

ÁLGEBRAS DE HOPF E A ORDEM DA ANTÍPODA

GABRIEL SAMUEL DE ANDRADE

RESUMO. Estudamos como a antípoda está relacionada com os elementos grouplikes H -distintos de uma álgebra de Hopf H e da álgebra de Hopf dual H^* . A partir desta relação, estabelecemos uma maneira de estimar a ordem da antípoda, resultado famoso de Radford. No final mostramos uma relação do teorema com álgebras unimodulares e que a estimativa da ordem da antípoda que o teorema oferece não pode ser melhorada.

1. INTRODUÇÃO E NOTAÇÕES

Em toda parte, $\mathbb{K}$ é um corpo, H denota uma álgebra de Hopf com antípoda S sobre o corpo $\mathbb{K}$, H^* é o espaço vetorial dual de H que tem estrutura de álgebra que é dual à estrutura de coálgebra de H . O dual H^* tem estrutura de H^* -módulo à esquerda com a ação sendo o produto de convolução, logo podemos considerar a parte racional H^{*rat} , que é o maior H^* -submódulo racional de H^* . Quando H tem dimensão finita, temos $H^{*rat} = H^*$ e então H^* é a álgebra de Hopf dual de H . Ainda por causa da dimensão finita, existem elementos $\Lambda \in H$ e $\lambda \in H^*$, chamados integral à esquerda para H e integral à direita para H^* , respectivamente, que satisfazem as equações

$$a\Lambda = \epsilon(a)\Lambda \quad \text{e} \quad \lambda a^* = a^*(1)\lambda$$

para todo $a \in H$, $a^* \in H^*$. Associados a esses elementos integrais, existem grouplikes $g \in G(H)$ e $\alpha \in G(H^*)$, chamados grouplikes H -distintos de H e de H^* , respectivamente, tais que

$$\Lambda a = \alpha(a)\Lambda \quad \text{e} \quad a^* \lambda = a^*(g)\lambda$$

para todo $a \in H$, $a^* \in H^*$. Denotaremos o espaço das integrais à esquerda para H por $\int_l$ e das integrais à direita para H^* por $\int^r$. Vamos usar as seguintes ações de H em H^* e de H^* em H :

$$(a^* \prec a)(b) = a^*(ab) \quad \text{e} \quad a \leftarrow a^* = a^*(a_{(1)})a_{(2)},$$

$$(a \succ a^*)(b) = a^*(ba) \quad \text{e} \quad a^* \rightarrow a = a_{(1)}a^*(a_{(2)}),$$

para $a, b \in H$ e $a^* \in H^*$. Finalmente, $\dim(H)$ denota a dimensão de H como $\mathbb{K}$ -espaço vetorial.

2. INTEGRAIS E A ANTÍPODA

Primeiramente, considerando H uma álgebra de Hopf, vamos lembrar uma estrutura muito importante de H -módulo de Hopf em H^{*rat} .

Proposição 2.1. *Seja H álgebra de Hopf, então H^{*rat} é H -módulo de Hopf à esquerda com as estruturas de*

- i) H -módulo com ação $h \rightarrow h^* = h \prec S(h)$, $h \in H$, $h^* \in H^*$.
- ii) H -comódulo com coação natural da estrutura de H^* -módulo racional.

É sabido que $(H^{*rat})^{coH} = \int^r$ e que o Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf garante que a aplicação $f : H \otimes \int^r \rightarrow H^{*rat}$ que é simplesmente dada pela ação $f(h \otimes h^*) = h^* \leftarrow S(h)$, $h \in H^{*rat}$, $h \in H$, é isomorfismo de H -módulos de Hopf, em que $H \otimes \int^r$ tem a estrutura de H -módulo de Hopf trivial. Se H tem dimensão finita, então $(H^{*rat})^{coH} = H^*$. Com isso, pode-se verificar a seguinte

Proposição 2.2. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S sobre o $\mathbb{K}$. Então existe um isomorfismo linear $\mathbf{f} : H \rightarrow H^*$ tal que*

$$\mathbf{f}(hk) = \mathbf{f}(k) \prec S(h) \quad \text{e} \quad \mathbf{f}(h \leftarrow h^*) = \mathbf{f}(h)h^*$$

para $h, k \in H$ e $h^* \in H^*$.

