veremos mais adiante que a recíproca também vale, e então, usando o item (7), podemos concluir que no caso comutativo, R e R' são Morita equivalentes se, e somente se, são isomorfos.

Vamos mostrar agora que Morita I é aplicável a qualquer contexto de Morita $(R, R' = End(P_R), P, P^* = Hom(P_R, R), \tau, \mu)$ determinado por um progerador $P = P_R$. Aqui τ e μ são definidos como no início. A hipótese de P ser progerador implica, em particular, que $T(P) = R$ e isso significa que τ é sobrejetivo. Como P é projetivo finitamente gerado, pelo Lema da Base Dual, temos $x_i \in P$, $x_i^* \in P^*$, $1 \le i \le m$, tais que $x = \sum x_i(x_i^* x)$, para todo $x \in P$. Então $x = \sum x_i(x_i^*, x) = \sum [x_i, x_i^*]x = (\sum [x_i, x_i^*])x$. Portanto, $\sum [x_i, x_i^*] = 1_P$, que é elemento unidade de $R' = End(P_R)$. Segue que qualquer $r' \in End(P_R)$ tem a forma $r' = r'1_P = \sum [r'x_i, x_i^*]$, logo μ é sobrejetivo em R'. Portanto, temos

Teorema 1.7. *Se P é um progerador em **mod-**R, então μ e τ são sobrejetivos para o contexto de Morita $(R, R' = End(P_R), P, P^* = Hom(P_R, R), \tau, \mu)$. Portanto, Morita I é aplicável.*

2. Teorema de Wedderburn-Artin para Anéis Simples

Agora vamos aplicar Morita I para demonstrar um teorema de estrutura clássico para anéis simples - o teorema de Wedderburn-Artin. Ele foi provado para álgebras de dimensão finita sobre um corpo por Wedderburn em 1908 e para anéis com condição de cadeia descendente nos ideais à esquerda (ou à direita) por Artin em 1928.

Teorema 2.1. *As seguintes condições num anel R são equivalentes:*

(1) R é simples e contém um ideal à direita (esquerda) minimal.
(2) R é isomorfo ao anel de transformações lineares de um espaço vetorial de dimensão finita sobre um anel de divisão.
(3) R é simples, artiniano à esquerda e direita, e noetheriano à esquerda e direita.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) Seja I um ideal à direita minimal de R, logo $I = I_R$ é um R-módulo à direita irredutível. Primeiramente, mostremos que I_R é projetivo finitamente gerado. Considere $RI = \sum_{a \in R} aI$. Isso é um ideal em R contendo I. Portanto, $RI = R$. Então, $1 = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$, em que $a_i \in R$, $b_i \in I$. Isso implica que $R = \sum_{i=1}^{m} a_i I$. Agora, observemos que como $a \in R$, o morfismo $x \mapsto ax$, $x \in I$, é um homomorfismo de I como um módulo à direita, e pelo Lema de Schur temos que ou $aI = 0$, ou $aI \cong I$ como módulos à direita. Então, $R = \sum a_i I$ é uma soma de módulos à direita irredutíveis. Logo, $R = I \oplus I'$, em que I' é um segundo ideal à direita. Isso implica que I é projetivo e pode ser gerado por um único elemento. Pelo Lema da Base Dual, o ideal traço $T(I) \neq 0$. Como R é simples, temos $T(I) = R$ e I é um progerador. Portanto, Morita I é aplicável ao contexto de Morita $(R, R' = End(I_R), I, I^* = Hom(I_R, R), \tau, \mu)$. Pelo Lema de Schur, R' é um anel de divisão. Por Morita I, I^* é módulo à direita finitamente gerado sobre o anel de divisão R' e R é isomorfo a $End(I^*_{R'})$. Se substituirmos R' de maneira usual pelo seu oposto $\Delta = R'^{op}$, então I^* se torna um espaço vetorial à esquerda sobre Δ de dimensão finita e R é isomorfo ao anel de transformações lineares desse espaço vetorial. A prova para I, um ideal à esquerda minimal, é similar.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um anel de divisão Δ e seja L seu anel de transformações lineares. Seja $R = \Delta^{op}$ e considere V como módulo à direita sobre R. Então, V_R é livre com base finita, logo é projetivo finitamente gerado. Além disso, se $x \neq 0$ em V, então existe uma função linear f tal que $f(x) = 1$. Isso implica que o ideal traço $T(V_R) = R$ e por isso V_R é um progerador. Então, Morita I se aplica ao contexto de Morita $(R, L = End(V_R) = End({}_\Delta V), V, V^* = Hom(V_R, R), \tau, \mu)$, mostrando que L e o anel de divisão R tem reticulados de ideais isomorfos. Portanto, L é simples. Também, esse resultado mostra que o reticulado de ideais à esquerda de L é isomorfo ao reticulado de submódulos de V. Como espaços vetoriais de dimensão finita satisfazem as condições de cadeia descendente e ascendente para subespaços, segue que L é artiniano e noetheriano à esquerda e à direita.

