Álgebras de Hopf

Lista 5

- 1) Mostre que produtos, equalizadores, e pull backs são limites e que coprodutos, co-equalizadores e push outs são colimites.
- 2) Mostre que a categoria das coálgebras possui colimites.
- 3) Seja C uma coálgebra, mostre as seguintes afirmações abaixo:
 - a) Se I é ideal à esquerda de C^* , então $I^\perp = \text{ann}_C(I) = \{c \in C \mid f \cdot c = c_{(1)}f(c_{(2)}) = 0, \forall f \in I\}$.
 - b) Se X é um coideal à esquerda de C , então $X^\perp = \text{ann}_{C^*}(X) = \{f \in C^* \mid f \cdot x = 0, \forall x \in X\}$.
 - c) Seja $(M, \rho) \in \mathcal{M}^C$ e $J \trianglelefteq C^*$, tal que $J \cdot M = 0$, então $\rho(M) \subseteq M \otimes J^\perp$.
 - d) Se $(M, \rho) \in \mathcal{M}^C$ e $A = (\text{ann}_{C^*}(M))^\perp$, então A é a menor subcoálgebra de C tal que $\rho(M) \subseteq M \otimes A$.
- 4) Seja C uma coálgebra e $M \in \mathcal{M}^C$. Mostre que todo subcomódulo gerado por um único elemento $m \in M$ é de dimensão finita. Com isto conclua que M é igual à soma de todos os seus subcomódulos de dimensão finita.
- 5) Seja C uma coálgebra e $\text{ev} : C \rightarrow C^{**}$ a inclusão canônica. Mostre que $\text{ev}_{(C^*C^{**})^{\text{rat}}} = (C^*C^{**})^{\text{rat}}$.
- 6) Seja $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de coálgebras e $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ o coproduto desta família na categoria das coálgebras. Mostre que existe o isomorfismo de anéis topológicos $C^* \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda^*$ (considerando a topologia finita em C^* e a topologia produto em $\prod_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda^*$).
- 7) Seja $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subcoálgebras de C e A uma subcoálgebra simples de C (isto é, as únicas subcoálgebras de A são $\{0\}$ e A). Mostre que existe um índice $\lambda \in \Lambda$ tal que $A \subseteq C_\lambda$.
- 8) Sejam C e D duas coálgebras. Mostre que as categoria ${}^C\mathcal{M}^D$ e ${}_{D^*}\mathcal{M}_{C^*}^{\text{rat}}$ são isomorfas.
- 9) Seja C uma coálgebra, um comódulo $M \in \mathcal{M}^C$ é livre se existir um espaço vetorial X tal que $M \cong X \otimes C$ como comódulos. Mostre que se $\{e_i\}_{i \in I}$ é base de X , então $M \cong C^{(I)}$.
- 10) Mostre que todo C comódulo é subcomódulo de um comódulo livre.
- 11) Um comódulo $M \in \mathcal{M}^C$ é dito ser injetivo se for um objeto injetivo na categoria $\mathcal{M}^C$, isto é, para qualquer morfismo injetivo $f \in \text{Hom}^C(X, Y)$ e qualquer morfismo $g \in \text{Hom}^C(X, M)$ existe um morfismo $\bar{g} \in \text{Hom}^C(Y, M)$ tal que $\bar{g} \circ f = g$. Mostre que todo C comódulo livre é injetivo. Em particular, mostre que C é um C comódulo injetivo.
- 12) Seja $M \in \mathcal{M}^C$, mostre que M é injetivo se, e somente se for o somando direto de um C comódulo livre.
- 13) Seja $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de C comódulos à direita injetivos. Mostre que $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ é um C comódulo injetivo.
- 14) Um comódulo $M \in \mathcal{M}^C$ é dito ser simples se $M \neq 0$ e os únicos subcomódulos de M são $\{0\}$ e M . Mostre que todo C comódulo possui um subcomódulo simples. Mostre também que um comódulo simples é de dimensão finita.