# Álgebras de Hopf

## Lista 2

**OBS: Todos os espaços vetoriais serão considerados sobre um corpo $k$.**

**1)** **Sejam $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ e $g : \mathbb{W} \to \mathbb{W}'$ duas aplicações lineares. Mostre que $\mathbf{ker}(f \otimes g) = \mathbb{V} \otimes \mathbf{ker}(g) + \mathbf{ker}(f) \otimes \mathbb{W}$.**

**2)** **Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ dois espaços vetoriais e sejam $X \subseteq \mathbb{V}$ e $Y \subseteq \mathbb{W}$ dois subespaços. Mostre que $X \otimes Y = (\mathbb{V} \otimes Y) \cap (X \otimes \mathbb{W})$.**

**3)** **Sejam $(A, \mu_A, \eta_A)$ e $(B, \mu_B, \eta_B)$ duas álgebras. Mostre que o produto tensorial $A \otimes B$ possui uma estrutura natural de álgebra dada por**

$$\mu_{A\otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B)(I \otimes \tau_{B,A} \otimes I), \quad \eta_{A\otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B.$$

**(OBS: Você tem que verificar que estes $\mu_{A\otimes B}$ e $\eta_{A\otimes B}$ satisfazem aos axiomas da associatividade e da unidade).**

**4)** **Sejam, $A$, $B$ e $C$ três álgebras e $\phi : A \to C$ e $\psi : B \to C$ dois morfismos de álgebras tais que, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$, temos $\phi(a)\psi 9b0 = \psi(b)\phi(a)$. Mostre que existe um único morfismo de álgebras $\Phi : A \otimes B \to C$ tal que $\Phi(a \otimes b) = \phi(a)\psi(b)$.**

**5)** **Sejam $A$, $B$ e $C$ três álgebras comutativas. Mostre a seguinte bijeção:**

$$\mathbf{Alg}(A \otimes B, C) \cong \mathbf{Alg}(A, C) \times \mathbf{Alg}(B, C),$$

**onde $\mathbf{Alg}(X, Y)$ denota o conjunto dos morfismos de álgebra entre as álgebras $X$ e $Y$.**

**6)** **Seja $C$ um espaço vetorial e $\Delta : C \to C \otimes C$ uma aplicação linear coassociativa. Mostre que existe apenas uma co-unidade $\epsilon$ de modo que $(C, \Delta, \epsilon)$ seja uma coálgebra**

**7)** **Mostre que a comultiplicação e a co-unidade definidas para as álgebras $kG$ e $\mathbf{Rep}(G)$ são morfismos de álgebras.**

**8)** **Dada uma álgebra $A$, um ideal em $A$ é um subespaço $I \subseteq A$ tal que para qualquer $i \in I$ e qualquer $a \in A$ temos que $a.i \in I$ e $i.a \in I$.**

**a)** **Mostre que um subespaço $I$ é ideal se, e somente se $\mu(I \otimes A + A \otimes I) \subseteq I$.**

**b)** **Mostre que existe uma única estrutura de álgebra no espaço vetorial quociente $A/I$ tal que a projeção canônica**

$$\begin{array}{rccc} \pi : & A & \to & A/I \\ & a & \mapsto & a + I \end{array}$$

**seja morfismo de álgebra.**

**c)** **Se $f : A \to B$ é um morfismo de álgebras e $I \subseteq \mathbf{ker}(f)$, então existe um único morfismo de álgebra $\overline{f} : A/I \to B$ tal que $\overline{f} \circ \pi = f$.**

**9)** **Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e $X \subseteq \mathbb{V}$ uma base de $\mathbb{V}$. Mostre que a álgebra tensorial $T(\mathbb{V})$ é isomorfa à álgebra livre gerada pela base, $k\{X\}$.**

**10)** **Mostre que a aplicação que associa cada espaço vetorial $\mathbb{V}$ à sua álgebra tensorial $T(\mathbb{V})$ é um funtor da categoria dos $k$ espaços vetoriais, $\underline{\mathbf{Vect}}_k$ na categoria das $k$ álgebras $\underline{\mathbf{Alg}}_k$. Além do mais, para todo espaço vetorial $\mathbb{V}$ e toda álgebra $A$, temos uma bijeção**

$$\mathbf{Hom}_{Alg}(T(\mathbb{V}), A) \cong \mathbf{Hom}_k(\mathbb{V}, A)$$

**11)** **(A notação de Sweedler funciona) Seja $(C, \Delta, \epsilon)$ uma coálgebra e defina para cada número natural $n \geq 1$ as aplicações lineares $\Delta_n : C \to C^{\otimes(n+1)}$ como, $\Delta_1 = \Delta$ e $\Delta_n = (\Delta \otimes I^{n-1}) \circ \Delta_{n-1}$.**

