Álgebras de Hopf

Lista 7

1) Seja H uma biálgebra, mostre que a ação de H sobre H^* dada por $(h \rightharpoonup \phi)(k) = \phi(kh)$ faz com que H^* seja um H módulo álgebra.

2) Seja H uma biálgebra, mostre que a ação de H^* sobre H dada por $\phi \rightharpoonup h = h_{(1)}\phi(h_{(2)})$ faz com que H seja um H^o módulo álgebra.

3) Seja H uma biálgebra de dimensão finita e A um H-comódulo álgebra à direita, um (A, H)-Hopf módulo relativo é um k espaço vetorial M que é um A módulo à esquerda, um H comódulo à direita com a seguinte relação de compatibilidade:

$$(a \cdot m)^{(0)} \otimes (a \cdot m)^{(1)} = (a^{(0)} \cdot m^{(0)}) \otimes a^{(1)}m^{(1)}.$$

a) Mostre que os (A, H)-Hopf módulos relativos formam uma categoria (descreva quem são os morfismos), que denotaremos por ${}_A\mathcal{M}^H$.

b) Mostre que existe um isomorfismo de categorias entre ${}_{A\#H^*}\mathcal{M}$ e ${}_A\mathcal{M}^H$.

c) Seja $M \in {}_A\mathcal{M}^H$ mostre que ${}_A\mathrm{Hom}^H(A, M) \cong M^{CoH}$ (isomorfismo k linear).

4) Seja H uma biálgebra de dimensão finita e $t \in \int_l \subseteq H$ uma integral à esquerda em H e Seja A um H módulo álgebra à esquerda.

a) Mostre que, para qualquer $a \in A$ temos $t \triangleright a \in A^H$.

b) Mostre que a função $Tr : A \to A^H$ dada por $Tr(a) = t \triangleright a$ é um morfismo de A^H bimódulos.

5) Seja H uma biálgebra de dimensão finita e A um H-comódulo álgebra à direita,

a) Mostre que A é um H^* módulo álgebra à esquerda.

b) Mostre que $A^{H^*} \cong A^{CoH}$.

c) Mostre ainda que a multiplicação no produto smash $A\#H^*$ pode ser escrita como

$$(a\#\phi)(b\#\psi) = ab^{(0)}\#(\phi \leftharpoonup b^{(1)})\psi.$$

6) Seja H uma biálgebra e A um H-comódulo álgebra à direita. Defina no espaço vetorial $\#(H, A) = \mathrm{Hom}_k(H, A)$ um produto $*$, dado por

$$(f * g)(h) = f(g(h_{(2)})^{(1)}h_{(1)})g(h_{(2)})^{(0)}$$

e unidade $\eta_A \circ \epsilon_H$. Mostre que $\#(H, A)$ com esta estrutura é uma álgebra. Mostre também que existem monomorfismos de álgebra $\varphi : A \to \#(H, A)$, e $\imath : H^* \to \#(H, A)$ dados, respectivamente, por

$$\varphi(a)(h) = \epsilon(h)a, \qquad \text{e}, \qquad \imath(f) = \eta_A \circ f.$$