Vamos analisar algumas consequências da existência desse isomorfismo de H -módulos de Hopf.

Proposição 2.3. *Sejam $\mathbf{f} : H \rightarrow H^*$ o isomorfismo da Proposição 2.2, $\lambda = \mathbf{f}(1)$ e $\Lambda = \mathbf{f}^{-1}(\epsilon)$. Para $a \in H$ e $a^* \in H^*$, temos*

- i) $\mathbf{f}(a) = \lambda \prec S(a)$ e $\mathbf{f}^{-1}(a^*) = \Lambda \leftarrow a^*$.
- ii) $a = \Lambda \leftarrow (\lambda \prec S(a))$ e $a^* = \lambda \prec S(\Lambda \leftarrow a^*)$.
- iii) $\prec \lambda, \Lambda \succ = 1 = \prec \lambda, S(\Lambda) \succ$.
- iv) $\lambda \in \int^r$ e $\Lambda \in \int_\ell$.

Demonstração: i) Usando as propriedades $\mathbf{f}(hk) = \mathbf{f}(k) \prec S(h)$ e $\mathbf{f}(h \leftarrow h^*) = f(h)h^*$ apresentadas na Proposição 2.2, temos

$$\mathbf{f}(a) = \mathbf{f}(a1) = \mathbf{f}(1) \prec S(a) = \lambda \prec S(a)$$

e

$$\mathbf{f}(\lambda \leftarrow a^*) = \mathbf{f}(\Lambda)a^* = \epsilon a^* = a^*$$

Portanto, temos o resultado

$$\mathbf{f}(a) = \lambda \prec S(a) \text{ e } \mathbf{f}^{-1}(a^*) = \Lambda \leftarrow a^*$$

ii) Basta escrever $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(a)) = a$ e $\mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(a^*)) = a^*$ usando as equações do item i).

iii) Para $a = 1$ e $a^* = \epsilon$, as equações do item ii) se tornam

$$\Lambda \leftarrow \lambda = 1 \text{ e } \lambda \prec S(\Lambda) = \epsilon.$$

Aplicando ϵ a ambos lados da primeira equação e aplicando ambos lados da segunda equação em 1, obtemos

$$\prec \lambda, \Lambda \succ = 1 = \prec \lambda, S(\Lambda) \succ.$$

iv) Como

$$\lambda a^* = \mathbf{f}(1)a^* = \mathbf{f}(1 \leftarrow a^*) = \prec a^*, 1 \succ \mathbf{f}(1) = \prec a^*, 1 \succ \lambda$$

concluimos que

$$\lambda \text{ é uma integral à direita para } H^*.$$

Como $\mathbf{f}$ é injetiva, o cálculo

$$\mathbf{f}(a\Lambda) = \mathbf{f}(\Lambda) \prec S(a) = \epsilon \prec S(a) = \epsilon(a)\epsilon = \mathbf{f}(\epsilon(a)\Lambda),$$

para todo $a \in H$, mostra que

$$\Lambda \text{ é uma integral à esquerda para } H.$$

De agora em diante, H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Vamos discutir algumas das conexões mais importantes entre a antípoda e integrais para H e H^* . Lembramos que, como H tem dimensão finita, $S : H \rightarrow H^{op\ cop}$ é um isomorfismo de biálgebras e S^* é a antípoda de H^* . Portanto, $S : H \rightarrow H^{op}$ e $S^* : H^* \rightarrow H^{*op}$ são isomorfismos de álgebras. Com isso, é fácil ver que vale o

Lema 2.4. *Suponha que H é álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S sobre o $\mathbb{K}$. Então:*

- (a) $S(\int_\ell) = \int_r$ e $S(\int_r) = \int_\ell$.
- (b) $S^*(\int^\ell) = \int^r$ e $S^*(\int^r) = \int^\ell$.

A antípoda e sua inversa podem ser escritas de maneira simples em função de integrais.

