O teorema de Milnor-Moore

Giovani Goraiebe Pollachini

8 de dezembro de 2014

Sumário

1 Introdução **1**

2 Álgebras de Lie **1**

3 Biálgebras conexas **7**

4 Resultados auxiliares **8**

5 Teorema de Milnor-Moore **15**

1 Introdução

O presente trabalho tem por objetivo enunciar e provar o teorema de Milnor-Moore. Neste trabalho precisaremos da definição de biálgebras conexas e da teoria básica de álgebras de Lie, apresentados nas primeiras seções.
O que diz o teorema de Milnor-Moore? Basicamente, sobre certas hipóteses, uma biálgebra pode ser recuperada a partir da sua álgebra de Lie dos elementos primitivos por meio da álgebra envolvente universal. Mais precisamente, temos $B \cong \mathcal{U}(\mathrm{P}(B))$, isomorfos como biálgebras.
Para obter o resultado, requeremos a cocomutatividade de B e uma outra propriedade chamada conexidade. Uma biálgebras conexa tem a propriedade adicional de ser uma união de subespaços "encaixados" em que seus "subespaços componentes" guardam uma certa compatibilidade com a estrutura de biálgebra.
As seções 2 e 3 trazem pré-requisitos e materiais da teoria "básica". Os lemas e proposições auxiliares, bem como algumas notações facilitadoras são expostas em uma seção separada, a 4. Por fim, o teorema e sua demonstração constam na seção 5.

2 Álgebras de Lie

Nesta seção fazemos um apanhado da teoria básica de álgebras de Lie necessária para os fins deste artigo.

Definição 2.1. Uma *Álgebra de Lie* é um par $(\mathfrak{g}, [,])$ em que

1. $\mathfrak{g}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial

2. $[,]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é uma operação bilinear, o *colchete de Lie*, ou *comutador*, que satisfaz:

   $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$

   Identidade de Jacobi: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ para todos $x, y, z \in \mathfrak{g}$

Observação 1. A condição $[x, x] = 0$ garante a condição de antissimetria:

$$[x, y] = -[y, x]$$

De fato, dados $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$$

e portanto vale a condição de antissimetria.

Observação 2. Quando o corpo $\mathbb{K}$ tem característica diferente de 2, a condição $[x, x] = 0$ é equivalente à antissimetria. De fato, se vale a antissimetria, então $0 = [x, x] + [x, x] = 2[x, x]$, e se a a característica de $\mathbb{K}$ é diferente de 2, temos $[x, x] = 0$.

Observação 3. A álgebra de Lie é uma álgebra *não associativa*.

Definição 2.2. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ duas álgebras de Lie. Uma transformação linear $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ é um *morfismo de álgebras de Lie* se for compatível com o comutador, isto é, dados $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

Estrutura de álgebra de Lie para uma álgebra associativa qualquer

Nesta seção veremos como equipar uma álgebra associativa A com uma estrutura de álgebra de Lie. Denotamos por A_L o conjunto A equipado com esta estrutura a ser descrita.

Definimos $A_L = A$ como espaços vetoriais. O colchete de Lie $[,]\colon A_L \times A_L \to A_L$ é definido por

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

para todos $a, b \in A_L$. Essa operação é bilinear e satisfaz as identidades requeridas para a álgebra de Lie. De fato, dados $a, b, c \in A_L$, temos

$$[a, a] = a \cdot a - a \cdot a = 0$$

$$\begin{aligned}
[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] &= [a, bc - cb] + [b, ca - ac] + [c, ab - ba] \\
&= a(bc - cb) - (bc - cb)a + b(ca - ac) + \\
&\quad - (ca - ac)b + c(ab - ba) - (ab - ba)c \\
&= 0
\end{aligned}$$

Estrutura de álgebra de Lie para os elementos primitivos de uma biálgebra

Começaremos definindo o conjunto de elementos primitivos de uma biálgebra B, e mostraremos que estes formam uma álgebra de lie, com o colchete $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$, o mesmo colchete de B, visto apenas como álgebra associativa.

Definição 2.3. Seja B uma biálgebra. Dizemos que $b \in B$ é um *elemento primitivo* se

$$\Delta(b) = b \otimes 1_B + 1_B \otimes b$$

O conjunto de todos os elementos primitivos de B é denotado por $\mathrm{P}(B)$.

