

Álgebras de Hopf

Lista 4

- 1) Mostre que um subespaço de codimensão finita $X \subseteq \mathbb{V}^*$ é fechado na topologia finita se, e somente se, $X^\perp = X^{\bar{\perp}}$, onde

$$X^{\bar{\perp}} = \{\phi \in \mathbb{V}^{**} \mid \phi(f) = 0, \forall f \in X\}$$

- 2) Mostre que, se $\mathbb{V} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{V}_i$ então $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{V}_i^*$ é denso na topologia finita de $\mathbb{V}^*$.
- 3) Seja $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ e $f^* : \mathbb{W}^* \rightarrow \mathbb{V}^*$ sua aplicação dual. Mostre que
- Se $X \subseteq \mathbb{W}$, então $f^*(X^\perp) = f^{-1}(X)^\perp$.
 - Se $T \subseteq \mathbb{W}^*$, então $f^*(T)^\perp = f^{-1}(T^\perp)$.
 - A imagem por f^* de um subespaço fechado é um subespaço fechado.
 - Se f é injetiva e $T \subseteq \mathbb{W}^*$ é um subespaço denso, então $f^*(T)$ também é denso em $\mathbb{V}^*$.
- 4) Seja C uma coálgebra. Mostre que as álgebras $(C^{cop})^*$ e $(C^*)^{op}$ coincidem.
- 5) Sejam A e B duas álgebras e $f : A \rightarrow B$ um morfismo de álgebras. Mostre que, se $I \trianglelefteq B$ é um ideal de codimensão finita, então $f^{-1}(I)$ é um ideal de codimensão finita em A .
- 6) Seja G um grupo e $A = kG$ a sua álgebra de grupo.
- Mostre que $A^\circ = \text{Rep}(G)$.
 - Seja $\rho : G \rightarrow GL(n, k)$ uma representação de dimensão finita de G . Denote $\rho(g) = (a_{ij}(g))$, onde $a_{ij} : G \rightarrow k$ são as respectivas funções coordenadas da matriz. Definindo o espaço vetorial $V(\rho) = \text{span}\{a_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Mostre que $V(\rho)$ é um sub kG -bimódulo de dimensão finita de $\text{Rep}(G)$.
 - Mostre que $\text{Rep}(G) = \sum_{\rho} V(\rho)$, onde a soma é sobre todas as representações de dimensão finita de G .
- 7) Seja A uma álgebra e A° seu dual finito. Mostre que os group likes de A° coincidem com os morfismos de álgebra $f : A \rightarrow k$.
- 8) Seja A uma álgebra e A° seu dual finito. Mostre que
- Se S é uma subálgebra de A , então $S^\perp \cap A^\circ$ é um coideal de A° .
 - Se I é um coideal de A° , então $I^\perp$ é uma subcoálgebra de A .
- 9) Sejam, C uma coálgebra, C^* sua álgebra dual, A uma álgebra e A° seu dual finito. Mostre que
- Se I é ideal à esquerda (à direita) de C^* , então $I^\perp$ é um coideal à esquerda (à direita) de C .
 - Se J é coideal à esquerda (à direita) de C , então $J^\perp$ é um ideal à esquerda (à direita) de C^* .
 - Se I é ideal à esquerda (à direita) de A , então $I^\perp \cap A^\circ$ é um coideal à esquerda (à direita) de A° .
 - Se J é coideal à esquerda (à direita) de A° , então $J^\perp$ é um ideal à esquerda (à direita) de A .
- 10) Mostre que, se $(X_i)_{i \in I}$ é uma família de subcoálgebras (coideais à esquerda, coideais à direita) de uma coálgebra C , então $\bigcap_{i \in I} X_i$ também é uma subcoálgebra (coideal à esquerda, coideal à direita) de C .