Sobre Anéis Primos, Semiprimos e suas Relações

Mateus Medeiros Teixeira

17 de julho de 2014

Resumo

Neste trabalho apresentamos os anéis primos e semiprimos, buscando suas caracterizações e relações com anéis simples, semissimples, primitivo e semiprimitivo (J-semissimples)

Palavras-chaves: Teoria de anéis não comutativos; Anéis primos; Anéis semiprimos

Introdução

A teoria moderna de anéis começou quando J. H. M. Wedderburn demonstrou seu famoso teorema de estrutura para álgebras semi-simples de dimensão finita sobre corpos, em 1907. Vinte anos mais tarde, E. Noether e E. Artin introduziram as condições de cadeia ascentente e de cadeia descendente sobre ideais unilaterais, substituindo a dimensão finita, e Artin provou o análogo do teorema de Wedderburn para anéis (álgebras) semi-simples. Esta teoria passou a ser, desde então, a pedra fundamental da teoria de anéis não-comutativos.

Neste trabalho, objetivamos estudar alguns tópicos desta teoria, mais precisamente, os anéis e módulos simples e semi-simples, anéis J-semi-simples (ou Jacobson semi-simples, ou semiprimitivo), anéis e ideais primos e semiprimos, anéis primitivos à esquerda (à direita). Neste sentido, veremos suas caracterizações e procuraremos as relações existentes entre estes anéis.

1 Anéis Semi-simples e Radical de Jacobson

Nesse capítulo trabalhamos com duas classes importantes de anéis, a saber, a dos anéis semi-simples e dos anéis J-semi-simples. Estudamos as caracterizações destes anéis, assim como, estabelecemos uma relação entre eles. Por fim, enunciamos, sem demonstrar, o teorema de Wedderburn-Artin, que é um importante resultado de caracterização para anéis semissimples.

1.1 Condições de Cadeia

Nesta seção, definimos módulos e anéis noetherianos (artinianos). Para isso, falamos brevemente sobre condições de cadeia. Nosso objetivo é apenas lembrar definições e resultados relacionados, sem demonstrá-los.

Dado um conjunto C, dizemos que uma família de subconjuntos $F = \{C_i : i \in I\}$ de C satisfaz a condição de cadeia ascendente (CCA) se F não contém uma subfamília estritamente crescente $C_{i_1} \subsetneqq C_{i_2} \subsetneqq \cdots$, ou seja, para qualquer cadeia ascendente $C_{i_1} \subseteq C_{i_2} \subseteq \cdots$ de elementos de F, existe um inteiro n tal que $C_{i_n} = C_{i_{n+1}} = C_{i_{n+2}} = \cdots$.

A condição de cadeia descendente (CCD) é formulada de maneira semelhante, invertendo o sentido das inclusões.

Definição 1.1 *Seja M um A-módulo à esquerda. Dizemos que o módulo M é noetheriano (respectivamente artiniano) se a família de todos os submódulos de M satisfaz CCA (respectivamente CCD).*

Para o caso em que $M = A$ temos as definições para anéis noetherianos e artinianos.

Dizemos que o anel A é noetheriano à esquerda (respectivamente à direita) se A é noetheriano quando visto como um A-módulo à esquerda (respectivamente à direita) e artiniano à esquerda (respectivamente à direita) se A é artiniano quando visto como um A-módulo à esquerda (respectivamente à direita). Se o anel A é noetheriano à esquerda e à direita, A diz-se simplesmente noetheriano. O mesmo vale para o caso artiniano.

Apresentamos agora um resultado bem conhecido e muito útil para encontramos exemplos de módulos noetherianos. Ao leitor interessado, indicamos ([1], Theorem 1.9, p. 375).

Proposição 1.2 *Um módulo M é noetheriano se, e somente se, cada submódulo de M é finitamente gerado (M é um A-módulo finitamente gerado se existem $m_1, \cdots, m_s \in M$ tais que $M = Am_1 + Am_2 + \cdots + Am_s$).*

Exemplo 1.3 *O $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$ é noetheriano, pois todo submódulo de $\mathbb{Z}$ é cíclico e portanto finitamente gerado. Entretanto, o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$ não é artiniano, pois obtemos a cadeia estritamente crescente de ideais de $\mathbb{Z}$*

$$2\mathbb{Z} \supsetneqq 4\mathbb{Z} \supsetneqq 8\mathbb{Z} \supsetneqq \cdots \supsetneqq 2^n\mathbb{Z} \supsetneqq \cdots .$$

Exemplo 1.4 *Corpos e anéis de divisão são anéis noetherianos e artinianos.*

Para finalizar esta seção, gostaríamos de lembrar um resultado útil para o trabalho. Para tanto, apresentamos primeiramente duas definições. Para maiores detalhes, veja ([1], p. 375)

Definição 1.5 *Dado um A-módulo à esquerda M, uma série normal para M é uma cadeia de submódulos*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_s.$$

Os fatores da série são os módulos quocientes M_i/M_{i+1} ($i = 0, 1, \cdots, s-1$).

Definição 1.6 *Uma série de composição (finita) para um A-módulo M é uma série normal $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_s$ tal que cada fator da série, isto é, M_i/M_{i+1} é um A-módulo simples para todo $i \in \{1, 2, \cdots, s-1\}$.*

Teorema 1.7 *Um A-módulo à esquerda M é noetheriano e artiniano se, e somente se, M possui um série de composição finita.*

1.2 Módulos Semi-simples

Definição 1.8 *Um A-módulo M é dito semi-simples se todo submódulo de M é um somando direto de M.*

Proposição 1.9 *Todo submódulo de um módulo semi-simples é semi-simples.*

Demonstração: Sejam M um módulo semi-simples e N um submódulo de M. Seja H um submódulo de N. Provemos que existe um submódulo P de N tal que $N = P \oplus H$.

Sendo M semi-simples, existe um submódulo J de M tal que $M = J \oplus H$, pois H é um submódulo de M. Mostremos que $N = (J \cap N) \oplus H$.

É claro que $(J \cap N) \cap H = \{0\}$, pois $J \cap N \cap H \subset J \cap H = \{0\}$. Como $(J \cap N) \oplus H$ é um submódulo de N, resta provarmos que $N \subset (J \cap N) \oplus H$.

Seja $n \in N$. Então $n \in M$ e portanto, $n = u + v$ onde $u \in J$ e $v \in H$. Daí, $u \in J \cap N$, pois $u = n - v$. Portanto $n = u + v \in (J \cap N) \oplus H$ e então $N = (J \cap N) \oplus H$. Logo, N é semi-simples. ∎

Exemplo 1.10 *Seja K um corpo. Então todo K-espaço vetorial é um K-módulo semi-simples. Em particular, K é um K-módulo semi-simples.*

De fato, sua única decomposição é a trivial, isto é, $K = K \oplus \{0\}$

Exemplo 1.11 *Todo módulo simples é semi-simples.*

De fato, seja M um módulo simples. Então seus únicos submódulos são $\{0\}$ e M e obviamente $M = \{0\} \oplus M$.