Proposição 2.1. *$\mathrm{P}(B)$ é uma álgebra de Lie, com comutador*

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

Isto é, $\mathrm{P}(B)$ é uma subálgebra de Lie de B_L.

Demonstração. Precisamos mostrar que $\mathrm{P}(B)$ é fechado pelo comutador. De fato, dados $a, b \in \mathrm{P}(B)$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta([a, b]) &= \Delta(ab - ba) \\
&= \Delta(a)\Delta(b) - \Delta(b)\Delta(a) \\
&= (a \otimes 1_B + 1_B \otimes a)(b \otimes 1_B + 1_B \otimes b) + \\
&\quad - (b \otimes 1_B + 1_B \otimes b)(a \otimes 1_B + 1_B \otimes a) \\
&= ab \otimes 1_B + 1_B \otimes ab - ba \otimes 1_B - 1_B \otimes ba \\
&= [a, b] \otimes 1_B + 1_B \otimes [a, b]
\end{aligned}$$

e portanto $[a, b] \in \mathrm{P}(B)$. □

Álgebra envolvente universal

Começamos definindo a álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ por meio de uma propriedade universal. No decorrer, exibiremos construção de uma álgebra que satisfaz essa propriedade.

Definição 2.4. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. A *álgebra envolvente universal* de $\mathfrak{g}$ é um par (U, i), em que

U é uma álgebra associativa e com unidade

$i \colon \mathfrak{g} \to U_L$ é um morfismo de álgebras de Lie

vale a seguinte propriedade universal: dados A álgebra (associativa e com unidade) e $f \colon \mathfrak{g} \to A_L$ morfismo de álgebras de Lie, existe um único morfismo de álgebras $\overline{f} \colon U \to A$ tal que o diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & A_L = A \\
& U_L = U \arrow[u, "\overline{f}"']
\end{tikzcd}$$

$$\overline{f} \circ i = f$$

Construiremos a seguir uma álgebra que satisfaz essa propriedade universal. Considere a álgebra tensorial gerada pelo espaço vetorial $\mathfrak{g}$, $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$. Essa álgebra pode ser vista como uma álgebra de Lie da maneira padrão, fazendo o comutador ser $[a,b]_{\mathcal{T}(\mathfrak{g})} = a \cdot b - b \cdot a$. Mas queremos que esse comutador coincida com o comutador em $\mathfrak{g}$ quando nos restringimos a $a, b \in \mathfrak{g}$. Assim, fazemos a identificação $[a,b] = a \cdot b - b \cdot a$, com $a, b \in \mathfrak{g}$, isto é,

Definição 2.5. Escrevemos

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := \frac{\mathcal{T}(\mathfrak{g})}{I}$$

em que I é o ideal em $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ gerado por elementos da forma $a \cdot b - b \cdot a - [a,b]$, com $a, b \in \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{T}(\mathfrak{g})$. Além disso, fazemos

$$\begin{aligned} i \colon \mathfrak{g} &\to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

que é um morfismo de álgebras de Lie, enxergando $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})_L$ (já que $i([x,y]_{\mathfrak{g}}) = [x,y]_{\mathfrak{g}} = x \cdot y - y \cdot x = [x,y]_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$).

Mostremos, então, a seguinte:

Proposição 2.2. *$(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), i)$ definido acima satisfaz a propriedade universal em 2.4 e é a álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$. É única a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Mostremos a propriedade universal. Seja A uma álgebra (associativa com unidade) e $f \colon \mathfrak{g} \to A_L$ um morfismo de álgebras de Lie. Considerando apenas como espaços vetoriais, existe único morfismo de ágebras $f' \colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to A$ tal que $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Defina $\overline{f} \colon \frac{\mathcal{T}(\mathfrak{g})}{I} \to A$, com $\overline{f}(\pi(x)) = f'(x)$ para todo $x \in \mathcal{T}(\mathfrak{g})$. Está bem definido pois dado $\overline{x} = \overline{y} \in \frac{\mathcal{T}(\mathfrak{g})}{I}$, temos