Proposição 2.5. *Suponha H álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S sobre o $\mathbb{K}$. Seja λ uma integral não nula para H^* .*

- (a) *Seja Λ uma integral à esquerda para H tal que $\prec \lambda, \Lambda \succ = 1$. Então, $S^{-1}(a) = \Lambda \leftarrow (\lambda \prec a)$ para todo $a \in H$.*
- (b) *Seja Λ uma integral à direita para H tal que $\prec \lambda, \Lambda \succ = 1$. Então, $S(a) = \Lambda \leftarrow (a \succ \lambda)$ para todo $a \in H$.*

Demonstração: i) Segue do item i) da Proposição 2.3, bastando substituir a por $S^{-1}(a)$.

ii) É o item i) para H^{op} . ■

Seja Λ uma integral à esquerda não nula para H . Então, $\mathbb{K}\Lambda$ é o ideal de integrais à esquerda para H . Da teoria de integrais em álgebras de Hopf, existe $\alpha \in G(H^*) = \text{Alg}(H, k)$ tal que

$$\Lambda a = \prec \alpha, a \succ \Lambda,$$

para todo $a \in H$. Observe que α fica unicamente determinado por essa equação. Como toda integral à esquerda não nula para H é um múltiplo escalar de Λ , segue que α não depende de Λ . Agora, seja λ uma

integral à esquerda não nula para H^* . Então, λ é uma integral à esquerda para $\mathcal{H} = (H^{cop})^* = (H^*)^{op}$. Pelo argumento do parágrafo anterior, concluímos que existe $g \in G(\mathcal{H}^*) = G(H)$ unicamente determinado por

$$a^* \lambda = \langle a^*, g \rangle \lambda,$$

para todo $a^* \in H^*$. Note que g é determinado por essa equação e g não depende da escolha de λ .

Os elementos grouplikes α e g tem um papel importante em certos aspectos na relação entre a antípoda e integrais.

Definição 2.6. *O elemento g de H é o elemento grouplike H -distinto de H e o elemento α de H^* é o elemento grouplike H -distinto de H^* .*

Os elementos grouplike distintos de H^{op} , H^{cop} , $H^{op cop}$ e suas álgebras de Hopf duais podem ser descritos em termos dos elementos grouplike H -distintos de H e H^* .

Proposição 2.7. *Se g e α são os elementos grouplikes H -distintos de H e H^* , respectivamente, então os elementos grouplikes $\mathcal{H}$ -distintos de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}^*$ são:*

- i) g e α^{-1} , respectivamente, quando $\mathcal{H} = H^{op}$.
- ii) g^{-1} e α , respectivamente, quando $\mathcal{H} = H^{cop}$.
- iii) g^{-1} e α^{-1} , respectivamente, quando $\mathcal{H} = H^{op cop}$.
- iv) α^{-1} e g^{-1} , respectivamente, quando $\mathcal{H} = H^*$.

Sejam $a \in H$ e $a^* \in H^*$. Observe que $\ell(a)$ e $r(a)$ são automorfismos de coálgebras de H quando $a \in G(H)$ e que $L(\eta)$ e $R(\eta)$ são automorfismos de álgebra de H quando $\eta \in G(H^*)$. Algumas propriedades desses automorfismos estão descritas na próxima proposição. Em particular, a comutatividade com S^2 será usada na prova do resultado principal.

Proposição 2.8. *Sejam $\mathcal{G}_c$ e $\mathcal{G}_a$ o grupo de automorfismos de coálgebra e de álgebra de H , respectivamente, com a operação de composição. Sejam $a \in G(H)$ e $\eta \in G(H^*)$.*

- i) $\ell(a), r(a) \in \mathcal{G}_c$ e $f : \mathbb{K}[G(H)] \rightarrow \mathcal{G}_c$ definido por $f(a) = \ell(a)$ é um morfismo de grupos injetivo.
- ii) $L(\alpha), R(\alpha) \in \mathcal{G}_a$ e $f : \mathbb{K}[G(H^*)] \rightarrow \mathcal{G}_a$ definido por $f(\eta) = L(\eta)$ é um morfismo de grupos injetivo.
- iii) S^2 comuta com $\ell(a), r(a), L(\alpha)$ e $R(\alpha)$.

Seja Λ uma integral à esquerda não nula para H e suponha que α é o elemento grouplike H -distinto de H^* . É fácil ver que $\alpha \rightarrow \Lambda = L(\alpha)(\Lambda)$ e $\Lambda \leftarrow \alpha = R(\alpha)(\Lambda)$ são integrais à direita para H . Pelo Lema 2.4, $S(\Lambda)$ é uma integral à direita para H também. Portanto, $\alpha \rightarrow \Lambda$, $\Lambda \leftarrow \alpha$ e $S(\Lambda)$ são dois a dois linearmente independentes. Relações mais precisas entre integrais à direita estão incluídos no próximo resultado.