Consideremos D um anel de divisão. Notemos que D não possui ideais à esquerda e nem à direita que não sejam os triviais. Portanto, ${}_D D$ e D_D são simples e consequentemente semi-simples.

O seguinte resultado é interessante, pois garante que todo módulo semi-simples não-nulo possui submódulo simples. Este resultado é fortemente usado na demonstração do Teorema 1.13 a seguir.

Proposição 1.12 *Todo A-módulo semi-simples não-nulo contém um submódulo simples.*

Demonstração: Seja M um A-módulo semi-simples não-nulo. Seja $0 \neq m \in M$. Então Am é um submódulo não-nulo de M e, pela Proposição 1.9, temos que Am é semi-simples. Mostremos que Am contém um submódulo simples. Pelo Lema de Zorn, existe N um submódulo de Am que é maximal com respeito a propriedade de que $m \notin N$. Sendo Am semi-simples, existe N' submódulo de Am tal que $Am = N \oplus N'$.

É claro que N' é não-nulo, pois caso contrário, $Am = N$ e teríamos um absurdo, pois m não pertenceria a Am.

Mostremos que N' é simples. Seja N'' um submódulo não-nulo de N'. Então $N \oplus N''$ deve conter m (pela maximidade de N). Logo, $Am = N \oplus N''$ e isso implica que $N'' = N'$. ■

O teorema abaixo não é demonstrado aqui. Indicamos ([2], p. 26).

Teorema 1.13 *Seja M um A-módulo. São equivalentes:*
(i) *M é semi-simples;*
(ii) *M é soma direta de uma família de submódulos simples;*
(iii) *M é soma de uma família de submódulos simples.*

1.3 Anéis Semi-simples

Um anel A é dito semi-simples à esquerda se A, como A-módulo à esquerda, é semi-simples, isto é, ${}_A A$ é semi-simples. Analogamente, definimos anel semi-simples à direita considerando A como A-módulo à direita.

O teorema abaixo caracteriza anéis semi-simples à esquerda. O análogo do mesmo caracteriza anéis semi-simples à direita.

Teorema 1.14 *Seja A um anel. Então são equivalentes:*
(i) *A é semi-simples à esquerda;*
(ii) *toda sequência exata curta de A-módulos à esquerda cinde;*
(iii) *todo A-módulo à esquerda é semi-simples.*

Demonstração: (ii) $\Rightarrow$ (iii) Seja M um A-módulo e N um submódulo de M. Sabemos que a sequência $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \to 0$ cinde. Portanto, N é um somando direto de M.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) Seja M um A-módulo à esquerda semi-simples. Consideremos a sequência exata curta $0 \to P \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} G \to 0$. Como $Im(f)$ e $Ker(g)$ são submódulos de M, segue que $Im(f)$ e $Ker(g)$ são somandos diretos de M, pois M é semi-simples. Logo, a sequência cinde.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Como todo A-módulo à esquerda é semi-simples, segue que A é semi-simples à esquerda.
(i) $\Rightarrow$ (iii) Seja M um A-módulo à esquerda. Se $M = \{0\}$, claramente M é semi-simples à esquerda.

Suponhamos $M \neq \{0\}$. Então existe $0 \neq m \in M$. Consideremos o A-submódulo cíclico Am de M.

Seja o epimorfismo de módulos $\varphi : A \to Am$ dado por $\varphi(a) = am$. Claramente $A/Ker(\varphi) \cong Am$. Como A é semi-simples à esquerda, podemos escrever $A = Ker(\varphi) \oplus I$, onde I é um submódulo semi-simples de A.

Portanto, $Am \cong (Ker(\varphi) \oplus I)/Ker(\varphi) \cong I$.

Logo, Am é um A-módulo semi-simples e, pelo Teorema 1.13, Am é uma soma de módulos simples. Agora, $M = \sum\limits_{m \in M} Am$ e segue novamente do Teorema 1.13 que M é semi-simples. ■

Exemplo 1.15 *Corpos e anéis de divisão são anéis semi-simples à esquerda.*

Definição 1.16 *Dizemos que I é um ideal à esquerda minimal de A se $I \neq \{0\}$ e se J é um ideal à esquerda de A tal que $\{0\} \subset J \subset I$ então $J = \{0\}$ ou $J = I$.*

Corolário 1.17 *Todo anel semi-simples à esquerda é noetheriano à esquerda e artiniano à esquerda.*

Demonstração: Seja A um anel semi-simples à esquerda. Podemos escrever ${}_AA = \bigoplus\limits_{i \in I} U_i$, onde os $U_i's$ são A-submódulos simples de A (de fato, cada U_i é um ideal à esquerda minimal de A).

Temos que $1 \in A$ e é escrito como $1 = u_{i_1} + \cdots + u_{i_t}$ onde $u_{i_j} \in U_{i_j}$ para $j \in \{1, 2, \cdots, t\}$. Logo, $A \subset \bigoplus\limits_{j=1}^{t} U_{i_j} \subset A$ e assim, $A = \bigoplus\limits_{j=1}^{t} U_{i_j}$.

Reindexando e reordenando os índices $i_j's$, chamamos $J = \{1, \cdots, t\}$. Logo, $A = \bigoplus_{i \in J} U_i$ é uma soma direta finita. Daí,

$$A = \bigoplus_{i \in J} U_i \supset \bigoplus_{i=1}^{t-1} U_i \supset \bigoplus_{i=1}^{t-2} U_i \supset \cdots \supset \bigoplus_{i=1}^{2} U_i \supset U_1 \supset 0$$

e isso nos diz que ${}_A A$ possui uma série de composição.

Pelo Teorema 1.7, ${}_A A$ é artiniano e noetheriano, isto é, A como um anel é noetheriano à esquerda e artiniano à esquerda. ■

Os resultados a seguir são utilizados na demonstração fo principal resultado deste artigo. Porém vamos apresentá-los agora em virtude do contexto em que estamos.

Lembramos que um anel A é simples se, e somente se, seus únicos ideais são os triviais ($\{0\}$ e A).

Teorema 1.18 *Seja A um anel simples. Então são equivalentes:*
(i) *A é artiniano à esquerda;*
(ii) *A é semi-simples à esquerda;*
(iii) *A tem um ideal minimal à esquerda;*
(iv) *$A \cong M_n(D)$ para algum número natural n e algum anel de divisão D.*

Demonstração: (i)$\Rightarrow$ (ii) Seja U um ideal à esquerda minimal de A (existe pois A é artiniano). Defina B_U como a soma de todos os ideais minimais à esquerda de A que são isomorfos a U como A-módulos à esquerda. Claramente B_U é ideal à esquerda de A e ainda, $B_U \neq \{0\}$. Logo, como A é simples, $B_U = A$. Mas então ${}_A A$ é semi-simples como um A-módulo e portanto, A é semi-simples à esquerda.