$$x - y = \sum_i c_i(a_i \otimes b_i - b_i \otimes a_i - [a_i, b_i])d_i \in I$$

e então

$$\begin{aligned} f'(x-y) &= f'\left(\sum_i c_i \otimes (a_i \otimes b_i - b_i \otimes a_i - [a_i, b_i]) \otimes d_i\right) \\ &= \sum_i f'(c_i)(f(a_i)f(b_i) - f(b_i)f(a_i) - f([a_i, b_i]))f'(d_i) \\ &= \sum_i f'(c_i)(f([a_i, b_i]) - f([a_i, b_i]))f'(d_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo $f'(x) = f'(y)$, e $\overline{f}$ está bem definido. É morfismo de álgebras pois f' o é. Além disso, é único tal que, $\overline{f} \circ i = f$.
Para a unicidade a menos de isomorfismo, considere (U, j) outra álgebra envolvente universal. Usando a propriedade universal, consegue-se exibir um isomor-

fismo entre U e $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i"'] & U \\
& \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\overline{j}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\
& U \arrow[u, "\overline{i}"']
\end{tikzcd}
$$

$$\exists \overline{j} \colon \overline{j} \circ i = j \qquad\qquad \exists \overline{i} \colon \overline{i} \circ j = i$$

Assim, temos que

$$j = \overline{j} \circ \overline{i} \circ j$$
$$i = \overline{i} \circ \overline{j} \circ i$$

Dessa forma, ocorre

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i"'] & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\
& \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\mathrm{Id},\ \overline{i}\circ\overline{j}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j"'] & U \\
& U \arrow[u, "\mathrm{Id},\ \overline{j}\circ\overline{i}"']
\end{tikzcd}
$$

Pela unicidade, temos que $\mathrm{Id} = \overline{i} \circ \overline{j}$ e $\mathrm{Id} = \overline{j} \circ \overline{i}$. Portanto, $\overline{j}$ e $\overline{i}$ são isomorfismos entre U e $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. $\square$

Estrutura de álgebra de Hopf para $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

Nesta seção equiparemos $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ com uma estrutura de álgebra de Hopf. A álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é o quociente da álgebra tensorial $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ pelo ideal $I \subseteq \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ gerado pelos elementos $ab - ba - [a, b]$ com $a, b \in \mathfrak{g}$. Se mostrarmos que o ideal I é um Hopf-ideal, teremos que o quociente $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \frac{\mathcal{T}(\mathfrak{g})}{I}$ tem estrutura de álgebra de Hopf quociente herdada da álgebra tensorial, que é uma álgebra de Hopf.

Lema 2.3. *O ideal $I = \mathfrak{g}\{ab - ba - [a, b] \colon a, b \in \mathfrak{g}\}\mathfrak{g}$ de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ é, na verdade, um Hopf-ideal.*

Demonstração. Já temos que I é um ideal. Vamos mostrar que é um coideal. De fato, para os geradores $ab - ba - [a, b]$, com $a, b \in \mathfrak{g}$, temos

$$
\begin{aligned}
\Delta(ab - ba - [a, b]) &= \Delta(a)\Delta(b) - \Delta(b)\Delta(a) - \Delta([a, b]) \\
&= (a \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes a)(b \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes b) + \\
&\qquad - (b \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes b)(a \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes a) + \\
&\qquad\quad - ([a, b] \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes [a, b]) \\
&= (ab - ba - [a, b]) \otimes 1_{\mathbb{K}} - 1_{\mathbb{K}} \otimes (ab - ba - [a, b]) \\
&\quad \in I \otimes \mathcal{T}(\mathfrak{g}) + \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \otimes I
\end{aligned}
$$

$$\varepsilon(ab - ba - [a, b]) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) - \varepsilon(b)\varepsilon(a) - \varepsilon([a, b]) = 0$$

É fácil ver que o mesmo ocorre se esse elemento gerador for multiplicado por um elemento de $\mathfrak{g}$ à esquerda e à direita, e se houver uma soma finita de termos dessa forma. Portanto, $\Delta(I) \subseteq I \otimes \mathcal{T}(\mathfrak{g}) + \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \otimes I$ e $\varepsilon(I) = 0$, e I é coideal. Resta mostrar que $S(I) \subseteq I$, em que S é a antípoda de $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$. De fato,

$$\begin{aligned} S(ab - ba - [a,b]) &= S(ab) - S(ba) - S([a,b]) \\ &= ba - ab + [a,b] \in I \end{aligned}$$

e o mesmo ocorre se multiplicarmos o elemento gerador à direita e à esquerda por elementos de $\mathfrak{g}$ e tomarmos somas finitas. Decorre, então, que $S(I) \subseteq I$, e I é um Hopf-ideal.