Teorema 2.9. *Suponha que H é álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S sobre o $\mathbb{K}$. Seja Λ uma integral à esquerda para H , seja λ uma integral à direita para H^* , seja g o elemento grouplike H -distinto de H , e seja α o elemento grouplike H -distinto de H^* . Então:*

- i) $S(\Lambda) = \alpha \leftarrow \Lambda$ e $S^{-1}(\Lambda) = \Lambda \rightarrow \alpha$.
- ii) $S^*(\lambda) = \lambda \prec g$ e $S^{*-1}(\lambda) = g \rightarrow \lambda$.
- iii) $S^2(\Lambda) = \alpha \rightarrow \Lambda \leftarrow \alpha^{-1} = \langle \alpha, g^{-1} \rangle \Lambda$.
- iv) $S^{*2}(\lambda) = g^{-1} \succ \alpha \prec g = \langle \alpha, g^{-1} \rangle \lambda$.
- v) $\langle \lambda, S^2(a \leftarrow \alpha)b \rangle = \langle \lambda, ab \rangle = \langle \lambda, aS^2(\alpha^{-1} \rightarrow (g^{-1}bg)) \rangle$, para todos $a, b \in H$.
- vi) $\Lambda_{(2)} \otimes \Lambda_{(1)} = \Lambda_{(1)} \otimes S^2(\Lambda_{(2)})g$.
- vii) $\lambda_{(2)} \otimes \lambda_{(1)} = \alpha(S^{*2}(\lambda_{(1)})) \otimes \lambda_{(2)}$.

Demonstração: Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\langle \lambda, \Lambda \rangle = 1$. Portanto, $\langle \lambda, S(\Lambda) \rangle = 1$, pela Proposição 1.3.

i) Note que $S(\Lambda)$ e $\alpha \leftarrow \Lambda$ são linearmente dependentes. As equações $\langle \lambda, \alpha \leftarrow \Lambda \rangle = \langle \lambda \alpha, \Lambda \rangle = \langle \alpha, 1 \rangle \langle \lambda, \Lambda \rangle = 1$ mostra que $\langle \lambda, \alpha \leftarrow \Lambda \rangle = \langle \lambda, S(\Lambda) \rangle = 1$. Portanto, $S(\Lambda) = \alpha \rightarrow \Lambda$. Essa equação para H^{cop} é a equação $S^{-1}(\Lambda) = \Lambda \leftarrow \alpha$ para H .

ii) É o item i) para a álgebra de Hopf $(H^{op cop})^*$.

iii) Note que Λ e $\alpha \leftarrow \Lambda \rightarrow \alpha^{-1}$ são linearmente dependentes, pois $\alpha \rightarrow \Lambda$ e $\Lambda \leftarrow \alpha$ são. Como $S^2(\Lambda)$ é uma integral à esquerda, segue que $S^2(\Lambda)$ e $\alpha \leftarrow \Lambda \rightarrow \alpha^{-1}$ são linearmente dependentes. Agora

$$\langle \lambda, \alpha \rightarrow \Lambda \leftarrow \alpha^{-1} \rangle = \langle \alpha^{-1} \lambda \alpha, \Lambda \rangle = \langle \alpha^{-1}, g \rangle \langle \alpha, 1 \rangle \langle \lambda, \Lambda \rangle = \langle \alpha^{-1}, g \rangle.$$

Por outro lado, usando o item ii), calculamos

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda, S^2(\Lambda) \rangle &= \langle S^*(\lambda), S(\Lambda) \rangle \\
 &= \langle \lambda \prec g, S(\Lambda) \rangle \\
 &= \langle \lambda, gS(\Lambda) \rangle \\
 &= \langle \lambda, S(\Lambda g^{-1}) \rangle \\
 &= \langle \alpha, g^{-1} \rangle \langle \lambda, S(\Lambda) \rangle \\
 &= \langle \alpha^{-1}, g \rangle.
 \end{aligned}$$