Para as demais implicações (por não fazerem parte do escopo deste trabalho, indicamos [2]) ■

O teorema acima nos diz que um anel simples satisfazendo CCD é semi-simples à esquerda. A hipótese de satisfazer CCD é essencial, pois abaixo exibimos um exemplo de anel simples (este não satisfaz CCD) que não é semi-simples.

Exemplo 1.19 *Sejam D um anel de divisão e $V_D = \bigoplus_{i \geqslant 1} e_i D$ um D-espaço vetorial à direita de dimensão infinita. Consideremos $E = End(V_D)$ e I um ideal de E consistindo de posto finito. Então o quociente $A = E/I$ é anel simples mas não é semi-simples.*

Finalizamos esta seção com o teorema de Wedderburn-Artin. O teorema de Wedderburn-Artin é muito importante, pois a maneira como os anéis semissimples à esquerda (à direita) são caracterizados (produto de matrizes quadradas sobre anéis de divisão) nos traz, como corolário, que anéis semissimples à esquerda são semissimples à direita (e reciprocamente), ou seja, podemos dizer apenas anéis semissimples.

Teorema 1.20 ***(Teorema de Wedderburn-Artin)*** *Seja A um anel semi-simples à esquerda. Então $A \cong M_{n_1}(D_1) \times M_{n_2}(D_2) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$ para anéis de divisão $D_1, \cdots, D_r$ e inteiros positivos $n_1, \cdots, n_r$ convenientes. O número r é unicamente determinado, assim como os pares $(n_1, D_1), \cdots, (n_r, D_r)$. Então há exatamente r módulos simples à esquerda mutuamente não isomorfos.*

1.4 Radical de Jacobson

O radical de Jacobson de um anel A é denotado por $rad\ A$ e é definido como a intersecção de todos os ideais à esquerda maximais de A.

De acordo com esta definição, $rad\ A$ deveria ser chamado radical à esquerda de A. Similarmente, definimos radical à direita de A como sendo a intersecção de ideais à direita maximais. De fato, o radical à direita e à esquerda coincidem e essa distinção é portanto desnecessária.

Proposição 1.21 *Seja A um anel não-nulo. Então A possui ideais à esquerda maximais.*

Demonstração: Seja $F = \{I : I$ é ideal à esquerda próprio de $A\}$. Claramente, $F \neq \emptyset$ pois $0 \in F$ e consideremos F parcialmente ordenado pela inclusão.

Seja F' um subconjunto não vazio de F e totalmente ordenado. Consideremos $J = \bigcup_{I' \in F'} I'$. Claramente, J é um ideal à esquerda de A, pois F' é totalmente ordenado. Por outro lado, $J \neq A$, pois caso contrário, $1 \in J$. Logo, $1 \in I'$ para algum $I' \in F'$ e isso nos dá que $I' = A$, absurdo.

Logo, $J \in F$ e é uma cota superior para F' em F. Pelo Lema de Zorn, existe I um elemento maximal em F, isto é, I é um ideal à esquerda próprio de A tal que se K é ideal à esquerda próprio de A tal que $I \subset K \subsetneqq A$ então $K = I$, ou seja, I é ideal à esquerda maximal de A. ■

Do exposto acima, $rad\ A \neq A$. Se $A = 0$, não há ideais à esquerda maximais e definimos $rad\ A = 0$.

O lema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em ([2], p. 50) nos dá uma caracterização dos elementos do $rad\ A$.

Lema 1.22 *Seja $y \in A$. Então são equivalentes:*
(i) *$y \in rad\ A$;*
(ii) *$1 - xy$ é invertível à esquerda para qualquer $x \in A$;*
(iii) *$yM = 0$ para qualquer A-módulo à esquerda simples M.*

Lembramos que o anulador de um módulo M é dado por $An_A(M) := \{a \in A : am = 0, \forall\ m \in M\}$.

Observemos que no caso em que $A \neq 0$, a existência de ideais à esquerda maximais de A nos dá trivialmente a existência de A-módulos simples (veja Teorema **??**), sendo que no caso $A = 0$, $rad\ A = 0$. Podemos enunciar o seguinte

Corolário 1.23 *$rad\ A = \bigcap An_A(M)$, interseção dos anuladores de todos os A-módulos simples. Em particular, $rad\ A$ é um ideal de A.*

Demonstração: Provemos que $rad\ A \subseteq \bigcap An_A(M)$. Seja $y \in rad\ A$. Pelo Lema 1.22, $yN = 0$ para qualquer A-módulo simples N. Logo, $y \in An_A(N)$, para qualquer A-módulo simples N, isto é, $y \in \bigcap An_A(M)$ (interseção dos anuladores de todos os A-módulos simples).

Agora, seja $y \in \bigcap An_A(M)$, para todo M simples. Então, $yM = 0$ para todo A-módulo simples M. Pelo Lema 1.22, $y \in rad\ A$.

É claro que $rad\ A$ é um ideal de A, pois é a interseção de ideais de A. ■

Definição 1.24 *Seja A um anel. Dizemos que A é Jacobson semi-simples (ou J-semi-simples) se $rad\ A = 0$.*

Mais adiante, veremos que a noção de J-semisimplicidade é bem relacionada com a noção de simplicidade.

Exemplo 1.25 *$\mathbb{Z}$ é um anel J-semi-simles, pois $rad\ \mathbb{Z} = \bigcap_{p\ primo} p\mathbb{Z} = 0$, mas $\mathbb{Z}$ não é semi-simples ($\mathbb{Z}$ não é artiniano).*

Lema 1.26 *Seja A um anel não-nulo. Então todo ideal à esquerda próprio de A está contido em um ideal à esquerda maximal.*

Demonstração: Seja B um ideal à esquerda próprio de A. Consideremos $F = \{I \subsetneqq A : I$ é ideal à esquerda de A e $B \subset I\}$. Temos que $F \neq \emptyset$, pois $B \in F$. Suponhamos que F seja parcialmente ordenado pela inclusão.

Seja F' um subconjunto não vazio de F e totalmente ordenado. Claramente, $J = \bigcup_{I' \in F'} I'$ é um ideal à esquerda de A, pois F' é totalmente ordenado e $J \neq A$. Por outro lado, $B \subset J$ pois $B \subset K$ para algum $K \in F' \subset F$ (na verdade, $B \subset I'$, para todo $I' \in F'$). Assim, $J \in F$ e é uma cota superior para F' em F. Pelo Lema de Zorn, F possui um elemento maximal, existe I ideal à esquerda próprio de A tal que $B \subset I$ e se K é um elemento de F tal que $I \subset K \subsetneqq A$ então $K = I$, isto é, I é ideal à esquerda maximal. ■

Teorema 1.27 *Seja A um anel. Então são equivalentes:*
(i) *A é semi-simples;*
(ii) *A é J-semi-simples e artiniano à esquerda.*

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja A um anel semi-simples e $U = rad\ A$. Então podemos escrever $A = U \oplus B$ para algum ideal à esquerda B de A. Suponhamos $U \neq 0$. Isto implica que $A \neq 0$ e daí, $U \neq A$. Logo, $B \neq 0$. Pelo Lema 1.26, existe M um ideal à esquerda maximal de A tal que $B \subset M$. Por definição, $U = rad\ A \subset M$ e assim, $U + B \subset M$. Portanto, $M = A$ e isso é um absurdo.