$\square$

Portanto $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Hopf, com estrutura tal que a projeção $\pi \colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \frac{\mathcal{T}(\mathfrak{g})}{I} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é um morfismo de álgebras de Hopf. Isto é, temos

$$\begin{array}{ll} g \cdot h = gh & 1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} = 1_{\mathbb{K}} \\ & \\ \Delta(g) = g \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes g & \varepsilon(g) = 0 \\ \Delta(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \otimes 1_{\mathbb{K}} & \varepsilon(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \end{array}$$

e a antípoda é dada por

$$\begin{array}{l} S(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}} \\ S(g_1 \dots g_n) = (-1)^n g_n \dots g_1 \end{array}$$

Uma base para $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

O teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt, a ser enunciado abaixo, nos fornece uma base para $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ a partir de uma base de $\mathfrak{g}$. Sua demonstração é omitida nesse trabalho, mas pode ser encontrada, por exemplo, em [3].

Teorema 2.4 (PBW)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\{a_i\}_{i\in I}$ uma base ordenada para $\mathfrak{g}$ (I é um conjunto ordenado). Então os elementos de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ da forma*

$$a_{i_1}^{r_1} \dots a_{i_k}^{r_k}$$

formam uma base para $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Acima, temos $k \in \mathbb{N}$, $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_k \in I$, e $i_1 < \dots < i_k$

Vamos utilizar uma notação conveniente para denotar esses elementos da base. Considere os multi-índices $r \in \mathbb{N}^{(I)}$ com $r = (r_i)_{i\in I}$, r_i's inteiros não negativos, e tal que apenas uma quantidade finita de termos não são nulos. Se $i = i_1 < \dots < i_n$ são os índices tais que $r_i \neq 0$, então denote:

$$a^r := a_{i_1}^{r_1} \dots a_{i_n}^{r_n}$$

Uma combinação de elementos da base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\sum_r \lambda(r) A^r$$

em que subentende-se que a soma é apenas sobre finitos multi-índices, ou seja, que $\lambda(r) = 0$ para quase todo r.

3 Biálgebras conexas

Nesta seção definiremos um dos requisitos que aparecerão no teorema de Milnor-Moore: a conexidade de uma biálgebra. Diz-se que a biálgebra é conexa quando admite uma "filtração", que seria uma espécie de decomposição da biálgebra que mantém compatibilidade com a estrutura de biálgebra.

Definição 3.1. Seja B uma biálgebra é *conexa* se existe uma família $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ de subespaços vetoriais de B, chamada *filtração*, tal que:

1. $B_0 = \mathbb{K} \cdot 1_B$
2. $B = \cup_{i=0}^{\infty} B_i$
3. $B_n \subsetneq B_{n+1}$, $\forall n \geq 0$
4. $B_n B_m \subseteq B_{m+n}$, $\forall m, n \geq 0$
5. $\Delta(B_n) \subseteq \sum_{l=0}^{n} B_{n-l} \otimes B_l$, $\forall n \geq 0$

Observação 4. Um caso particular de filtração é quando temos uma família $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ de subespaços não nulos de B, chamada *graduação*, tal que:

1. $V_0 = \mathbb{K} \cdot 1_B$
2. $B = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$
3. $V_n V_m \subseteq V_{m+n}$, $\forall m, n \geq 0$
4. $\Delta(V_n) \subseteq \sum_{l=0}^{n} V_{n-l} \otimes V_l$, $\forall n \geq 0$

Definindo-se $B_n = \bigoplus_{i=0}^{n} V_i$, obtemos uma filtração $B = \cup_{i=0}^{\infty} B_i$.

