

Álgebras de Hopf

Lista 1, getting started

OBS: Todos os espaços vetoriais serão considerados sobre um corpo k .

- 1) Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ dois espaços vetoriais e sejam $\{e_i\}_{i \in I}$, e $\{f_j\}_{j \in J}$, respectivamente, bases de $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$.
 - a) Mostre que $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbb{V}$, com o isomorfismo dado explicitamente por $\phi(\sum_{j \in J} v_j \otimes f_j) = (v_j)_{j \in J}$.
 - b) Com este isomorfismo, conclua que o conjunto $\{e_i \otimes f_j\}_{i \in I, j \in J}$ é uma base de $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$.
- 2) Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ dois espaços vetoriais e considere um elemento não nulo $t \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$. Mostre que existem, um número natural $n \geq 1$, um conjunto linearmente independente $\{u_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{V}$ e um conjunto linearmente independente $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{W}$ tais que, $t = \sum_{i=1}^n u_i \otimes v_i$ (OBS: Este número é denominado o posto do tensor)
- 3) Seja um elemento nulo $0 = \sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$, mostre que existem vetores $\{t_j\}_{j=1}^m$ e escalares $\{\alpha_{i,j} \in k \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ tais que $\sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} t_j = w_i$ e $\sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} v_i = 0$.
- 4) Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{V}^*$ um conjunto linearmente independente de funcionais. mostre que existe um conjunto $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{V}$, linearmente independente tal que $\varphi_i(v_j) = \delta_{i,j}$.
- 5) Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais.
 - a) Mostre que existe uma aplicação linear injetiva $T : \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^* \rightarrow \text{Hom}_k(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ definida como $T(w \otimes f)(v) = f(v)w$.
 - b) Mostre ainda que T é sobrejetiva se, e somente se, $\dim_k(\mathbb{V}) < \infty$.
 - c) Suponha $t = \sum_{i=1}^n w_i \otimes f_i \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*$, sendo n o posto de t . Mostre que o posto de $T(t)$, entendido como a dimensão do subespaço imagem, é igual a n e que $\{w_i\}_{i=1}^n$ é uma base para $\text{Im}(T(t))$.
- 6) Utilizando os resultados do exercício anterior, mostre que, dado um conjunto linearmente independente $\{f_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{V}^*$, e um subconjunto $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq k$, existe um vetor $v \in \mathbb{V}$ tal que $f_i(v) = \lambda_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$.
- 7) Mostre o seguinte isomorfismo de espaços vetoriais:

$$\text{Hom}_k(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}, \mathbb{U}) \cong \text{Hom}_k(\mathbb{V}, \text{Hom}_k(\mathbb{W}, \mathbb{U})).$$

- 8) Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial, $X \subseteq \mathbb{V}$ e $Y \subseteq \mathbb{V}^*$ dois subconjuntos. Defina

$$\begin{aligned} X^\perp &= \{f \in \mathbb{V}^* \mid f(v) = 0, \forall v \in X\} \\ Y^\perp &= \{v \in \mathbb{V} \mid f(v) = 0, \forall f \in Y\} \end{aligned}$$

Mostre que:

- a) Se $X \subseteq \mathbb{V}$, então $X^\perp$ é subespaço de $\mathbb{V}^*$ (o resultado vale analogamente também para $X \subseteq \mathbb{V}^*$, neste caso $X^\perp$ é subespaço de $\mathbb{V}$).
- b) Se $X \subseteq \mathbb{V}$, então $X^\perp = \langle X \rangle^\perp$, onde $\langle X \rangle$ é o subespaço de $\mathbb{V}$ gerado por X (o resultado vale também para $X \subseteq \mathbb{V}^*$).
- c) Se $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{V}$, então $Y^\perp \subseteq X^\perp$ (o resultado também vale para $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{V}^*$).
- d) $X \subseteq X^{\perp\perp}$, tanto para o caso de $X \subseteq \mathbb{V}$ quanto para o caso de $X \subseteq \mathbb{V}^*$.
- e) $X^\perp = X^{\perp\perp\perp}$, tanto para o caso de $X \subseteq \mathbb{V}$ quanto para o caso de $X \subseteq \mathbb{V}^*$.
- f) Se $X \in \mathbb{V}$ então $X = X^{\perp\perp}$.
- 9) Considere conjuntos X e Y e o conjunto de funções $Y^X = \{f : X \rightarrow Y\}$.
 - a) Mostre que Y^X está em bijeção com o produto direto $\prod_{x \in X} Y$
 - b) Tomando a topologia discreta em Y , a topologia produto em Y^X (a menor topologia que faz com que todas as projeções $\pi_x : Y^X \rightarrow Y$ sejam contínuas) é denominada topologia finita. Mostre que, para funções $f \in Y^X$ e elementos $x_1, \dots, x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$), os conjuntos do tipo

$$\mathcal{O}(f, x_1, \dots, x_n) = \{g : X \rightarrow Y \mid g(x_i) = f(x_i), i \in \{1, \dots, n\}\}$$

formam uma base de abertos para esta topologia.

- c) Se X e Y são k espaços vetoriais, então $\text{Hom}_k(X, Y) \subseteq Y^X$ é um fechado na topologia finita.
 - d) Considerando k com a topologia discreta, mostre que $\text{Hom}_k(X, Y)$, onde X e Y são k espaços vetoriais, munido da topologia finita, é um espaço vetorial topológico (isto é, a soma de funções e a multiplicação por escalar são contínuas segundo esta topologia).
 - e) Se $\dim_k(X) < \infty$, então, a topologia finita de $\text{Hom}_k(X, Y)$ é a topologia discreta.
- 10) Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e $S \subseteq \mathbb{V}^*$, seja $\bar{S}$ o fecho de S na topologia finita.
- a) Assumindo que $\bar{S} = S^{\perp\perp}$, mostre que S é denso em $\mathbb{V}^*$, isto é, $\bar{S} = \mathbb{V}^*$, se, e somente se $S^\perp = \{0\}$.
 - b) Considere a aplicação canônica $e : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}^{**}$ dada por $e(v)(\varphi) = \varphi(v)$. Mostre que e é injetiva, e é sobrejetiva se, e somente se, $\dim_k(\mathbb{V}) < \infty$.
 - c) Mostre que $\text{Im}(e)$ é um subconjunto denso em $\mathbb{V}^{**}$ (isto quer dizer que $\mathbb{V}$ é denso em $\mathbb{V}^{**}$, ao identificarmos o espaço $\mathbb{V}$ com a imagem do morfismo e).