Sendo A semi-simples, segue, pelo Corolário 1.17, que A é artiniano à esquerda.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Observemos primeiro que todo ideal à esquerda minimal I de A é um somando direto de ${}_AA$. Como $rad\ A = 0$, segue que existe um ideal à esquerda maximal M de A tal que $I \not\subset M$, pois caso contrário, isto é, se I estivesse contido em qualquer ideal à esquerda maximal de A então $I \subset rad\ A = 0$, absurdo pois $I \neq \{0\}$. Sendo que I é minimal, M é maximal e $I \not\subset M$, segue que $I \cap M = \{0\}$ e $I + M = A$. Logo, $I \oplus M =_A A$.

Agora, A é artiniano à esquerda então é claro que A possui um ideal à esquerda minimal A_1 e, pelo que observamos acima, ${}_AA = A_1 \oplus B_1$ para algum ideal à esquerda B_1 de A. Aplicando novamente CCD, existe um ideal à esquerda minimal $A_2 \subset B_1$ de A. Além disso, ${}_AA = A_2 \oplus B_2$ para algum ideal à esquerda B_2 de A. Segue que $A = A_1 \oplus A_2 \oplus (B_1 \cap B_2)$. Repetindo o procedimento, obtemos

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n \oplus (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n),$$

onde $B_1 \supset B_1 \cap B_2 \supset \cdots \supset B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n$ e os ideais à esquerda $A_i's$ são minimais. Por hipótese, existe um inteiro m tal que $B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_m = 0$. Assim, $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_m$ e A é semi-simples, os $A_i's$ sendo ideais à esquerda minimais equivalem a A-submódulos simples. ■

Finalizamos esta seção com uma relação entre ideais nil e $rad\ A$ do anel A.

Definição 1.28 *Um ideal U de A é dito nil se U é constituído por elementos nilpotentes do anel A (lembrando que um elemento $x \in A$ é dito nilpotente se $x^n = 0$, para algum $n \geqslant 1$).*

Exemplo 1.29 *Considere o anel $A = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \cdots]/(x_1^2, x_2^3, x_3^4, \cdots)$ (onde $(x_1^2, x_2^3, x_3^4, \cdots)$ é o ideal gerado por $x_1^2, x_2^3, x_3^4, \cdots$) e o ideal U gerado por $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \cdots$. Portanto, U é um ideal nil.*

Temos que $U = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots)$ e claramente $\overline{x_i}^{i+1} = \overline{0}$, para todo $i \in \{1, 2, \cdots\}$. Seja $\overline{x} \in U$. Então $\overline{x} = \sum_{i \in F} \overline{a_i}\, \overline{x_i}$, onde F é um subconjunto finito de $\{1, 2, \cdots\}$ e $\overline{a_i} \in A$, para todo $i \in F$. Devemos mostrar que $\overline{x}$ é nilpotente. Para isto, observamos que

(i) como A é anel comutativo, então para qualquer $\overline{a} \in A$, se $\overline{y} \in A$ é nilpotente, então $\overline{a}\,\overline{y}$ é nilpotente. De fato, suponhamos $\overline{y}^{\,n} = \overline{0}$, para algum $n \geqslant 1$. Daí, $(\overline{a}\,\overline{y})^{\,n} = \overline{a}^{\,n}\overline{y}^{\,n} = \overline{0}$;

(ii) se $\overline{x}$ e $\overline{y}$ são elementos nilpotentes de A, como $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{y}\,\overline{x}$ (A é comutativo), segue que $\overline{x}+\overline{y} = \overline{x+y}$ é um elemento nilpotente. Basta desenvolvermos $(\overline{x+y})^{n+m}$, onde $\overline{x}^{\,n} = 0 = \overline{y}^{\,m}$ e chegaremos que $(\overline{x}+\overline{y})^{n+m} = (\overline{x+y})^{n+m} = \overline{0}$. Por indução, não é difícil mostrar que se $\overline{y_1}, \overline{y_2}, \cdots, \overline{y_k}$ são elementos nilpotentes de A então também o é $\overline{y_1} + \overline{y_2} + \cdots + \overline{y_k}$.

Agora, de (i) e (ii) é fácil ver que $\overline{x}$ acima é nilpotente.

Teorema 1.30 *Seja U um ideal nil de A. Então $U \subset rad\ A$.*

Demonstração: Seja $y \in U$. Então para qualquer $x \in A$, $xy \in U$ e portanto, xy é nilpotente. Daí, existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ tal que $(xy)^n = 0$.

Verificamos que $\sum\limits_{i=0}^{n-1} (xy)^i$ é o inverso de $1 - xy$. De fato,

$$\begin{aligned}
(1-xy)\sum_{i=0}^{n-1}(xy)^i &= (1-xy)(1+xy+(xy)^2+\cdots+(xy)^{n-1}) \\
&= 1+xy+(xy)^2+\cdots+(xy)^{n-1}-xy-(xy)^2-\cdots-(xy)^{n-1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Analogamente, $(\sum\limits_{i=0}^{n-1} (xy)^i)(1-xy) = 1$. Logo, pelo Lema 1.22, $y \in rad\ A$. ∎

2 Anéis Primos e Semiprimos

Nesse capítulo, nos dedicamos a estudar a estrutura dos anéis primos e semiprimos. Veremos a relação entre essas duas estruturas e além disso, a relação que essas estruturas possuem com as estruturas de anéis já vistas até agora e também com a estrutura de anéis primitivos, que enunciaremos no final do capítulo.

2.1 Ideais Primos

Seja I um ideal de um anel A. Dizemos que I é um ideal completamente primo se para $x, y \in A$ tais que $xy \in I$, então $x \in I$ ou $y \in I$.

Dizemos que I é um ideal primo se para quaisquer ideais U e V de A tais que $UV \subseteq I$ então $U \subseteq I$ ou $V \subseteq I$.

Quando A é um anel comutativo, temos o seguinte resultado

Proposição 2.1 *Um ideal I é completamente primo se, e somente se, I é ideal primo.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Consideremos U e V dois ideais não-nulos de A tais que $UV \subseteq I$ (os casos em que U ou V são nulos são triviais). Suponhamos que $V \not\subseteq I$. Mostremos que $U \subseteq I$.