(3) $\Rightarrow$ (1) é claro. ■

3. Geradores e Progeradores

Se R é um anel e M é um R-módulo à direita, qualquer $x \in M$ está contido no submódulo xR. Portanto, $M = \sum_{x \in M} xR$ e xR é imagem homomórfica de $R = R_R$. De agora em diante, vamos chamar um R-módulo à direita X um gerador da categoria **mod-**R se qualquer módulo M for a soma de submódulos que sejam imagem homomórfica de X. Portanto, R é um gerador para **mod-**R. Evidentemente, se X é um gerador e X é imagem homomórfica de Y, então Y é um gerador. Como a imagem homomórfica de $X^{(n)}$ é uma soma de imagens homomórficas de X, é claro que se $X^{(n)}$ é um gerador, então X é gerador. O conceito de gerador tem um papel central no estudo de equivalências entre categorias de módulos. O seguinte teorema apresenta caracterizações importantes de geradores.

Teorema 3.1. *As seguintes condições sobre um módulo X são equivalentes:*

(1) X é um gerador.
(2) O funtor $Hom(X, -)$ é fiel.
(3) O ideal traço $T(X) = R$.
(4) Existe um n tal que R é imagem homomórfica de $X^{(n)}$.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) Temos que mostrar que para quaisquer dois R-módulos M e N, o morfismo $f \mapsto Hom(X, f)$ de $Hom(M_R, N_R)$ no conjunto dos homomorfismos de $Hom(X, M)$ em $Hom(X, N)$ é injetivo. Aqui, $Hom(X, f)$ é o morfismo $g \mapsto fg$ de $Hom(X, M)$ em $Hom(X, N)$. Como $Hom(X, f)$ é um homomorfismo, é suficiente mostrar que se $f \neq 0$, então o morfismo $Hom(X, f)$ de $Hom(X, M)$ em $Hom(X, N)$ é $\neq 0$. Isso significa que temos que mostrar que para um dado $f \neq 0$, $f : M \to N$, existe um $g \in Hom(X, M)$ tal que $fg \neq 0$. Suponha que não fosse esse o caso. Então $fg = 0$ para todo $g \in Hom(X, M)$. Como X é progerador, $M = \sum gX$, em que a soma é tomada sobre todos os homomorfismos g de X em M. Então, $fM = f(\sum gX) = \sum fgX = 0$, contrário ao fato de $f \neq 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sejam $M = R$, $N = R/T(X)$ e v o homomorfismo canônico de M em N. Dado qualquer $g \in X^* = Hom(X, M)$, temos $g(x) \in T(X)$, para todo $x \in X$. Portanto, $vg(x) = 0$. Logo, $vg = 0$ para todo $g \in Hom(X, M)$. Pela hipótese, isso implica $v = 0$. Então, $N = 0$ e $R = T(X)$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Se (3) vale, temos $1 = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$, para $x_i \in X$, $f_i \in X^*$. Agora, considere $X^{(n)}$ e o morfismo $(y_1, ..., y_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} f_i y_i$ de $X^{(n)}$ em R. Ele é um homomorfismo de R-módulos à direita, logo sua imagem é um ideal à direita de R. Como $1 = \sum f_i x_i$ está na imagem, a imagem é todo o R. Portanto, temos um epimorfismo de $X^{(n)}$ sobre R.

(4) $\Rightarrow$ (1) Como R é um gerador e R é imagem homomórfica de $X^{(n)}$, segue que $X^{(n)}$ é um gerador. Então X é um gerador. ■

A caracterização (3) de geradores mostra que o módulo X é um progerador no sentido definido anteriormente se, e somente se, X é projetivo finitamente gerado e X é um gerador de **mod-**R. Chamamos um módulo M de fiel se, e somente se, o único elemento $a \in R$ tal que $Ma = 0$ é $a = 0$. Para qualquer módulo M, definimos $Ann_R(M) = \{b \in R \mid Mb = 0\}$. É claro que isso é um ideal de R e que M é fiel se, e somente se, $Ann_R(M) = 0$. É claro também que R considerado como o módulo R_R é fiel e segue do teorema anterior que qualquer gerador X de **mod-**R é fiel. Isso porque, se R é uma imagem homomórfica de algum $X^{(n)}$, então $Ann_R(X) \subseteq Ann_R(R) = 0$, logo X é fiel. No caso especial importante em que o anel R é comutativo, condição (3) do teorema anterior pode ser substituída pela condição mais simples de X ser fiel. Para provar isso precisamos do seguinte

Lema 3.2. *Sejam R um anel comutativo e M um R-módulo finitamente gerado. Um ideal I de R satisfaz $MI = M$ se, e somente se, $I + Ann_R(M) = R$.*