Exemplo 3.1 (Álgebra envolvente universal)**.** Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. A álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$, denotada por $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de Hopf. Também é conexa, com filtração

$$\mathcal{U}_n = \operatorname{span}(\{g_1 \ldots g_m \mid m \leq n,\ g_1, \ldots, g_m \in \mathfrak{g}\} \cup \{1_{\mathbb{K}}\})$$

De fato, $\mathcal{U}_0 = \mathbb{K}1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$ e $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n$. Além disso, o produto é compatível com a filtração, pois $\mathcal{U}_n \mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{U}_{m+n}$. Resta checar que o coproduto é compatível com a filtração, o que ocorre pois

$$\begin{aligned}
\Delta(g_1 \ldots g_n) =& (g_1 \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes g_1) \cdots (g_n \otimes 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \otimes g_n) \\
=& \sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma \in S(k)} (g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(k)}) \otimes (g_{\sigma(k+1)} \cdots g_{\sigma(n)}) \\
\in& \sum_{k=0}^{n} \mathcal{U}_k \otimes \mathcal{U}_{n-k}
\end{aligned}$$

em que $S(k)$ é o conjunto de permutações σ do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ tais que $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k)$ e $\sigma(k+1) < \cdots < \sigma(n)$ (σ é uma permutação do tipo "shuffle").

Exemplo 3.2 (Álgebra simétrica)**.** Seja V um espaço vetorial. $\mathrm{S}(V)$ é a álgebra simétrica (álgebra livre comutativa, associativa e com unidade, ou ainda, álgebra polinomial) gerada por V. Também podemos olhar para $\mathrm{S}(V)$ como sendo a álgebra envolvente universal $\mathcal{U}(V)$, com V sendo considerado como álgebra de Lie com colchete trivial ($[v, w] := 0,\ \forall v, w \in V$).
Sendo uma álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie, é conexa conforme o exemplo anterior.

Uma das vantagens em se trabalhar com biálgebras conexas é que a filtração, por ser enumerável, permite algumas demonstrações por indução. Muitas das demonstrações dos lemas e proposições a seguir acontecerão por meio de alguma indução atrelada à estrutura da filtração da biálgebra.

4 Resultados auxiliares

Nesta seção ficaram separados os resultados auxiliares e algumas notações que, esperamos, possam trazer mais clareza ao texto. Esta seção segue o livro [4], procurando detalhar as demonstrações, mesmo dos resultados tidos como "triviais".

O primeiro lema é consequência da compatibilidade da filtração com o coproduto da biálgebra.

Lema 4.1. *Seja $B = \cup_{n=0}^{\infty} B_n$ uma biálgebra conexa. Seja $a \in B_n$. Então:*

$$\Delta(a) = a \otimes 1_B + 1_B \otimes a + x$$

em que $x \in B_{n-1} \otimes B_{n-1}$. Em particular, $B_1 \subseteq \mathbb{K}1_B \oplus \mathrm{P}(B)$, em que $\mathrm{P}(B)$ é a álgebra de Lie dos elementos primitivos de B.

Demonstração. A filtração de B é compatível com a estrutura de biálgebra, então $\Delta(a) \in \sum_{k=0}^{n} B_k \otimes B_{n-k} \subseteq B_n \otimes B_0 + B_0 \otimes B_n + B_{n-1} \otimes B_{n-1}$, portanto $\Delta(a) = b \otimes 1_B + 1_B \otimes c + y$, com $b, c \in B_n$ e $y \in B_{n-1} \otimes B_{n-1}$. Agora note que, usando a propriedade da counidade, temos

$$\begin{aligned} a &= (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(\Delta(a)) = b\varepsilon(1_B) + 1_B\varepsilon(c) + (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(y) \\ &= b + \underbrace{\varepsilon(c)1_B + (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(y)}_{\in B_{n-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= (\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(\Delta(a)) = \varepsilon(b)1_B + \varepsilon(1_B)c + (\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(y) \\ &= c + \underbrace{\varepsilon(b)1_B + (\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(y)}_{\in B_{n-1}} \end{aligned}$$

Assim, $b - a, c - a \in B_{n-1}$.

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= b \otimes 1_B + 1_B \otimes c + y \\ &= a \otimes 1_B + 1_B \otimes a + (b - a) \otimes 1_B + 1_B \otimes (c - a) + y \\ &= a \otimes 1_B + 1_B \otimes a + x \end{aligned}$$

com $x = (b - a) \otimes 1_B + 1_B \otimes (c - a) + y \in B_{n-1} \otimes B_{n-1}$. Para a outra parte do lema, temos que $a \in B_1$ implica $\Delta(a) = a \otimes 1_B + 1_B \otimes a + \lambda(1_B \otimes 1_B)$, para algum $\lambda \in \mathbb{K}$. Portanto