De fato, sejam $v \in V \backslash I$ e $u \in U$ tais que $uv \in I$. Por hipótese, $u \in I$ ou $v \in I$. Como $v \in V \backslash I$, segue que $u \in I$. Portanto $U \subseteq I$.

($\Leftarrow$) Sejam $x, y \in A$ tais que $xy \in I$. Consideremos os ideais Ax e Ay. Então $AxAy \overset{(*)}{=} Axy \subseteq I$.

A igualdade $(*)$ vale, pois A é comutativo. Se $Ax \subseteq I$ então $x \in I$. Se $Ay \subseteq I$ então $y \in I$. ■

Vemos assim que as definições de ideais completamente primo e primo são equivalentes no contexto comutativo.

A proposição a seguir nos dá outras formas de caracterizar ideais primos em anéis arbitrários. Lembramos que $(u) = AuA$ denota o ideal gerado por $u \in A$, para qualquer $u \in A$.

Proposição 2.2 *Para um ideal I de A são equivalentes:*
(i) *I é primo;*
(ii) *dados $u, v \in A$ tais que $(u)(v) \subseteq I$ então $u \in I$ ou $v \in I$;*
(iii) *dados $u, v \in A$ tais que $uAv \subseteq I$ então $u \in I$ ou $v \in I$;*
(iv) *dados U e V ideais à esquerda de A tais que $UV \subseteq I$ então $U \subseteq I$ ou $V \subseteq I$;*
(iv)' *dados U e V ideais à direita de A tais que $UV \subseteq I$ então $U \subseteq I$ ou $V \subseteq I$;*

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Se $(u)(v) \subseteq I$ para $u, v \in A$, então segue por (i) que $(u) \subseteq I$ ou $(v) \subseteq I$. Logo, $u \in I$ ou $v \in I$
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Notemos que $(u)(v) = AuAAvA \subseteq AuAvA$. Como $uAv \subseteq I$ por hipótese, segue que $AuAvA \subseteq AIA \subseteq I$, pois I é ideal de A. Logo, $(u)(v) \subseteq I$ e por (ii) segue que $u \in I$ ou $v \in I$.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sejam U e V ideais à esquerda de A tais que $UV \subseteq I$. Suponhamos que $U \not\subseteq I$. Devemos provar que $V \subseteq I$.

Sejam $u \in U \backslash I$ e $v \in V$. Como V é ideal à esquerda de A, vem que $uAv \subseteq UV \subseteq I$. Por (iii) segue que $u \in I$ ou $v \in I$. Como $u \notin I$, segue que $v \in I$ e daí $V \subseteq I$.
(iv) $\Rightarrow$ (i) Sejam U e V ideais de A tais que $UV \subseteq I$. Claramente U e V são ideais à esquerda de A e portanto, $U \subseteq I$ ou $V \subseteq I$.

As implicações (iii) $\Rightarrow$ (iv)' e (iv)' $\Rightarrow$ (i) são análogas, considerando ideais à direita. ■

Observamos que todo ideal maximal de A é primo, sendo falsa a recíproca.

De fato, sejam I, J ideais de A tais que $IJ \subset M$. Queremos mostrar que $I \subset M$ ou $J \subset M$.

Suponhamos que $I \not\subset M$. Como M é maximal, segue que $I + M = A$. Por outro lado, $J + M = A(J + M) = (I + M)(J + M) \overset{(*)}{\subset} IJ + M \subset M$, pois $IJ \subset M$. Assim, $J + M \subset M$ e portanto, $J \subset M$.

Provando $(*)$: seja $z \in (I + M)(J + M)$. Então $z = \sum\limits_{i \in F} x_i y_i$, onde $x_i \in I + M$ e $y_i \in J + M$, para todo $i \in F$, onde F é um conjunto finito. Assim, para cada $i \in F$, temos $x_i = a_i + b_i$ e $y_i = c_i + d_i$ com $a_i \in I$, $c_i \in J$ e $b_i, d_i \in M$.

Portanto, $z = \sum\limits_{i \in F}(a_i + b_i)(c_i + d_i) = \sum\limits_{i \in F} a_i c_i + \sum\limits_{i \in F}(a_i d_i + b_i c_i + b_i d_i) \in IJ + M$.

Exemplo 2.3 *$\{0\}$ é um ideal primo em $\mathbb{Z}$ e não é maximal.*

Exemplo 2.4 *Considerando A um anel simples, então o anel $M_n(A)$ (anel das matrizes $n \times n$ com entradas em A) é um anel simples.*

Este fato é devido ao seguinte resultado que pode ser visto em ([2], Theorem 3.1, p. 31):

Seja A um anel. Então todo ideal I de $M_n(A)$ é da forma $M_n(J)$ para um ideal unicamente determinado J de A. Em particular, se A é simples o é $M_n(A)$.

Mostraremos no fim deste capítulo que todo anel simples é primo. Assim, o anel $M_n(A)$ é simples se A é simples e portanto, um anel primo.

Definição 2.5 *Um conjunto não vazio $S \subseteq A$ é chamado m-sistema se para quaisquer $u, v \in S$, existe $a \in A$ tal que $uav \in S$.*

Exemplo 2.6 *Todo conjunto não vazio multiplicativamente fechado é um m-sistema.*

Exemplo 2.7 *Sejam A um anel e $a \in A$. O conjunto $\{a, a^2, a^4, a^8, \cdots\}$ é um m-sistema.*

Corolário 2.8 *Um ideal I de A é primo se, e somente se, $A \setminus I$ é um m-sistema.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Sejam $u, v \in A \setminus I$. Como I é primo, temos que se $uAv \subseteq I$ então $u \in I$ ou $v \in I$ o que é um absurdo visto que tomamos $u, v \in A \setminus I$. Assim, existe $a \in A$ tal que $uav \notin I$, isto é, $uav \in A \setminus I$. Logo, $A \setminus I$ é um m-sistema.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos $u, v \in A$ tais que $uAv \subseteq I$, mas $u \notin I$ e $v \notin I$. Daí, $u, v \in A \setminus I$ e por ser $A \setminus I$ um m-sistema, existe $a \in A$ tal que $uav \in A \setminus I$, o que é um absurdo, pois $uAv \subseteq I$. ■

Proposição 2.9 *Sejam $S \subseteq A$ um m-sistema e I um ideal maximal com respeito à propriedade de que I não intercepta S. Então I é um ideal primo.*

Demonstração: Suponhamos que I não seja um ideal primo. Daí, existem $u, v \in A$ tais que $(u)(v) \subseteq I$, mas $u \notin I$ e $v \notin I$. Sendo que $I \subsetneqq I + (u)$ e $I \subsetneqq I + (v)$ segue, pela maximalidade da propriedade de I, que existem $s, s' \in S$ tais que $s \in I + (u)$ e $s' \in I + (v)$. Sendo S um m-sistema, existe $a \in A$ tal que $sas' \in S$. Então $sas' \in (I+(u))A(I+(v)) \subseteq I+(u)(v) \subseteq I$ e isso é uma contradição, pois $sas' \in S \cap I$. Logo, I é ideal primo. ■

Definição 2.10 *Para um ideal U em um anel A, definimos o radical de U por $\sqrt{U} = \{s \in A :$ todo m-sistema contendo s intercepta $U\}$.*

Observação 2.11 *Na verdade, $\sqrt{U} \subseteq \{s \in A : s^n \in U$ para algum $n \geqslant 1\}$.*

De fato, seja $x \in \sqrt{U}$ e consideremos o m-sistema $S = \{x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$. Por hipótese, $S \cap U \neq \emptyset$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geqslant 1$ tal que $x^{n_0} \in S \cap U$ e portanto, $x^{n_0} \in U$. Logo, $x \in \{s \in A : s^n \in U$ para algum $n \geqslant 1\}$.