Demonstração: Suponha $I + Ann_R(M) = R$. Então, $1 = b + c$ em que $b \in I$, $c \in Ann_R(M)$. Qualquer $x \in M$ pode ser escrito como $x = x1 = xb + xc = xb \in MI$. Portanto, $MI = M$.(Note que a geração finita não é necessária para essa parte). Reciprocamente, sejam $x_1, ..., x_n$ geradores para M. A condição $MI = M$ implica que qualquer $x \in M$ tem a forma $\sum_{i=1}^{n} x_i b_i$, $b_i \in I$. Em particular, $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j b_{ji}$, $1 \leq i \leq n$, ou $\sum_{j=1}^{n} x_j(\delta_{ji} - b_{ji}) = 0$. Essas equações implicam em $x_j det(1 - B) = 0$, $1 \leq j \leq n$, $B = (b_{ij})$. Evidentemente, $c = det(1 - B) = 1 - b$, $b \in I$. Como R é comutativo, $x_j c = 0$, $1 \leq j \leq n$, implica em $xc = 0$, para todo $x \in M$, logo $c \in Ann_R(M)$. Então, $1 = b + c \in I + Ann_R(M)$ e, portanto, $R = I + Ann_R(M)$. ■

Podemos agora provar o

Teorema 3.3. *Todo módulo projetivo finitamente gerado fiel sobre um anel comutativo é um gerador (portanto, um progerador).*

Demonstração: Se M é projetivo finitamente gerado, pelo Lema da Base Dual, temos elementos $x_1, ..., x_n \in M$ e elementos $f_1, ..., f_n \in Hom(M_R, R)$ tais que $x = \sum x_i f_i(x)$. Então, $f_i(x) \in T(M)$, logo isso mostra que $M = MT(M)$. Portanto, pelo lema anterior, $R = Ann_R(M) + T(M)$ e se M é fiel, então $R = T(M)$. Concluímos que M é um gerador pelo teorema anterior. ■

Ao considerar equivalências entre **mod-**R e **mod-**R' para um segundo anel R', assumimos, é claro, que o par de funtores (F, G) que definem a equivalência são aditivos. Lembramos que F é fiel e pleno. Portanto, para quaisquer R-módulos à direita M e N, o morfismo F de $Hom(M, N)$ em $Hom(FM, FN)$ é um isomorfismo. Além disso, F respeita a composição de homomorfismos. Segue que propriedades de um R-módulo ou R-homomorfismo que podem ser expressas em termos de categoria são preservadas. Por exemplo, $f : M \to N$ é injetivo (sobrejetivo) se, e somente se, f é monomorfismo (epimorfismo) em **mod-**R. Portanto, f é injetivo (sobrejetivo) se, e somente se, $F(f) : F(M) \to F(N)$ é injetivo (sobrejetivo). O conceito de um subobjeto de um objeto numa categoria fornece uma maneira categórica de lidar com submódulos de um dado módulo N. Em **mod-**R, um subobjeto do módulo N é uma classe de equivalência $[f]$ de monomorfismos $f : M \to N$ em que a relação de equivalência é definida por $f \sim f' : M' \to N$ se existe um isomorfismo $g : M' \to M$ tal que $f' = fg$. Nesse caso, $f'M' = fM$, logo todos os f em $[f]$ tem a mesma imagem em N e esta é um submódulo. Além disso, se M é um submódulo qualquer, então temos a injeção $i : M \to N$, que é um monomorfismo, e $iM = M$. Portanto, temos uma bijeção entre o conjunto dos submódulos de N com o conjunto de subobjetos de N. Essa bijeção preserva ordem se os submódulos são ordenados da maneira usual através da inclusão, e se definimos $[f'] \leq [f]$ para subobjetos de N como significando que $f' = fg$ para um monomorfismo g. Se N_α é um conjunto dirigido de submódulos de N, então $\bigcup N_\alpha$ é um submódulo e é o sup para o conjunto dos N_α para a ordem parcial dada pela inclusão. Segue que qualquer conjunto dirigido de subobjetos de N tem um sup em relação à ordem dos subobjetos. Se (F, G) é uma equivalência de **mod-**R em **mod-**R' e $[f_\alpha]$ é um conjunto dirigido de subobjetos de N com sup $[f]$, então é claro que $[F(f_\alpha)]$ é um conjunto dirigido de subobjetos de FN com sup $[F(f)]$. Um subobjeto $[f]$ é chamado próprio se f não é um isomorfismo, ou, equivalentemente, se fM para $f : M \to N$ é um submódulo próprio de N. Se $[f]$ é próprio, então $[F(f)]$ é próprio. Desejamos mostrar que se X é um progerador de **mod-**R, então FX é um progerador de **mod-**R'. Isso segue da

Proposição 3.4. *Seja (F, G) um par de funtores que definem uma equivalência de **mod-**R e **mod-**R'. Então*

(1) *Se X é um gerador de **mod-**R, então FX é um gerador de **mod-**R'.*
(2) *Se X é projetivo, então FX é projetivo.*
(3) *Se X é finitamente gerado, então FX é finitamente gerado.*

Demonstração: (1) Pelo Teorema 3.1, X é um gerador se, e somente se, para $f : M \to N$, $f \neq 0$, existe um $g : X \to M$ tal que $fg \neq 0$. Agora, considere FX e seja $f' : M' \to N'$, $f' \neq 0$, em **mod-**R'. Então, $G(f') \neq 0$, logo existe um $g : X \to GM'$ tal que $G(f')g \neq 0$. Então, $FG(f')F(g) \neq 0$. O fato de que $FG \cong 1_{\textbf{mod-}R'}$ implica a existência de um $g' : FX \to M'$ tal que $f'g' \neq 0$. Portanto, FX é um gerador em **mod-**R'.

