Álgebras de Hopf

Lista 3

Algumas construções categóricas

1) Mostre que um conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ é uma categoria com os objetos sendo os elementos de P e os morfismos entre dois elementos x e y sendo dados por

$$\mathbf{Hom}_P(x,y) = \begin{cases} \emptyset & \textbf{se} \quad x \not\leq y \\ \{*\} & \textbf{se} \quad x \leq y \end{cases}$$

2) Mostre que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ forma uma categoria com os seguintes conjuntos de morfismos:

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{N}}(m,n) = \begin{cases} \emptyset & \textbf{se} \quad m \neq n \\ GL(n) & \textbf{se} \quad m = n \end{cases}$$

onde $GL(n)$ é o grupo das matrizes invertíveis de ordem n. Mostre que também temos uma categoria se, ao invés do grupo de matrizes, colocarmos como morfismos de n para n os elementos do grupo de permutações S_n.

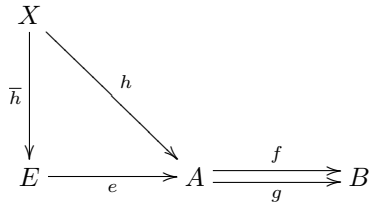
3) Objetos Iniciais: Um objeto I em uma categoria $\mathcal{C}$ é dito ser um objeto inicial se para todo objeto $X \in \mathcal{C}$ existir um único morfismo em $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X)$.

- **a) Mostre que se existir um objeto inicial em uma categoria, este objeto é único.**
- **b) Quem são os objetos iniciais na categoria dos conjuntos, na categoria dos R módulos (para R um anel qualquer, aqui estão incluídas as categorias de espaços vetoriais sobre um corpo, a categoria de módulos sobre uma álgebra e a categoria dos grupos abelianos, considerados como $\mathbb{Z}$ módulos), na categoria dos anéis e na categoria dos grupos.**

4) Objetos Finais: Um objeto F em uma categoria $\mathcal{C}$ é dito ser um objeto final se para todo objeto $X \in \mathcal{C}$ existir um único morfismo em $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F)$.

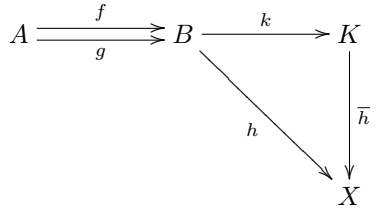
- **a) Mostre que se existir um objeto final em uma categoria, este objeto é único.**
- **b) Quem são os objetos finais na categoria dos conjuntos, na categoria dos R módulos (para R um anel qualquer, aqui estão incluídas as categorias de espaços vetoriais sobre um corpo, a categoria de módulos sobre uma álgebra e a categoria dos grupos abelianos, considerados como $\mathbb{Z}$ módulos), e na categoria dos grupos. Existe objeto final na categoria dos anéis unitais?**

5) Equalizadores: Considere uma categoria $\mathcal{C}$ e dois morfismos $f, g : A \to B$, um equalizador de f e g é um par (E, e) onde E é um objeto da categoria $\mathcal{C}$ e $e : E \to A$ é um morfismo tal que $f \circ e = g \circ e$ satisfazendo à seguinte propriedade universal: Para qualquer morfismo $h : X \to A$ tal que $f \circ h = g \circ h$ então existe um único morfismo $\overline{h} : X \to E$ tal que $h = e \circ \overline{h}$. A propriedade universal de um equalizador é comumente expressa pelo diagrama



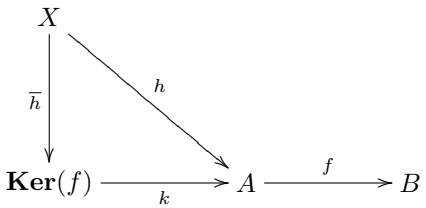
- **a) Mostre que, se existir, só existe um equalizador para o par de morfismos f e g.**
- **b) Descreva o equalizador de um par de funções na categoria dos conjuntos. E na categoria dos R-módulos.**
- **c) Mostre que o morfismo $e : E \to A$ é sempre um monomorfismo, isto é, para quaisquer morfismos $p, q : K \to E$ tais que $e \circ p = e \circ q$ então $p = q$.**