Como $\langle \alpha^{-1}, g \rangle = \langle \alpha, g^{-1} \rangle$, concluímos que

$$\langle \lambda, S^2(\Lambda) \rangle = \langle \lambda, \alpha \rightharpoonup \Lambda \leftarrow \alpha^{-1} \rangle = \langle \lambda, \alpha(g^{-1})\Lambda \rangle = \langle \alpha, g^{-1} \rangle$$

e portanto $S^2(\Lambda) = \alpha \rightharpoonup \Lambda \leftarrow \alpha^{-1} = \langle \alpha, g^{-1} \rangle \Lambda$.

iv) Esse item para para $(H^{op\ cop})^*$ é o item iii) para H , pois o elemento grouplike $(H^{op\ cop})^*$ -distinto para $(H^{op\ cop})^{**} = H^{op\ cop}$ é g .

v) Podemos assumir $\langle \lambda, \Lambda \rangle = 1$. Portanto, $S(a) = \Lambda \leftarrow (\lambda \prec S^2(a)) = \langle \lambda, S^2(a)\Lambda_{(1)} \rangle \Lambda_{(2)}$, para todo $a \in H$, pelo item i) da Proposição 2.5. Agora, $\Lambda \leftarrow \alpha$ é uma integral à direita para H e $\alpha^{-1}\lambda$ é uma integral à direita para H^* tal que

$$\langle \alpha^{-1}\lambda, \Lambda \leftarrow \alpha \rangle = \langle \alpha(\alpha^{-1}\lambda), \Lambda \rangle = \langle \lambda, \Lambda \rangle = 1.$$

Portanto, pelo item ii) da Proposição 2.5, calculamos

$$\begin{aligned}
 S(\alpha) &= (\Lambda \leftarrow \alpha) \leftarrow (a \succ (\alpha^{-1}\lambda)) \\
 &= \Lambda \leftarrow (\alpha(a \succ)(\alpha^{-1}\lambda)) \\
 &= \langle (\alpha(a \succ)(\alpha^{-1}\lambda)), \Lambda_{(1)} \rangle \Lambda_{(2)} \\
 &= \langle \alpha, \Lambda_{(1)} \rangle \langle (a \succ (\alpha^{-1}\lambda)), \Lambda_{(2)} \rangle \Lambda_{(3)} \\
 &= \langle \alpha^{-1}\lambda, (\Lambda_{(1)} \leftarrow \alpha)a \rangle \Lambda_{(2)} \\
 &= \langle \alpha^{-1}\lambda, (\Lambda_{(1)}(a \leftarrow \alpha^{-1})) \leftarrow \alpha \rangle \Lambda_{(2)} \\
 &= \langle \alpha\alpha^{-1}\lambda, \Lambda_{(1)}(a \leftarrow \alpha^{-1}) \rangle \Lambda_{(2)} \\
 &= \langle \lambda, \Lambda_{(1)}(a \leftarrow \alpha^{(1)}) \rangle \Lambda_{(2)}
 \end{aligned}$$

para todo $a \in H$. Portanto, $\langle \lambda, S^2(a)\Lambda_{(1)} \rangle \Lambda_{(2)} = \langle \lambda, \Lambda_{(1)}(a \leftarrow \alpha^{-1}) \rangle \Lambda_{(2)}$, para todo $a \in H$. Aplicando $a^* \in H^*$ a ambos lados dessa equação, obtemos $\langle \lambda, S^2(a)(a^* \rightharpoonup \Lambda) \rangle = \langle \lambda, (a^* \rightharpoonup \Lambda)(a \leftarrow \alpha^{-1}) \rangle$, para todo $a \in H$. Como $H^* \rightharpoonup H = H$ GABRIEL GABRIEL GABRIEL pela parte (d) do Teorema 10.2.2, a equação $\langle \lambda, S^2(a)b \rangle = \langle \lambda, b(a \leftarrow \alpha^{-1}) \rangle$ vale para todos $a, b \in H$. Portanto, $\langle \lambda, S^2(a \leftarrow \alpha^{-1})b \rangle = \langle \lambda, ba \rangle$ vale para todos $a, b \in H$, que é a primeira equação do item v). Essa primeira equação para $H^{cop\ op}$ com integral à esquerda $S(\Lambda) = \alpha \rightharpoonup \Lambda$ e integral à direita $(S^*)^{-1}(\lambda) = g \succ \lambda$ para $(H^{cop\ op})^*$ dá a segunda equação do item v) para H , pois α^{-1} é o elemento grouplike $H^{cop\ op}$ -distinto de $(H^{cop\ op})^*$.