(2) Como a sobrejetividade de um homomorfismo f é equivalente à condição de f ser epimorfismo em **mod-**R, a afirmação de X ser projetivo é equivalente ao seguinte: dado um epimorfismo $p : M \to N$, o morfismo $g \mapsto pg$ de $Hom(X, M)$ em $Hom(X, N)$ é sobrejetivo. Disso segue facilmente que X projetivo implica FX projetivo.

(3) Notamos que X é finitamente gerado se, e somente se, não pode ser expresso como união de um conjunto dirigido de submódulos próprios. A forma categórica dessa condição é que o sup de qualquer conjunto dirigido de subobjetos próprios de X é um subobjeto próprio. Por causa da simetria da equivalência, é suficiente mostrar que se $[f_\alpha]$ é um conjunto dirigido de subobjetos próprios de um R-módulo N tal que $[f] = \sup\ [f_\alpha]$ não é próprio, então a mesma coisa vale para $[F(f_\alpha)]$ como subobjetos de FN. Como F define uma equivalência, é claro que isso vale. ■

4. Equivalência de Categorias de Módulos

Antes de procedermos ao próximo resultado principal, que vai mostrar a condição para equivalência das categorias **mod-**R e **mod-**R' para dois anéis R e R' e a forma de tais equivalências, vamos estabelecer um isomorfismo natural entre dois funtores que surgem na situação de Morita I. Lembramos que se $P = {}_{R'}P_R$ e $M = M_R$ (portanto $= {}_ZM_R$), então $Hom(P_R, M_R)$ pode ser considerado como um R'-módulo à direita definindo fr', para $f \in Hom(P_R, M_R)$, $r' \in R'$, por $(fr')x = f(r'x)$. Isso define um funtor $Hom(P_R, -)$ de **mod-**R em **mod-**R'. Vamos agora mostrar que se temos um contexto de Morita $(R, R', P, P', \tau, \mu)$ em que τ e μ são sobrejetivos, como em Morita I, então $Hom(P_R, -)$ e $\otimes_R P'$ são funtores naturalmente isomorfos. Sejam $u \in M$, $z' \in P'$. Então, definimos o morfismo

$$\{u, z'\} : z \mapsto u(z', z), \quad z \in P$$

de P em M. É claro que $\{u, z'\} \in Hom(P_R, M_R)$ e o morfismo $(u, z') \mapsto \{u, z'\}$ define um produto balanceado de M_R e ${}_RP'$. Portanto, temos um homomorfismo de $M \otimes_R P'$ em $Hom(P_R, M_R)$ tal que $u \otimes z' \mapsto \{u, z'\}$. Se $r' \in R'$, então $\{u, z'\}r'$ é definido por $(\{u, z'\}r')z = \{u, z'\}r'z = u(z', r'z) = u(z'r', z)$. Portanto, $\{u, z'\}r' = \{u, z'r'\}$, logo o homomorfismo tal que $u \otimes z' \mapsto \{u, z'\}$ é um homomorfismo de R'-módulos à direita. Afirmamos que é um isomorfismo. Como na prova de Morita I, escrevemos $1_{R'} = \sum [u_j, v_j']$, $u_j \in P$, $v_j' \in P'$. Então, se $f \in Hom(P_R, M_R)$ e $z \in P$, temos $fz = f(1_{R'}z) = f(\sum [u_j, v_j']z) = f(\sum u_j(v_j', z)) = \sum f(u_j)(v_j', z) = \sum \{fu_j, v_j'\}z$. Portanto, $f = \sum \{fu_j, v_j'\}$. Então, o homomorfismo de $M \otimes_R P'$ em $Hom(P_R, M_R)$ é sobrejetivo. Agora, suponha $\sum \{w_i, w_i'\} = 0$ para $w_i \in M$, $w_i' \in P'$. Então,

$$\sum w_i \otimes w_i' = \sum w_i \otimes w_i' 1 = \sum_{i,j} w_i \otimes w_i'[u_j, v_j'] = \sum_{i,j} w_i \otimes (w_i', u_j)v_j' = \sum_{i,j} w_i(w_i', u_j) \otimes v_j' = \sum_{i,j} \{w_i, w_i'\}u_j \otimes v_j' = 0.$$

Logo, nosso homomorfismo é injetivo. Temos o isomorfismo de R'-módulos

$$\eta_M : M \otimes_R P' \to Hom(P_R, M_R)$$

tal que $\eta_M(u \otimes z') = \{u, z'\}$. É natural em M, isto é, se $f \in Hom(M_R, N_R)$, então

$$\begin{tikzcd} M \otimes_R P' \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "f\otimes 1"'] & Hom(P_R, M_R) \arrow[d, "Hom(P,f)"] \\ N \otimes_R P' \arrow[r, "\eta_N"'] & Hom(P_R, N_R) \end{tikzcd}$$

é comutativo. Para verificar isso, seja $u\otimes z' \in M\otimes_R P'$. Então, $Hom(P, f)\eta_M(u\otimes z') = f\{u, z'\} = \{fu, z'\}$ e

$$\eta_N(f \otimes 1)(u \otimes z') = \{fu, z'\}.$$

Portanto, o diagrama é comutativo. Com isso, mostramos que os funtores $\otimes_R P'$ e $Hom(P_R, -)$ são naturalmente isomorfos. Agora, podemos mostrar o segundo resultado principal da teoria de Morita.

