Álgebras de Hopf

Lista 6

1) Seja C_n o grupo cíclico de ordem n. Mostre que a álgebra de Hopf dual $(kC_n)^*$ é isomorfa a kC_n.

2) Considere o anel polinomial $\mathbb{Z}[q]$. Defina os q números como

$$[n]_q = 1 + q + \cdots q^{n-1}$$

e os coeficientes q binomiais como

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!},$$

onde $[n]_q! = [n]_q.[n-1]_q \ldots [1]_q$.

a) Mostre que

$$q^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)_q + \left(\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array} \right)_q = \left(\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array} \right)_q.$$

b) Com isto, mostre que $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)_q \in \mathbb{Z}[q]$.

c) Seja A uma álgebra associativa sobre um corpo k, e $q \in k$. Considere dois elementos $x, y \in A$ tais que $xy = qyx$, mostre que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)_q y^k x^{n-k}.$$

d) Se $q \in \mathbb{C}$ for uma raiz n-ésima da unidade, então mostre que, para $x, y \in A$ satisfazendo $xy = qyx$ temos

$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

3) Seja k um corpo e $q \in k$ um elemento não nulo. Mostre que a k-álgebra gerada por E, F, K e K^{-1} satisfazendo às relações

$$\begin{array}{rcl} KK^{-1} &=& K^{-1}K = 1, \\ KEK^{-1} &=& q^2 E, \\ KFK^{-1} &=& q^{-2} F, \\ EF - FE &=& \dfrac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \end{array}$$

é uma álgebra de Hopf com as operações

$$\Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes K, \quad \Delta(F) = K^{-1} \otimes F + F \otimes 1,$$

$$\Delta(K^{\pm 1}) = K^{\pm 1} \otimes K^{\pm 1},$$

$$\epsilon(E) = \epsilon(F) = 0, \quad \epsilon(K^{\pm 1}) = 1,$$

e

$$S(E) = -EK^{-1}, \quad S(F) = -KF, \quad S(K^{\pm 1}) = K^{\mp 1}.$$

Esta álgebra de Hopf é chamada a álgebra envolvente quântica $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$.

4) Seja k um corpo e $q \in k$ um elemento não nulo.

a) Mostre que a k-álgebra gerada por a, b, c e d, satisfazendo às relações

$$\begin{array}{l} ba = qab, \quad db - qbd, \quad ca = qac, \quad dc = qcd, \\ bc = cb, \quad ad - da = (q^{-1} - q)bc, \end{array}$$

é uma biálgebra, chamada biálgebra das matrizes quânticas 2×2, $M_q(2)$, com as seguintes relações:

$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c, \quad \Delta(b) a \otimes b + b \otimes d,$$
$$\Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c, \quad \Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d,$$
$$\epsilon(a) = \epsilon(d) = 1, \quad \epsilon(b) = \epsilon(c) = 0.$$

b) Mostre que em $M_q(2)$ o elemento $\det_q = ad - q^{-1}bc = da - qbc$ é central na álgebra e é grouplike.

c) Considere a álgebra $GL_q(2) = M_q(2)[t]/\langle t\det_q - 1\rangle$, mostre que esta álgebra é álgebra de Hopf, com a mesma estrutura de biálgebra de $M_q(2)$, com t grouplike e central e com antípoda dada por

$$S(a) = td, \quad S(b) = -tqb, \quad S(c) = -tq^{-1}c, \quad S(d) = ta.$$

5) Seja H uma k Hopf álgebra que é gerada como álgebra pelos seus elementos primitivos, isto é, elementos $x \in H$ tais que $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Mostre que os elementos group-like de H são triviais, isto é, se $g \in H$ é group-like, então $g \in k.1_H$.