vi) Identifique $H = (H^*)^*$ e seja $\mathcal{H} = H^*$. Então, $S^{*-1}(\lambda)$ é uma integral à esquerda para $\mathcal{H}$ e $S(\Lambda)$ é uma integral à direita para $\mathcal{H}^*$ tal que $\langle S(\Lambda), S^{*-1}(\lambda) \rangle = 1$. Usando o fato de que S é injetiva, é fácil ver que o item vi) para $\mathcal{H}$ implica o item v) para H .

vii) Pela definição do coproduto de H^* , a primeira equação do item v) é equivalente à equação do item vii). ■

Um corolário imediato do Teorema 2.8 é uma maneira de expressar os elementos grouplikes H -distintos de H e H^* em termos de integrais.

Corolário 2.10. *Suponha que H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S sobre o $\mathbb{K}$. Seja Λ uma integral à esquerda para H , e seja λ uma integral à direita para H^* tal que $\langle \lambda, \Lambda \rangle = 1$. Então:*

- i) $\alpha = \lambda \prec \Lambda$ e $\alpha^{-1} = S(\Lambda) \succ \lambda$, em que α é o elemento grouplike H -distinto de H^* .
- ii) $g = \Lambda \leftarrow \lambda$ e $g^{-1} = S^*(\lambda) \rightharpoonup \Lambda$, em que g é o elemento grouplike H -distinto de H .

Demonstração: i) Vimos que $\lambda \prec S(\Lambda\alpha) = \alpha$. Pelo item i) do Teorema 2.8, segue que $S(\Lambda \leftarrow \alpha) = S(S^{-1}(\Lambda)) = \Lambda$. Portanto, $\lambda \prec \Lambda = \alpha$. Para completar a prova do item i), primeiro observamos que $S(\Lambda)$ é uma integral à esquerda H^{op} e que α^{-1} é o elemento grouplike H^{op} -distinto de $(H^{op})^*$. Por causa do fato $\langle \lambda, \Lambda \rangle = \langle \lambda, S(\Lambda) \rangle$, vemos que a equação anterior para H^{op} se traduz por $\alpha^{-1} = S(\Lambda) \succ \lambda$ para H .

ii) Item i) para a álgebra de Hopf $(H^{op\ cop})^*$ é o item ii) para H . ■

Continuamos assumindo as hipóteses do Teorema 1.8. Observe que as equações do item v) do teorema podem ser formuladas como

$$\lambda \circ \ell(a) = \lambda \circ r(a) \circ S^2 \circ R(a)$$

e

$$\lambda \circ r(a) = \lambda \circ \ell(a) \circ S^2 \circ L(\alpha^{-1}) \circ \ell(g^{-1} \circ r(g)),$$

para todo $a \in H$. Substituindo a expressão para $\lambda \circ \ell(a)$ no lado direito da última equação, chegamos a

$$\begin{aligned} \lambda \circ r(a) \circ I_H &= \lambda \circ r(a) \\ &= \lambda \circ r(a) \circ S^2 \circ R(\alpha) \circ S^2 \circ L(\alpha^{-1}) \circ \ell(g^{-1}) \circ r(g) \\ &= \lambda \circ r(a) \circ S^4 \circ R(\alpha) \circ L(\alpha^{-1}) \circ \ell(g^{-1}) \circ r(g), \end{aligned}$$

pois S^2 e $R(\alpha)$ comutam. Agora, é possível mostrar que se $f, g \in \text{End}(H)$ e $\lambda \circ r(a) \circ f = \lambda \circ r(a) \circ g$, para todo $a \in H$, necessariamente $f = g$. Portanto,

$$I_H = S^4 \circ R(\alpha) \circ L(\alpha^{-1}) \ell(g^{-1}) \circ r(g)$$

ou, equivalentemente,

$$S^4 = r(g^{-1} \circ \ell(g) \circ L(\alpha) \circ R(\alpha^{-1}))$$

Para uma álgebra A sobre $\mathbb{K}$ e um elemento invertível $u \in A$, denotamos por i_u o automorfismo de álgebra de A definido por $i_u(a) = uau^{-1}$, para todo $a \in A$. Mostramos que S^4 pode ser descrito puramente em termos dos elementos grouplikes H -distintos de H e H^* .