Teorema 4.1. *Sejam R e R' anéis tais que as categorias* **mod-**R *e* **mod-**R' *são equivalentes. Então*

(1) Existem bimódulos ${}_{R'}P_R$, ${}_RP'_{R'}$ e um contexto de Morita $(R, R', P, P', \tau, \mu)$ para o qual τ e μ são sobrejetivos, logo Morita I vale. Em particular, R' é isomorfo a $End(P_R)$ para um progerador P de **mod-**R *e R é isomorfo a $End(P'_{R'})$, P' um progerador de* **mod-**R'*.*

(2) Se (F, G) é um par de funtores que definem uma equivalência de **mod-**R *e* **mod-**R'*, então F é naturalmente isomorfo a $\otimes_R P'$ e G a $\otimes_{R'} P$, em que P e P' são como em (1).*

Demonstração: (1) Sejam (F, G) como em (2) e ponha $P = GR'$, $P = FR$. Como R é um progerador de **mod-**R, P' é um progerador de **mod-**R'. Similarmente, P é um progerador de **mod-**R. Como R' é um anel, $\lambda : r' \mapsto \lambda(r')$, em que $\lambda(r')$ é a multiplicação à esquerda $x' \mapsto r'x'$, é um isomorfismo de R' em $End(R'_{R'})$. Como G aplicado em $End(R'_{R'}) = Hom(R'_{R'}, R'_{R'})$ é um isomorfismo desse anel em $Hom(P_R, P_R) = End(P_R)$, temos o isomorfismo de anéis $r' \mapsto G\lambda(r')$ de R' em $End(P_R)$. É claro que $r'x = G\lambda(r')x$ torna P um R'-R-bimódulo. Similarmente, $r \mapsto F\lambda(r)$ é um isomorfismo de R em $End(P'_{R'})$ e P' é um R-R'-bimódulo com $rx' = F\lambda(r)x'$. Temos a cadeia de isomorfismos de grupos

$$P'_{R'} \cong Hom(R', P'_{R'}) = Hom(R', FR) \cong Hom(P_{R'}, GFR) \cong Hom(P_R, R) = P^*$$

em que o primeiro é o isomorfismo canônico, o segundo é G e o terceiro é $g \mapsto \zeta_{GFR}g$ em que ζ é o isomorfimo natural de GF a $1_{\textbf{mod-}R}$. Todos os módulos R', $P'_{R'}$, P_R,R são bimódulos e GFR se torna um R-R-bimódulo se definirmos $rx = GF\lambda(r)$, $r \in R$, $x \in GFX$. Com essas definições, todos os Hom de antes tem estruturas de R-R'-bimódulos. Agora, é imediato que o isomorfismo canônico de $P'_{R'}$ em $Hom(R', P'_{R'})$ é um isomorfismo de R-R'-bimódulos. A R-ação à esquerda em $Hom(R', FR)$ é $rf = F\lambda(r)x$ e a R'-ação à direita é $fr' = f\lambda(r')$. Aplicando G, obtemos $G(rf) = GF\lambda(x)G(f)$ e $G(fr') = G(f')G\lambda(r')$. Considerando as ações de R e R' em $Hom(P_R, GFR)$, vemos que o segundo isomorfismo é um isomorfismo de R-R'-bimódulos. Similarmente, se usarmos a condição de naturalidade $\zeta_{GFR}GF\lambda(r) = \lambda(r)\zeta_{GFR}$, podemos mostrar que o último isomorfismo é R-R'-linear. Portanto, obtemos um isomorfismo de R-R'-bimódulos de ${}_RP'_{R'}$ com ${}_RP^*_{R'}$. Se aplicarmos isso ao contexto de Morita $(R, R', P, P^*, -, -)$ determinado por P, obtemos um contexto de Morita $(R, R', P, P', \tau, \mu)$ em que τ e μ são sobrejetivos. Então, Morita I e o resultado que observamos no início da seção são válidos.