**a)** **Mostre que, para qualquer $n \geq 2$ e qualquer $p \in \{0, \ldots, n-1\}$ temos**

$$\Delta_n = (I^p \otimes \Delta \otimes I^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1}.$$

**b)** **Mostre que, para qualquer $i \geq 2$ , temos $\Delta_i = (\Delta_{i-1} \otimes I) \circ \Delta$.**

c) **Mostre que, para qualquer $n \geq 2$ e qualquer $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $m \in \{0, \ldots, n-i\}$, temos**
$$\Delta_n = (I^m \otimes \Delta_i \otimes I^{n-i-m}) \circ \Delta_{n-i}.$$

d) **Considere as aplicações lineares $f : C^{\otimes(i+1)} \to C$, $g : C^{\otimes(n+1)} \to \mathbb{V}$, onde $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial qualquer, e defina $\overline{f} : C \to C$ como $\overline{f} = f \circ \Delta_i$. Mostre que para qualquer $n \geq i$, $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ temos**
$$g \circ (I^{j-1} \otimes f \otimes I^{n-j+1}) \circ \Delta_{n+i} = g \circ (I^{j-1} \otimes \overline{f} \otimes I^{n-j+1}) \circ \Delta_n$$

12) **Mostre que $\mathcal{U}$, que associa cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ à sua álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, define um funtor entre a categoria das álgebras de Lie e a categoria das álgebras associativas. Mostre ainda que, para cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e cada álgebra associativa $A$, existe uma bijeção entre o conjunto de morfismos de álgebras de Lie Lie$(\mathfrak{g}, \mathcal{L}(A))$ (onde $\mathcal{L}(A)$ é o espaço vetorial $A$ visto como álgebra de Lie com o comutador $[a, b] = ab - ba$) e o conjunto dos morfismos de álgebra Alg$(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), A)$.**

13) **Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ duas álgebras de Lie. Mostre que $\mathcal{U}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{h})$.**

**(Exemplos de coálgebras)**

14) **Considere o espaço vetorial $C$ gerado pelo conjunto de vetores $\{c_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ (Naturais começam em $0$). Mostre que $C$ possui uma estrutura de coálgebra com co-multiplicação dada por**
$$\Delta(c_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k \otimes c_{n-k},$$
**e co-unidade $\epsilon(c_n) = \delta_{n,0}$.**

15) **Considere o espaço vetorial $M_n^c$ gerado pelo conjunto de vetores $\{e_{ij} \,|\, i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Mostre que $M_n^c$ possui uma estrutura de coálgebra com co-multiplicação dada por**
$$\Delta(e_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \otimes e_{kj}$$
**e co-unidade $\epsilon(e_{ij}) = \delta_{i,j}$.**

16) **Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita, considere $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base para $\mathbb{V}$ cuja base dual é $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{V}^*$. Mostre que $\mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}$ possui uma estrutura de coálgebra com co-multiplicação**
$$\Delta(\varphi \otimes v) = \sum_{i=1}^{n} \varphi \otimes e_i \otimes \varepsilon^i \otimes v$$
**e co-unidade $\epsilon(\varphi \otimes v) = \varphi(v)$. Mostre ainda que esta coálgebra é isomorfa a $M_n^c$.**

17) **Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado localmente finito, isto é, para quaisquer $x \leq y$ em $X$, temos que o intervalo $[x, y] = \{z \in X \,|\, x \leq z \leq y\}$ é um conjunto finito. Seja $C(X)$ o espaço vetorial gerado pelo conjunto de vetores $\{(x, y) \in X \times X \,|\, x \leq y\}$. Mostre que $C(X)$ possui estrutura de coálgebra, com co-multiplicação**
$$\Delta(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} (x, z) \otimes (z, y)$$
**e co-unidade $\epsilon(x, y) = \delta_{x,y}$.**