Teorema 2.11. *Suponha que H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita S sobre o $\mathbb{K}$. Seja g o elemento grouplike H -distinto para H e α é o elemento grouplike H -distinto para H^* . Então*

$$S^4 = i_g \circ (i_{\alpha^{-1}})^*$$

ou, equivalentemente,

$$S^4(a) = g(\alpha \rightarrow a \leftarrow \alpha^{-1})g^{-1}$$

para todo $a \in H$. Em particular, $S^{4n} = I_H$, em que n é o menor múltiplo comum dos ordens de g e de α .

Demonstração: Segue do desenvolvimento anterior a esse teorema e do fato, fácil de ver, de que os automorfismos i_g e $(i_{\alpha^{-1}})^*$ comutam. ■

A fórmula $S^4 = i_g \circ (i_{\alpha^{-1}})^*$ faz conexão entre S^4 e a unimodularidade. Para entender esta relação, vamos fazer algumas definições.

Definição 2.12. *Uma álgebra de Hopf sobre $\mathbb{K}$ é dita ser*

- i) *unimodular se $\int_\ell = \int_r$.*
- ii) *semisimples se for semisimples como álgebra.*
- iii) *cosemisimples se for cosemisimples como coálgebra.*

Corolário 2.13. *Suponha que H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S sobre o corpo $\mathbb{K}$. Então:*

- i) *A ordem do operador linear S^4 divide $\text{Dim}(H)$.*
- ii) *Se H é unimodular, então S^4 é interno.*
- iii) *Se H^* é unimodular, então S^{*4} é interno.*
- iv) *Se H e H^* são unimodulares, em particular se H e H^* são semisimples, então $S^4 = I_H$.*

Demonstração: Se H é unimodular, então $\alpha = \epsilon$ e se H^* é unimodular, então $g = 1$. Portanto, os itens ii)-iv) seguem diretamente da fórmula $S^4 = i_g \circ (i_{\alpha^{-1}})^*$ do item i) do Teorema 2.11. Para mostrar parte i), lembramos que álgebras de Hopf são livres como módulos sobre suas subálgebras de Hopf pelo Teorema de Nichols-Zoeller ([2] p.298). Como consequência, $\text{Dim}(k[G(H)])$ divide $\text{Dim}(H)$. Portanto, a ordem de qualquer elemento grouplike de H divide $\text{Dim}(H)$. Para todo $a \in G(H)$, isso significa que a ordem do automorfismo de álgebras i_a de H e da sua transposta divide $\text{Dim}(H)$. Em particular, as ordens dos operadores i_g e $(i_{\alpha^{-1}})^*$, que comutam, dividem $\text{Dim}(H)$, portanto o item i) segue. ■

Para álgebras de Hopf de dimensão finita unimodulares sobre $\mathbb{K}$ cujos duais são também unimodulares, os limites dados na ordem da antípoda pelo item iv) do Corolário 2.12 geralmente não podem ser melhorados, como pode ser visto pelo exemplo abaixo.

Exemplo 2.14. *Seja H a álgebra sobre $\mathbb{K}$ gerada pelos símbolos a, x e y sujeitos às relações*

$$a^2 = 1, x^2 = x, y^2 = y, xa + ax = a - 1 = ya + ay, e xy + yx = x + y.$$

Então, H tem as seguintes propriedades

- i) $\dim(H) = 8$.
- ii) H é uma álgebra de Hopf em que a estrutura de coálgebra é determinada por
$$\Delta(a) = a \otimes a, \Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes a \text{ e } \Delta(y) = 1 \otimes y + y \otimes a.$$
- iii) $H, H^{op}, H^{cop}, H^{op\,cop}$ são isomorfas como álgebras de Hopf.
- iv) H e H^* são unimodulares.
- v) A antípoda de H tem ordem 4.

REFERÊNCIAS

- [1] D. E. RADFORD; **Hopf Algebras**, University of Illinois em Chicago, USA: World Scientific 2012.
- [2] S. DĂSCĂLESCU; C. NĂSTĂSESCU; S. RAIANU. **Hopf Algebras: An Introduction**, New York: Marcel Dekker, 2001.
- [3] S. MONTGOMERY, **Hopf Algebras and Their Actions on Rings**, Chigago: CBMS, 1992.