(2) Se M é um R-módulo à direita, temos $FM \cong Hom(R'_{R'}, FM) \cong Hom(GR'_{R'}, GFM)$ (por G) $\cong Hom(P, M)$ (pelo isomorfismo natural entre GF e $1_{\textbf{mod-}R}$) $\cong M \otimes_R P'$ (como acima), e todos os isomorfismos são naturais em M. Portanto, o funtor F dado é naturalmente isomorfo a $\otimes_R P'$. Similarmente, G é naturalmente isomorfo a $\otimes_{R'} P$. ■

A existência de um contexto de Morita $(R, R', P, P', \tau, \mu)$ com τ e μ sobrejetivos implica a equivalência de **mod-**R e **mod-**R' e a equivalência de R**-mod** e R'**-mod** (por Morita I). Uma consequência desse resultado e de Morita II é que R e R' tem categorias equivalentes de módulos à direita **mod-**R e **mod-**R' se, e somente se, as categorias R**-mod** e R'**-mod** são equivalentes. Se este é o caso, dizemos que R e R' são (Morita) similares. Morita II e as caracterizações de geradores nos permitem dar um identificação precisa dos anéis R' que são similares a um dado anel R, a saber, temos

Teorema 4.2. *Para um dado anel R, seja e um idempotente num anel de matrizes $M_n(R)$, $n \geq 1$, tal que o ideal $M_n(R)eM_n(R)$ gerado por e é $M_n(R)$. Então, $R' = eM_n(R)e$ é similar a R. Além disso, qualquer anel similar a R é isomorfo a um anel dessa forma.*

Vamos precisar do seguinte lema, que fornece algumas informações úteis.

Lema 4.3. *Seja R um anel, então:*

(1) Se e é um idempotente em R e N é um R-módulo à direita, então $Hom_R(eR, N)$ é o conjunto dos morfismos $ea \mapsto uea$, $u \in N$. O morfismo $f \mapsto f(e)$ é um isomorfismo de grupos de $Hom_R(eR, N)$ em Ne e é um isomorfismo de anéis de $End_R(eR) = Hom_R(eR, eR)$ em eRe se $N = eR$.
(2) O ideal traço $T(eR) = ReR$.
(3) Um R-módulo à direita M é um progerador cíclico se, e somente se, $M \cong eR$ em que e é um idempotente em R tal que $eRe = R$.
(4) Se $M = M_1 \oplus M_2$ para R-módulos à direita e e_i são as projeções determinadas por essa soma direta, então $End_R(M_i) \cong e_i End_R(M) e_i$.

Demonstração: (1) Como e é um gerador de eR, um homomorfismo f de eR em N é determinado pela imagem $f(e) \in N$. Então, $f(e) = f(e^2) = f(e)e$, logo $f(e) = ue \in Ne$ e $f(ea) = uea$. Reciprocamente, para qualquer $u \in N$, o morfismo $ea \mapsto uea$ é um homomorfismo de módulos de eR em N. Verificação direta mostra que $f \mapsto f(e) = ue$ é um isomorfismo de grupos de $Hom(eR, N)$ em Ne e no caso especial em que $N = eR$, isso é um isomorfismo de anéis (eRe é um subanel de R e tem e como unidade).

(2) A determinação de $Hom_R(eR, N)$ para o caso de $N = R$ mostra que $(eR)^* = Hom_R(eR, R)$ é o conjunto dos morfismos $ea \mapsto bea$, $a, b \in R$. Portanto, $T(eR)$ é o conjunto das somas $\sum b_i e a_i$, $a_i, b_i \in R$. Logo, $T(eR) = ReR$.

(3) É claro que M é um R-módulo à direita projetivo cíclico se, e somente se, M é isomorfo a um somando direto de R, portanto, se e somente se, $M \cong eR$ em que $e^2 = e \in R$. Pelo teorema anterior, eR é um gerador se, e somente se, $T(eR) = R$. Portanto, isso vale se, e somente se, $ReR = R$. Combinando esses resultados vemos que M é um progerador cíclico se, e somente se, $M \cong eR$ em que e é um idempotente em R e $ReR = R$.

(4) Seja $M = M_1 \oplus M_2$ e sejam e_i, $i = 1, 2$, as projeções determinadas por essa decomposição. Então, $e_i \in End_R(M)$, $e_1 + e_2 = 1$, $e_i^2 = e_i$, e $e_1e_2 = 0 = e_2e_1$. $e_1 End_R(M) e_1$ é um anel com unidade e_1. Se $\eta \in End_R(M)$, $e_1\eta e_1$ leva M_1 em si mesmo e portanto $e_1\eta e_1|_{M_1} \in End_R(M_1)$. Como $(e_1\eta e_1)M_2 = 0$, o homomorfismo de anéis $e_1\eta e_1 \mapsto e_1\eta e_1|_{M_1}$ é um monomorfismo. Além disso, esso morfismo é sobrejetivo, pois se $\zeta \in End_R(M_1)$, então $e_1\zeta e_1 \in End_R(M)$ e $e_1\zeta e_1|_{M_1} = \zeta$. Portanto, $e_1\eta e_1 \mapsto e_1\eta e_1|_{M_1}$ é um isomorfismo de $e_1 End_R(M) e_1$ em $End_R(M_1)$. Similarmente, temos um isomorfismo de $e_2 End_R(M) e_2$ em $End_R(M_2)$. ■