$$\begin{aligned}\Delta(a+\lambda 1_B) &= \Delta(a) + \lambda\Delta(1_B)\\ &= a\otimes 1_B + 1_B \otimes a + \lambda(1_B\otimes 1_B) + \lambda(1_B \otimes 1_B)\\ &= (a+\lambda 1_B)\otimes 1_B + 1_B \otimes (a+\lambda 1_B)\end{aligned}$$

e $a+\lambda 1_B$ é um elemento primitivo. Assim, $a = -\lambda 1_B + a + \lambda 1_B \in \mathbb{K}1_B \oplus \mathrm{P}(B)$. A soma é direta porque $\mathbb{K}1_B \cap \mathrm{P}(B) = 0$. De fato, se $\lambda 1_B \in \mathrm{P}(B)$, então $\Delta(\lambda 1_B) = (\lambda 1_B)\otimes 1_B + 1_B \otimes (\lambda 1_B)$ e $\Delta(\lambda 1_B) = \lambda(1_B \otimes 1_B)$. Subtraindo, $0 = \lambda(1_B\otimes 1_B)$, e $\lambda = 0$, e obtemos o desejado. □

Iremos introduzir uma notação auxiliar. Removeremos o termo $a\otimes 1_B + 1_B \otimes a$ do Δ original, obtendo uma função coassociativa Δ', mas que não respeita o axioma da counidade, nem é morfismo de biálgebras.

Definição 4.1. Dado $a \in B$, com B biálgebra conexa,

$$\Delta'(a) := \Delta(a) - a\otimes 1_B - 1_B \otimes a$$

$$B' := \ker(\varepsilon)$$

$$B'_n := B_n \cup \ker(\varepsilon)$$

Observação 5. $\Delta'(1_B) = -1_B \otimes 1_B$, portanto Δ' não é morfismo de biálgebras.

Observação 6. Se tentarmos verificar o axioma da counidade, teremos

$$\begin{aligned}(\varepsilon\otimes \mathrm{Id})(\Delta'(a)) &= (\varepsilon \otimes \mathrm{Id})(\Delta(a) - a\otimes 1_B - 1_B\otimes a)\\ &= a - \varepsilon(a)1_B - a1_{\mathbb{K}} = -\varepsilon(a)1_B\end{aligned}$$

e de forma análoga, $(\varepsilon\otimes\mathrm{Id})(\Delta'(a)) = -\varepsilon(a)1_B$, de modo que não vale a propriedade da counidade.

Observação 7. Um elemento $a \in B$ é primitivo se e somente se pertence ao kernel de Δ'.

Proposição 4.2.

1. *Δ' é coassociativo.*
2. *Δ' é cocomutativo se Δ o for.*

Demonstração.

1. Seja $a \in B$.

$$\begin{aligned}&(\Delta'\otimes\mathrm{Id})(\Delta'(a))\\ &=(\Delta'\otimes \mathrm{Id})(a_{(1)}\otimes a_{(2)} - a\otimes 1_B - 1_B\otimes a)\\ &=a_{(1)(1)}\otimes a_{(1)(2)}\otimes a_{(2)} - a_{(1)}\otimes 1_B\otimes a_{(2)} - 1_B\otimes a_{(1)}\otimes a_{(2)}\\ &\quad - a_{(1)}\otimes a_{(2)}\otimes 1_B + a\otimes 1_B\otimes 1_B + 1_B\otimes a\otimes 1_B + 1_B\otimes 1_B\otimes 1_B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Id}\otimes\Delta')(\Delta'(a))\\ &=(\mathrm{Id}\otimes\Delta')(a_{(1)}\otimes a_{(2)} - a\otimes 1_B - 1_B\otimes a)\\ &=a_{(1)}\otimes a_{(2)(1)}\otimes a_{(2)(2)} - a_{(1)}\otimes a_{(2)}\otimes 1_B - a_{(1)}\otimes 1_B\otimes a_{(2)}\\ &\quad + a\otimes 1_B\otimes 1_B - 1_B\otimes a_{(1)}\otimes a_{(2)} + 1_B\otimes a\otimes 1_B + 1_B\otimes 1_B\otimes 1_B\end{aligned}$$

Portanto $(\mathrm{Id}\otimes\Delta')(\Delta'(a)) = (\Delta'\otimes\mathrm{Id})(\Delta'(a))$.