6) Coequalizadores: Considere uma categoria $\mathcal{C}$ e dois morfismos $f, g : A \to B$, um coequalizador de f e g é um par (K, k) onde K é um objeto da categoria $\mathcal{C}$ e $k : B \to K$ é um morfismo tal que $k \circ f = k \circ g$ satisfazendo à seguinte propriedade universal: Para qualquer morfismo $h : B \to X$ tal que $h \circ f = h \circ g$ então existe um único morfismo $\overline{h} : K \to X$ tal que $h = \overline{h} \circ k$. A propriedade universal de um coequalizador é comumente expressa pelo diagrama



a) Mostre que, se existir, só existe um coequalizador para o par de morfismos f e g.
b) Descreva o coequalizador de um par de funções na categoria dos conjuntos. E na categoria dos R-módulos.
c) Mostre que o morfismo $k : B \to K$ é sempre um epimorfismo, isto é, para quaisquer morfismos $p, q : K \to X$ tais que $p \circ k = q \circ k$ então $p = q$.
d) Mostre que, para A uma k álgebra e considerando a categoria dos A bimódulos como uma subcategoria de $\underline{Vect}_k$, que o produto tensorial balanceado $M \otimes_A N$ é um co-equalizador dos morfismos $f, g : M \otimes A \otimes N \to M \otimes N$ dados por $f(m \otimes a \otimes n = (m \cdot a) \otimes n$ e $g(m \otimes a \otimes n) = m \otimes (a \cdot n)$.

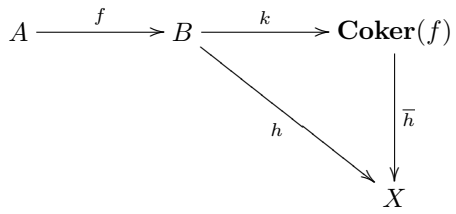
7) Kernels: Considere uma categoria $\mathcal{C}$ onde exista um objeto nulo, isto é um objeto que seja ao mesmo tempo inicial e final (por exemplo, na categoria dos espaços vetoriais é o espaço vetorial nulo, na categoria dos grupos, é o grupo que consiste somente do elemento neutro) e um morfismo $f : A \to B$, um kernel de f é um par $(\mathbf{Ker}(f), k)$ onde $\mathbf{Ker}(f)$ é um objeto da categoria $\mathcal{C}$ e $k : \mathbf{Ker} \to A$ é um morfismo tal que $f \circ k = 0$ satisfazendo à seguinte propriedade universal: Para qualquer morfismo $h : X \to A$ tal que $f \circ h = 0$ então existe um único morfismo $\overline{h} : X \to \mathbf{Ker}(f)$ tal que $h = k \circ \overline{h}$. A propriedade universal de um kernel é comumente expressa pelo diagrama



a) Mostre que, se existir, só existe um kernel para o morfismo f.
b) Mostre que o kernel de f é isomorfo ao equalizador de f e 0. E com isto conclua que $\mathbf{Ker}(f)$ coincida com a noção usual de kernel como subespaço de A
c) Mostre que o morfismo $k : \mathbf{Ker}(f) \to A$ é sempre um monomorfismo.

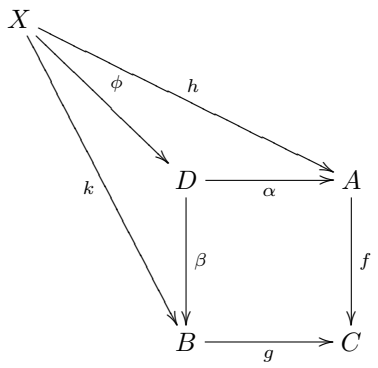
8) Cokernels: Considere uma categoria $\mathcal{C}$ onde exista um objeto nulo e um morfismo $f : A \to B$, um cokernel de f é um par $(\mathbf{Coker}(f), k)$ onde $\mathbf{Coker}(f)$ é um objeto da categoria $\mathcal{C}$ e $k : B \to \mathbf{Coker}$ é um morfismo tal que $k \circ f = 0$ satisfazendo à seguinte propriedade universal: Para qualquer morfismo $h : B \to X$ tal que $h \circ f = 0$ então existe um único morfismo $\overline{h} : \mathbf{Coker}(f) \to X$ tal que $h = \overline{h} \circ k$. A propriedade

universal de um cokernel é comumente expressa pelo diagrama



a) Mostre que, se existir, só existe um cokernel para o morfismo f.
b) Mostre que o cokernel de f é isomorfo ao coequalizador de f e 0.
c) Mostre que $\mathbf{Coker}(f) \cong B/\mathbf{Im}(f)$.
d) Mostre que o morfismo $k : B \to \mathbf{Coker}(f)$ é sempre um epimorfismo.