Podemos agora dar a demonstração do Teorema 4.2

Demonstração: Demos uma prova direta da equivalência de **mod-**R e **mod-**$M_n(R)$ no início do artigo. Uma abordagem melhor disso é obtida aplicando Morita I ao exemplo do módulo à esquerda $M' = {}^{(n)}R$ de linhas de n elementos de R e o módulo à direita $R^{(n)}$ de colunas de n elementos de R como no 1.4 da primeira seção. É fácil ver que os morfismos τ e μ são sobrejetivos, logo Morita I é aplicável. Enunciado (5) desse resultado dá uma equivalência de **mod-**R e **mod-**$M_n(R)$. Portanto, R e $M_n(R)$ são similares. Se e é um idempotente em $M_n(R)$ tal que $M_n(R)eM_n(R) = M_n(R)$, então por (3) do lema anterior, $eM_n(R)$ é um progerador de **mod-**$M_n(R)$. Então, pelo Teorema 1.7, $M_n(R)$ e $End_{M_n(R)}(eM_n(R))$ são similares. Pelo enunciado (1) do Lema, o último anel é isomorfo a $eM_n(R)e$. Portanto, $M_n(R)$ e $eM_n(R)e$ são similares e então R e $eM_n(R)e$ são similares se $M_n(R)eM_n(R) = M_n(R)$.

Reciprocamente, seja R' um anel similar a R. Por Morita II, $R' \cong End_R(P)$, em que P é um progerador para **mod-**R. Então, P é um somando direto de $R^{(n)}$ para algum n e $T(P) = R$. Portanto, $P = eR^{(n)}$, em que $e^2 = e \in End_R(R^{(n)})$. Por (4) do Lema, $End(P_R) \cong eEnd(R^{(n)})e$. Também, aplicação de Morita I ao exemplo $(R, M_n(R), R^{(n)}, {}^{(n)}R, \tau, \mu)$ mostra que $End(R^{(n)})$ é o conjunto das multiplicações à esquerda dos elementos de $R^{(n)}$ por matrizes $n \times n$ com entradas em R e $End(R^{(n)}) \cong M_n(R)$. Identificando e com a matriz correspondente, vemos que $R' \cong eM_n(R)e$. Como P é um gerador, temos $T(P) = R$ e como P

é um somando direto de $R^{(n)}$, os elementos de $P^* = Hom(P, R)$ são as restrições de P dos elementos de $Hom(R^{(n)}, R)$. O último é o conjunto das multiplicações à esquerda por linhas $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $a_i \in R$. Como $P = eR^{(n)}$, segue que $T(P)$ é o conjunto das somas de elementos da forma

$$(a_1, ..., a_n)e \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$a_i, b_i \in R$. Portanto, 1 pode ser expresso como uma tal soma. Segue que $M_n(R)eM_n(R)$ contém a matriz e_{11} cuja $(1,1)$-entrada é 1 e as outras entradas são 0. Como $M_n(R)e_{11}M_n(R) = M_n(R)$, temos $M_n(R)eM_n(R) = M_n(R)$. Portanto, $R' \cong eM_n(R)e$, em que $e^2 = e$ e $M_n(R)eM_n(R) = M_n(R)$. ∎

Agora que sabemos como os anéis similares a um dado anel parecem, estudamos mais de perto as equivalências de **mod-**R e **mod-**R' (e R-**mod** e R'-**mod**). Por Morita II, elas são dadas, a menos de isomorfismo natural, através do produto tensorial por um R'-R-bimódulo P de um contexto de Morita $(R, R', P, P', \tau, \mu)$ em que τ e μ são sobrejetivos, portanto isomorfismos. Logo, μ é um isomorfismo de R'-R'-bimódulos de $P \otimes_R P'$ em R' e τ é um isomorfismo de R-R-bimódulos de $P' \otimes_{R'} P$ em R. Reciprocamente, Suponha que temos tais isomorfismos para um R'-R-bimódulo P e um R-R'-bimódulo P' para algum par de anéis R e R'. Então, como na prova de Morita I (5), $\otimes_R P'$ e $\otimes_{R'} P$ são funtores dando uma equivalência de **mod-**R e **mod-**R' e $P \otimes_R$ e $P' \otimes_{R'}$ dão uma equivalência de R'-**mod** e R-**mod**. Portanto, R e R' são similares. Também, como uma equivalência de categorias de módulos leva progeradores em progeradores e $R \otimes_R P' \cong P'$, é claro que P' é um progerador para **mod-**R'. Similarmente, é um progerador para R-**mod** e P o é para **mod-**R e para R'-**mod**. Vamos agora chamar um R'-R-bimódulo P invertível se existir um R-R'-bimódulo P' tal que $P' \otimes_{R'} P \cong R$ como R-R-bimódulos e $P \otimes_R P' \cong R'$ como R'-R'-bimódulos. Podemos fazer o produto tensorial de tais módulos. Mais precisamente, se R'' é um terceiro anel e Q é um R''-R'-bimódulo invertível (logo R'' e R' são similares), então a lei associativa para produtos tensoriais mostra que $Q \otimes_{R'} P$ é invertível. Podemos agora relacionar isso com as classes de isomorfismos de funtores que dão um equivalência entre as categorias de módulos de dois anéis. Esse é o conteúdo do