Teorema 2.12 *Para qualquer ideal U de A, $\sqrt{U}$ é igual a interseção de todos os ideais primos que contêm o ideal U. Em particular, $\sqrt{U}$ é um ideal de A.*

Demonstração: Sejam $s \in \sqrt{U}$ e P um ideal primo de A tal que $U \subseteq P$. Assim, $A \setminus P$ é um m-sistema e notemos que $s \notin A \setminus P$, pois se $s \in A \setminus P$ então $(A \setminus P) \cap U \neq \emptyset$ o que implicaria $(A \setminus P) \cap P \neq \emptyset$, o que é um absurdo. Logo, $s \in P$, para todo ideal primo P que contém U.

Reciprocamente, mostremos que $\bigcap\limits_{\substack{P \text{ primo} \\ U \subseteq P}} P \subset \sqrt{U}$. Suponhamos que exista $s \in \bigcap\limits_{\substack{P \text{ primo} \\ U \subseteq P}} P$ tal que $s \notin \sqrt{U}$. Daí, existe um m-sistema S que contém s e é tal que $S \cap U = \emptyset$. Pelo Lema de Zorn, existe um ideal P de A que contém U e que é maximal com respeito à propriedade de ser disjunto de S. Pela Proposição 2.9, P é ideal primo e portanto, $s \notin P$, o que é um absurdo. ■

2.2 Ideais Semiprimos, Anéis Primos e Semiprimos

Nesta seção, introduzimos a noção de ideal semiprimo, vímos a relação entre um ideal semiprimo e seu radical, para então definirmos os anéis primos (anéis semiprimos).

Definição 2.13 *Um ideal C de um anel A é dito um ideal semiprimo se para todo ideal U de A tal que $U^2 \subseteq C$ então $U \subseteq C$.*

Notemos que todo ideal primo é semiprimo.

A proposição abaixo nos dá definições equivalentes de um ideal semiprimo.

Proposição 2.14 *Para um ideal C de A são equivalentes:*
(i) *C é semiprimo;*
(ii) *dado $r \in A$ tal que $(r)^2 \subseteq C$ então $r \in C$;*
(iii) *dado $r \in A$ tal que $rAr \subseteq C$ então $r \in C$;*
(iv) *dado U um ideal à esquerda A tal que $U^2 \subseteq C$ então $U \subseteq C$;*
(iv)' *dado U um ideal à direita A tal que $U^2 \subseteq C$ então $U \subseteq C$.*

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Temos que $(r)^2 \subseteq C$ e como C é um ideal semiprimo, segue que $(r) \subseteq C$, ou seja, $r \in C$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Notemos que $(r)(r) = ArAArA \subseteq ArArA$. Como $rAr \subseteq C$ por hipótese, segue que $ArArA \subseteq ACA \subseteq C$. Logo, $(r)^2 \subseteq C$ e por (ii), $r \in C$.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) Seja U ideal à esquerda de A tal que $U^2 \subseteq C$. Suponhamos que $U \not\subseteq C$. Tomemos $u \in U \backslash C$. Como U é ideal à esquerda de A, segue que $uAu \subseteq U^2 \subseteq C$. Logo, $u \in C$ por (iii) e isso é um absurdo.
(iv) $\Rightarrow$ (i) Seja U ideal de A tal que $U^2 \subseteq C$. Claramente U é ideal à esquerda de A e portanto, $U \subseteq C$.

As implicações (iii) $\Rightarrow$ (iv)' e (iv)' $\Rightarrow$ (i) são análogas, considerando ideais à direita. ■

Definição 2.15 *Um conjunto não vazio S de A é chamado n-sistema se para qualquer $u \in S$, existe $a \in A$ tal que $uau \in S$.*

Notemos que todo m-sistema é um n-sistema.

Corolário 2.16 *Um ideal C é semiprimo se, e somente se, $A \backslash C$ é um n-sistema*

Demonstração: A demonstração é análoga à demonstração do Corolário 2.8. ■

Lema 2.17 *Sejam N um n-sistema e $v \in N$. Então existe um m-sistema $M \subseteq N$ tal que $v \in M$.*

Demonstração: Definimos $M = \{m_1, m_2, m_3, \cdots\}$, onde $m_1 = v \in N$, $m_2 = m_1 a_1 m_1 \in N$ (para algum $a_1 \in A$), $m_3 = m_2 a_2 m_2 \in N$ (para algum $a_2 \in A$), e assim sucessivamente para todos os elementos de M. Provemos que M é um m-sistema, ou seja, para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$, $m_i A m_j$ contém elementos de M. De fato, sejam $i, j \in \mathbb{N}$. Então se $i \leqslant j$ temos que $m_{j+1} \in m_j A m_j \subset m_i A m_j$ e se $i \geqslant j$ então $m_{i+1} \in m_i A m_i \subset m_i A m_j$. ■

Teorema 2.18 *Para um ideal C de A, as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) *C é um ideal semiprimo;*
(ii) *C é uma interseção de ideais primos;*
(iii) *$C = \sqrt{C}$.*

Demonstração: (iii) $\Rightarrow$ (ii) Segue do Teorema 2.12.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Sendo C uma interseção de ideais primos então C é um ideal semiprimo.
(i) $\Rightarrow$ (iii) Devemos mostrar que $\sqrt{C} \subseteq C$. Suponhamos o contrário, então existe $a \in \sqrt{C}$ tal que $a \notin C$. Definimos o n-sistema $N = A \backslash C$ e claramente $a \in N$. Pelo Lema 2.17 existe um m-sistema $M \subseteq N$ tal que $a \in M$. Logo, M não intercepta C e pela Definição 2.10, $a \notin \sqrt{C}$, o que é um absurdo. ■

Definição 2.19 *Para qualquer anel A, definimos $Nil_*A = \sqrt{\{0\}}$. Nil_*A é o menor ideal semiprimo de A (e é igual a interseção de todos os ideais primos de A). Na literatura, Nil_*A é chamado radical de Baer-McCoy de A ou radical primo de A.*

Definição 2.20 *Um anel A é dito anel primo (respectivamente semiprimo) se $\{0\}$ é um ideal primo (respectivamente semiprimo).*

É claro que todo anel primo é semiprimo.