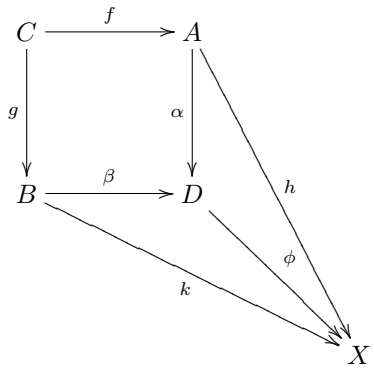
9) Pull backs: Considere uma categoria $\mathcal{C}$ e um par de morfismos $f : A \to C$ e $g : B \to C$, um pull back de f e g é uma tripla (D, α, β), onde D é um objeto na categoria $\mathcal{C}$, e $\alpha : D \to A$ e $\beta : D \to B$ são morfismos tais que $f \circ \alpha = g \circ \beta$ e satisfazendo à seguinte propriedade universal: Para qualquer par de morfismos $h : X \to A$ e $k : X \to B$ tais que $f \circ h = g \circ k$ existe um único morfismo $\phi : X \to D$ tal que $h = \alpha \circ \phi$ e $k = \beta \circ \phi$. A propriedade universal de um pull back é descrita diagramaticamente como



a) Mostre que, se existir, só existe um pull back para o par de morfismos f e g.
b) Quem são os pull backs na categoria dos conjuntos, dos grupos, dos R módulos?
c) Descreva equalizadores e kernels como pull backs.
d) Mostre que se g (resp. f) for monomorfismo, então α (resp. β) também o é.

10) Push outs: Considere uma categoria $\mathcal{C}$ e um par de morfismos $f : C \to A$ e $g : C \to B$, um push out de f e g é uma tripla (D, α, β), onde D é um objeto na categoria $\mathcal{C}$, e $\alpha : A \to D$ e $\beta : B \to D$ são morfismos tais que $\alpha \circ f = \beta \circ g$ e satisfazendo à seguinte propriedade universal: Para qualquer par de morfismos $h : A \to X$ e $k : B \to X$ tais que $h \circ f = k \circ g$ existe um único morfismo $\phi : D \to X$ tal que $h = \phi \circ \alpha$ e $k = \phi \circ \beta$. A propriedade universal de um pull back é descrita

diagramaticamente como



a) **Mostre que, se existir, só existe um push out para o par de morfismos f e g.**
b) **Quem são os push outs na categoria dos conjuntos, dos grupos, dos R módulos?**
c) **Descreva coequalizadores e cokernels como push outs.**
d) **Mostre que se g (resp. f) for monomorfismo, então α (resp. β) também o é.**

11) **Produtos: Seja $A_{ii\in I}$ uma família de objetos em uma categoria $\mathcal{C}$. Um produto para esta família é um par $(A, \{\pi_i : A \to A_i\}_{i\in I})$, onde A é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\pi_i : A \to A_i$ constituem uma família de morfismos obedecendo à seguinte propriedade universal: para qualquer outra família de morfismos $\{f_i : B \to A_i\}$ existe um único morfismo $f : B \to A$ tal que $f_i = \pi_i \circ f$ para todo $i \in I$.**
    a) **Mostre que, se existir, o produto de uma família de objetos é única a menos de isomorfismo.**
    b) **Quais são os produtos na categoria dos conjuntos, espaços vetoriais, A módulos grupos e coálgebras cocomutativas?**
    c) **Mostre que os morfismos π_i são epimorfismos.**
    d) **Mostre que, para cada $i \in I$ existe um morfismo $i_i : A_i \to A$ tal que $\pi_i \circ i_i = \mathrm{Id}_{A_i}$.**
12) **Coprodutos: Seja $A_{ii\in I}$ uma família de objetos em uma categoria $\mathcal{C}$. Um coproduto para esta família é um par $(A, \{i_i : A_i \to A\}_{i\in I})$, onde A é um objeto em $\mathcal{C}$ e $i_i : A_i \to A$ constituem uma família de morfismos obedecendo à seguinte propriedade universal: para qualquer outra família de morfismos $\{f_i : A_i \to B\}$ existe um único morfismo $f : A \to B$ tal que $f_i = f \circ i_i$ para todo $i \in I$.**
    a) **Mostre que, se existir, o coproduto de uma família de objetos é única a menos de isomorfismo.**
    b) **Quais são os coprodutos na categoria dos conjuntos, espaços vetoriais, A módulos, grupos?**
    c) **Mostre que os morfismos π_i são epimorfismos.**
    d) **Mostre que, para cada $i \in I$ existe um morfismo $\pi_i : A \to A_i$ tal que $\pi_i \circ i_i = \mathrm{Id}_{A_i}$.**
    e) **Mostre que, para uma família finita de objetos, o produto e o coproduto desta família coincidem.**