Teorema 4.4. ***MORITA III*** *Sejam R,R',R'', ... anéis similares. Então, o morfismo $P \mapsto \otimes_{R'} P$ define uma bijeção da classe das classes de isomorfismos de R'-R-bimódulos invertíveis na classe das classes de isomorfismos naturais de funtores que dão uma equivalência de* ***mod-****R' e* ***mod-****R. Nessa correspondência, composição de equivalências correspondem a produtos tensoriais de bimódulos invertíveis.*

Demonstração: O primeiro enunciado se resume ao seguinte: se P é um R'-R-bimódulo invertível, então $\otimes_{R'} P$ dá uma equivalência de **mod-**R' e **mod-**R e toda tal equivalência é naturalmente isomorfa a uma dessa forma. Além disso, os funtores $\otimes_{R'} P_1$ e $\otimes_{R'} P_2$ para R'-R-bimódulos invertíveis P_1 e P_2 são funtores naturalmente isomorfos se, e somente se, P_1 e P_2 são isomorfos como bimódulos. A primeira afirmação foi provada nos dois primeiros teoremas de Morita. Agora, suponha que P_1 e P_2 são R'-R-bimódulos invertíveis isomorfos. Então, para $N' = N'_{R'}$, $M' \otimes_{R'} P_1$ e $N' \otimes_{R'} P_2$ são isomorfos por um isomorfismo que é natural em N'. Portanto, $\otimes_{R'} P_1$ e $\otimes_{R'} P_2$ são naturalmente isomorfos. Reciprocamente, suponha que $\otimes_{R'} P_1$ e $\otimes_{R'} P_2$ são naturalmente isomorfos. Então, temos um R-isomorfismo η de $R' \otimes_{R'} P_1$ em $R' \otimes_{R'} P_2$ tal que para $a' \in R'$

$$\begin{tikzcd}
R' \otimes_{R'} P_1 \arrow[r, "l(a') \otimes 1_{P_1}"] \arrow[d, "\eta"'] & R' \otimes_{R'} P_1 \arrow[d, "\eta"] \\
R' \otimes_{R'} P_2 \arrow[r, "l(a') \otimes 1_{P_2}"'] & R' \otimes_{R'} P_2
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Isso significa que $R' \otimes_{R'} P_1$ e $R' \otimes_{R'} P_2$ são isomorfos como R'-R-bimódulos. Agora, suponha Q um R''-R'-bimódulo invertível. Então, temos o funtor $\otimes_{R''} Q$ de **mod-**R'' em **mod-**R' e o funtor $\otimes_{R'} P$ de **mod-**R' e **mod-**R. A composta é o funtor $\otimes_{R''} Q \otimes_{R'} P$ de **mod-**R'' em **mod-**R. Pela associatividade, esse é o funtor $\otimes_{R''}(Q \otimes_{R'} P)$. Esse é o significado do último enunciado do teorema. ∎

Por fim, alguns comentários sobre propriedades Morita invariantes. Dizemos que uma propriedade $\mathscr{P}$ da teoria de anéis é *Morita invariante* se para quaisquer R, S anéis com R e S Morita similares, temos

que R tem a propriedade $\mathscr{P}$ se, e somente se, S tem a propriedade $\mathscr{P}$. Portanto, uma propriedade $\mathscr{P}$ é Morita invariante se pode ser caracterizada puramente em termos da categoria de módulos **mod-**R (ou R-**mod**) associada com R, sem referência a elementos de módulos ou do anel R. Algumas propriedades Morita invariantes são: "semissimples", pois R é semissimples se, e somente se, a categoria **mod-**R é semissimples; "noetheriano à direita", "artiniano à direita", pois R noetheriano (artiniano) se, e somente se, módulos à direita finitamente gerados satisfazem CCA (CCD); "(semi-)hereditário à direita", pois R é (semi-)hereditário à direita se, e somente se, submódulos (finitamente gerados) de R-módulos à direita projetivos são projetivos; "von Neumann regular", pois R é Von-Neumann regular se, e somente se, todo R-módulo à direita é plano, "(semi)primitivo à direita"; "(semi)primo"; "finito". As últimas, e outras, propriedades podem ser verificadas na referência [3], pág. 492.
Algumas propriedades que não são Morita equivalentes: "comutativo", "local", "reduzido" (sem elementos nilpotentes não nulos), "domínio de integridade", "anel de divisão", "IBN" (invariant basis number), "Dedekind-finito".

Referências

[1] HUNGERFORD, T.W.; "Algebra, Graduate Texts in Mathematics 73", Springer, New York, 1974.
[2] LAM, T.Y.; "A First Course in Noncommutative Rings", Graduate Texts in Mathematics, 131, Springer-Verlag, Second Edition, New York - Berlin - Heidelberg, 2001.
[3] LAM, T.Y.; "Lectures on Modules and Rings", Graduate Texts in Mathematics, 189, Springer-Verlag, First Edition, New York, 1999
[4] JACOBSON, N.; "Basic Algebra II", W. H. Freeman and Company, Yale University, New York, 1910.