Proposição 2.21 *Para um anel A, são equivalentes:*
(i) *A é anel semiprimo;*
(ii) *$Nil_*A = \{0\}$;*
(iii) *A não tem ideal nilpotente diferente de zero (isto é, não existe I ideal não-nulo de A tal que $I^n = \{0\}$ para algum número natural n);*
(iv) *A não tem ideal à esquerda nilpotente diferente de zero.*

Demonstração: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Sendo A é anel semiprimo, $\{0\}$ é ideal semiprimo e, pelo Teorema 2.18, $Nil_*A = \sqrt{\{0\}} = \{0\}$. Reciprocamente, se $Nil_*A = \{0\}$ então $\sqrt{\{0\}} = \{0\}$ é um ideal semiprimo e novamente pelo Teorema 2.18 A é anel semiprimo.
(iv) $\Rightarrow$ (iii) Seja U um ideal nilpotente de A, logo U é ideal à esquerda nilpotente de A. Assim, $U^n = \{0\}$ e isto implica que $U = \{0\}$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja U um ideal de A tal que $U^2 \subseteq \{0\}$, ou seja, $U^2 = \{0\}$. Como A não tem ideal nilpotente não-nulo, segue que $U = \{0\}$. Logo, A é semiprimo.
(i) $\Rightarrow$ (iv) Suponhamos A um anel semiprimo e seja U um ideal à esquerda nilpotente. Assim, existe $n \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $U^n = \{0\}$.

Se $n > 1$ então $(U^{n-1})^2 = U^{2n-2} \subseteq U^n = \{0\}$. Por (i), $U^{n-1} = \{0\}$, o que é um absurdo visto que n é o menor elemento tal que $U^n = \{0\}$. Portanto, $n = 1$ e $U = \{0\}$. ■

Exemplo 2.22 *Todo domínio A é um anel primo.*

Exemplo 2.23 *Todo anel simples A é semiprimo.*

Exemplo 2.24 *Seja A um anel. O quociente $\dfrac{A}{Nil_*(A)}$ é anel semiprimo.*

Lema 2.25 (Lema de Brauer) *Seja U um ideal à esquerda minimal de A. Então $U^2 = 0$ ou $U = Ae$.*

Demonstração: Assuma $U^2 \neq 0$, logo $Ua \neq 0$ para algum $a \in U$ e portanto $Ua = U$, pois U é minimal.

Tome $e \in U$ tal que $ea = a$. Assim, o conjunto $I = \{x \in U : xa = 0\} \neq$, pois $0 \in I$ e é um ideal à esquerda de A não contido estritamente em U, pois $e \in U$ e $e \notin I$. Consequentemente $I = 0$, pois U é minimal. Mas note que $(e^2 - e)a = e^2a - ea = e(ea) - ea = ea - ea = 0$. Logo $e^2 - e \in I$, então $e^2 = e$ e segue que e é idempotente. Sendo $Ae \neq 0 \subseteq U$, segue que $Re = U$. ■

Corolário 2.26 *Se U é um ideal à esquerda minimal de um anel semiprimo A então $U = Ae$ para algum idempotente $e \in U$.*

Demonstração: Como A é semiprimo, segue da Proposição **??** que $U^2 \neq 0$. Portanto $U = Ae$ pelo lema acima. ■

O teorema abaixo é o análogo do Teorema 1.27 só que ao invés de anéis J-semi-simples trataremos anéis semiprimos.

Teorema 2.27 *Seja A um anel. Então são equivalentes:*
(i) *A é semi-simples;*
(ii) *A é semiprimo e artiniano à esquerda;*
(iii) *A é semiprimo e satisfaz CCD para ideais a esquerda principais.*

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Se A é semissimples, então A é J-semissimples e artiniano à esquerda. Assim, $Nil_*A \subseteq J(A) = 0$. Logo, A é semissimples.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Óbvio.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Afirmação 1: Todo ideal à esquerda $U \neq 0$ possui um ideal à esquerda minimal. De fato, como $U \neq 0$, existe $a \in 0$, $a \in U$, e isso implica que $Aa \subseteq U$. Assim, temos uma família não-vazia de ideais à esquerda principais contidos em U. Como o conjunto dos ideais à esquerda principais satisfaz CCD, segue que o conjunto possui elemento minimal, ou seja, $\exists I <_e A$ minimal contido em U. Além disso, I é um ideal à esquerda minimal (não necessariamente entre os principais).

Suponha $0 \subsetneq J \subsetneq I$ em que $J \lhd_e A$. Fazendo o mesmo processo para $U = J$, $\exists\ I' \lhd_e A$ minimal principal, $I' \subseteqq J$. Daí, $I' \neq \{0\}$ e $\{0\} \subseteq I' \subseteq J \subsetneqq I$. Logo, $\{0\} \subsetneqq I' \subsetneqq I$, e isso contradiz a minimalidade de I.

Afirmação 2: Todo ideal à esquerda minimal é um somando direto de ${}_AA$. De fato, seja $U \lhd_e A$ minimal e sendo A semiprimo, $U = Ae$, para algum idempotente $e \in U$. Assim, $A = Ae \oplus A(1-e)$.

Suponhamos que A não é semissimples, então A não é uma soma direta finita de ideais à esquerda minimais. Seja B_1 um ideal à esquerda minimal. Então, pela afirmação 2, existe U_1 de A tal que $A = B_1 \oplus U_1$. Mas $U_1 \neq 0$, pois caso contrário, A seria semissimples. Pela afirmação 1, $\exists\ B_2 <_e R$, $B_2 \subseteq U$ ideal à esquerda minimal. Pela afirmação 2, B_2 é um somando direto de A e portanto de U_1. Logo, $U_1 = B_2 \oplus U_2$. Assim, $A = B_1 \oplus B_2 \oplus U_2$. Fazendo o mesmo processo, conseguimos uma cadeia $U_1 \supsetneqq U_2 \supsetneqq U_3 \supsetneqq \cdots$, em que os U_i são principais, somandos diretos de ${}_AA$. O que contradiz que A satisfaz CCD para ideais à esquerda principais. Portanto, A é semissimples.

■

Teorema 2.28 *Um anel A é primo (respectivamente semiprimo) se, e só se, o anel $M_n(A)$ é primo (respectivamente semiprimo).*

Demonstração: Demonstraremos a proposição para o caso onde A é um anel primo (quando A for semiprimo, a demonstração é análoga).

($\Leftarrow$) Supanha $0 \neq A$ um anel que não é primo. Como $A \neq 0$, existem ideais não-nulos $I, J \in A$ tais que $IJ = 0$. Portanto, temos que $\mathbb{M}_n(I)\mathbb{M}_n(J) = 0$. Por I e J serem não-nulos, segue que $\mathbb{M}_n(I), \mathbb{M}_n(J)$ também são não-nulos e então temos que $\mathbb{M}_n(A)$ não é um anel primo. Logo A é primo.

