

Álgebras de Hopf

Lista 7

- 1) Sejam H e K duas álgebras de Hopf. Mostre que $H \otimes K$ também é uma álgebra de Hopf com as estruturas padrão de álgebra e de coálgebra no produto tensorial e com antípoda $S_{H \otimes K} = S_H \otimes S_K$. Mostre que se $T \in H^*$ e $\tau \in K^*$ são integrais à esquerda para H e K , respectivamente, então $T \otimes \tau$ é uma integral à esquerda para $H \otimes K$.
- 2) Seja H uma álgebra de Hopf sobre um corpo k e seja $\mathbb{E}$ uma extensão do corpo k . Mostre que $\overline{H} = \mathbb{E} \otimes_k H$ é uma álgebra de Hopf sobre $\mathbb{E}$ com multiplicação usual do produto tensorial, comultiplicação $\Delta : \overline{H} \rightarrow \overline{H} \otimes_{\mathbb{E}} \overline{H}$, dada por

$$\Delta(\lambda \otimes_k h) = \lambda \otimes_k h_{(1)} \otimes_{\mathbb{E}} 1_{\mathbb{E}} \otimes_k h_{(2)},$$

counidade $\epsilon : \overline{H} \rightarrow \mathbb{E}$ dada por $\epsilon(\lambda \otimes_k h) = \lambda \epsilon_H(h)$ e antípoda $S : \overline{H} \rightarrow \overline{H}$ dada por $S(\lambda \otimes_k h) = \lambda \otimes S_H(h)$.

- 3) Mostre que o conjunto dos elementos group-like de uma álgebra de Hopf H , isto é elementos $g \in H$ tais que $\Delta(g) = g \otimes g$ formam um grupo (com a multiplicação de H).
- 4) Mostre que o conjunto dos elementos primitivos de uma álgebra de Hopf H , isto é elementos $x \in H$ tais que $\Delta(g) = x \otimes 1_H + 1_H \otimes x$ formam uma álgebra de Lie (com o comutador dado pela multiplicação de H).
- 5) Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita, mostre que o conjunto de seus elementos primitivos é igual a $\{0\}$ (dica, tente provar que, para qualquer $n \geq 1$, se x é um elemento primitivo não nulo, então $1, x, x^2, \dots, x^n$ são linearmente independentes)
- 6) Mostre que o conjunto dos morfismos de álgebra de uma álgebra de Hopf H sobre o corpo de base k é um grupo (com o produto de convolução de $\text{Hom}_k(H, k)$).
- 7) Seja H uma álgebra de Hopf que é gerada como álgebra por seus elementos primitivos. Mostre que o conjunto dos elementos group-like de H é trivial, isto é, o único elemento group-like de H é 1_H (Dica: Mostre que existe uma coleção de subespaços $\{A_n\}_{n \geq 0}$ (que são os monômios até grau n sobre os elementos primitivos, tais que (1) $H = \sum_{n \geq 0} A_n$, (2) $A_n \subseteq A_{n+1}$ (3) $\Delta(A_n) \subseteq \sum_{i=0}^n A_i \otimes A_{n-i}$).
- 8) Sejam H e K duas álgebras de Hopf e seja $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \otimes K \rightarrow k$ um par dual entre H e K vistos como biálgebras. Mostre que, para qualquer $h \in H$ e qualquer $x \in K$, temos

$$\langle S(h), x \rangle = \langle h, S(x) \rangle.$$

- 9) Mostre que qualquer álgebra de Taft $H_{n^2}(\lambda)$ é isomorfa à sua álgebra de Hopf dual.
- 10) seja H uma álgebra de Hopf sobre k e suponha que exista um isomorfismo de álgebras entre H e $k \times k \times \dots \times k$ (k aparecendo n vezes). Mostre que H é isomorfa à álgebra kG^* , que é a dual da álgebra de grupo para um grupo G de ordem n .