($\Rightarrow$) Suponha $0 \neq \mathbb{M}_n(A)$ um anel não primo. Como $\mathbb{M}_n(A) \neq 0$, existem ideais não-nulos $U, V \in \mathbb{M}_n(A)$ tais que $UV = 0$. Como U, V são ideais de $\mathbb{M}_n(A)$, segue que existem I, J ideais não-nulos de A tais que $U = \mathbb{M}_n(I)$ e $V = \mathbb{M}_n(J)$. De $UV = 0$ tiramos que $IJ = 0$ e como I, J são ideais não-nulos, temos que A não é anel primo.

■

Passamos agora para a parte final deste trabalho, relacionando os anéis já estudados até agora, incluindo os anéis primitivos que serão apresentados efetivamente aqui.

2.3 Anéis Primitivos e Semiprimitivos

Afim de definirmos anéis primitivos à esquerda, chamamos a atenção para a seguinte caracterização de anéis semiprimitivos (ou anéis J-semi-simples).

Proposição 2.29 *Um anel A é semiprimitivo se, e somente se, A possui um módulo à esquerda M semi-simples e fiel.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja A um anel semiprimitivo. Então $rad\ A = 0$.

Seja $\{M_i\}$ a família de todos os A-módulos à esquerda simples. Logo, pelo Teorema 1.13, $\bigoplus\limits_i M_i = M$ é um módulo semi-simples. Como $An_A(M) = \bigcap\limits_i An_A(M_i)$, segue do Corolário 1.23 que $An_A(M) = rad\ A = 0$. Assim, M é um A-módulo à esquerda semi-simples e fiel.

($\Leftarrow$) Seja M um A-módulo à esquerda semi-simples e fiel. Pelo Lema 1.22, sabemos que $rad\ A$ anula todos os A-módulos à esquerda simples e sendo que $An_A(M) = 0$ segue que $rad\ A = 0$. Portanto, A é semiprimitivo. ■

Esta proposição motiva a seguinte definição

Definição 2.30 *Um anel não-nulo A é dito primitivo à esquerda (respectivamente à direita) se A possui um A-módulo à esquerda (respectivamente à direita) simples e fiel. Notemos que A é necessariamente não-nulo.*

A noção de semiprimitividade independe dos adjetivos esquerda-direita, o que não ocorre com a primitividade de um anel. Um dos primeiros exemplos que retrata esta situação foi construído por G. Bergman em 1965.

Proposição 2.31 *Todo anel simples é primitivo à esquerda (respectivamente à direita).*

Demonstração: Seja A um anel simples. Devido a este fato, A age fielmente em qualquer A-módulo M não-nulo, pois $An_A(M)$ é um ideal de A. Sendo A não-nulo, fica garantida a existência de A-módulos simples (vide teoria de módulos). Assim, A é anel primitivo à esquerda. ■

Proposição 2.32 *Todo anel primitivo à esquerda é semiprimitivo.*

Demonstração: Seja A um anel primitivo à esquerda. Então A possui um A-módulo à esquerda simples e fiel M. Logo, M é semi-simples e portanto, A é semiprimitivo.

■

Proposição 2.33 *Todo anel primitivo à esquerda é primo.*

Demonstração: Sejam A um anel primitivo à esquerda e M um A-módulo à esquerda simples e fiel. Provemos que A é anel primo. Seja U um ideal não-nulo de A.

Então, UM é um A-submódulo de M e como M é fiel, segue que UM é um submódulo não-nulo de M, o que implica $UM = M$. Se V é um ideal qualquer não-nulo de A, então

$(VU)M = V(UM) = VM = M$, o que implica $VU \neq 0$ e portanto A é um anel primo. ■

Proposição 2.34 *Todo anel semiprimitivo é semiprimo.*

Demonstração: Pela Observação 2.11, $Nil_*A = \sqrt{\{0\}}$ é um ideal nil de A. Pelo Teorema 1.30, $Nil_*A \subset rad\ A$ e, por hipótese, $rad\ A = \{0\}$. Logo, $Nil_*A = \{0\}$. Pela Proposição 2.21, A é anel semiprimo.

Com base nos Teoremas 1.18, 1.27 e nas proposições acima, vemos que a cadeia de implicações a seguir é verdadeira

$$\begin{array}{ccccc}
A \text{ é semi-simples} & \Rightarrow & A \text{ é semiprimitivo (ou } J\text{-semi-simples)} & \Rightarrow & A \text{ é semiprimo} \\
\Uparrow \text{(se CCD)} & & \Uparrow & & \Uparrow \\
A \text{ é simples} & \Rightarrow & A \text{ é primitivo à esquerda} & \Rightarrow & A \text{ é primo}
\end{array}$$

As implicações horizontais, em geral, não são equivalentes, mas com a hipótese de que A é artiniano à esquerda, teremos as equivalências.

Proposição 2.35 *Seja A um anel artiniano à esquerda, então:*

(i) A é semissimples $\Leftrightarrow$ A é semiprimitivo $\Leftrightarrow$ A é semiprimo;

(ii) A é simples $\Leftrightarrow$ A é primitivo à esquerda $\Leftrightarrow$ A é primo;

Demonstração: Note que basta provarmos que se A é primo e artiniano à esquerda, então A é simples.

De fato, sendo A primo e artiniano à esquerda, então A é semiprimo e artiniano à esquerda, o que implica em A semissimples e pelo Teorema de Wedderburn,

$$A \simeq \underbrace{M_{n_1}(D_1)}_{simples} \times \cdots \underbrace{\times M_{n_t}(D_t)}_{simples}.$$

Por ser A primo, segue que $A \simeq M_{n_1}(D_1)$ (como anel), que é simples.

O fato de existir o isomrfismo $A \simeq M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_t}(D_t)$, diz que existem ideais minimais $B_1,\ B_2, \cdots,\ B_t$ tais que $B_i \simeq M_{n_i}(D_i)$ (como anel) e $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \times \oplus B_t$. Por outro lado, se A é decomposto com mais de uma componente, então $B_iB_j \subseteq B_i \bigcap B_j \subseteq B_i \bigcap \sum_{k \neq i} B_k = 0 \Rightarrow B_iB_j = 0 \overset{A\ primo}{=} B_i = 0\ ou\ B_j = 0$. Portanto, A é simples, como queríamos. ■

Referências

[1] HUNGERFORD, T. W.; "Algebra, Graduate Texts in Mathematics 73", Springer, New York, 1974.

[2] LAM, T.Y.; "A First Course in Noncommutative Rings", Graduate Texts in Mathematics, 131, Springer-Verlag, Second Edition, New York - Berlin - Heidelberg, 2001.