2. Seja $a \in B$. Como Δ é cocomutativo,

$$\begin{aligned}\tau \circ \Delta'(a) &= \tau(\Delta(a) - a \otimes 1_B - 1_B \otimes a)\\ &= \Delta(a) - 1_B \otimes a - a \otimes 1_B\\ &= \Delta'(a)\end{aligned}$$

□

A proposição a seguir refere-se à uma espécie de projeção de B em B'.

Proposição 4.3. *Seja* $\pi\colon B \to B'$ *a projeção* $\pi(a) = a - \varepsilon(a)1_B$. *Então:*

$$(\pi \otimes \pi) \circ \Delta = \Delta' \circ \pi$$

Em particular, temos

$$\Delta'(B'_n) \subseteq B'_{n-1} \otimes B'_{n-1}$$

Demonstração. Primeiramente, note que a imagem de π cai em $B' = \ker(\varepsilon)$. De fato, dado $a \in B$, temos $\varepsilon(\pi(a)) = \varepsilon(a - \varepsilon(a)1_B) = \varepsilon(a) - \varepsilon(a) = 0$.
Também note que π é sobrejetiva, pois dado $a' \in B'$, temos $\varepsilon(a') = 0$ e $a' = a' - \varepsilon(a')1_B = \pi(a') \in \mathrm{Im}(\pi)$.
Seja $a \in B$.

$$\begin{aligned}(\pi \otimes \pi)(\Delta(a)) =&(\pi \otimes \pi)(a_{(1)} \otimes a_{(2)})\\ =&(a_{(1)} - \varepsilon(a_{(1)})1_B) \otimes (a_{(2)} - \varepsilon(a_{(2)})1_B)\\ =&a_{(1)} \otimes a_{(2)} + \varepsilon(a_{(1)})\varepsilon(a_{(2)})(1_B \otimes 1_B) +\\ &- \varepsilon(a_{(1)})1_B \otimes a_{(2)} - \varepsilon(a_{(2)})a_{(1)} \otimes 1_B\\ =&\Delta(a) + \varepsilon(\varepsilon(a_{(1)})a_{(2)})(1_B \otimes 1_B) +\\ &- 1_B \otimes \varepsilon(a_{(1)})a_{(2)} - \varepsilon(a_{(2)})a_{(1)} \otimes 1_B\\ =&\Delta(a) + \varepsilon(a)1_B \otimes 1_B - 1_B \otimes a - a \otimes 1_B\\ =&\Delta'(a) - \varepsilon(a)\Delta'(1_B)\\ =&\Delta'(\pi(a))\end{aligned}$$

Portanto $(\pi \otimes \pi) \circ \Delta = \Delta' \circ \pi$. Além disso,

$$\begin{aligned}\Delta'(B'_n) &= \Delta' \circ \pi(B_n) = (\pi \otimes \pi)(\Delta(B_n))\\ &\subseteq (\pi \otimes \pi)\left(\sum_{l=0}^{n} B_{n-l} \otimes B_l\right) = B'_{n-1} \otimes B'_{n-1}\end{aligned}$$

pois $\pi(B_0) = \pi(\mathbb{K}1_B) = 0$ e $B_k \subseteq B_{n-1}$ para $k = 1, \ldots, n-1$. □

A proposição a seguir fornece que a counidade ε anula os elementos primitivos. Isso ocorre em qualquer biálgebra, como segue.

Proposição 4.4. *Para toda biálgebra* B *vale que* $\mathrm{P}(B) \subseteq \ker(\varepsilon)$

Demonstração. $\varepsilon(a) = \varepsilon(a\varepsilon(1_B) + 1_B\varepsilon(a)) = \varepsilon(a) + \varepsilon(a) \implies \varepsilon(a) = 0$, onde na primeira igualdade expandimos a pelo axioma da counidade. Então $\mathrm{P}(B) \subseteq \ker(\varepsilon)$. □

Aqui voltamos a uma biálgebra conexa. Obtemos outra informação decorrente da existência de uma filtração: que a counidade anula um certo pedaço de B, possibilitando a decomposição abaixo.

Lema 4.5. *Seja $B = \cup_{n=0}^{\infty} B_n$ uma biálgebra conexa. Então*

$$B = B_0 \oplus \ker(\varepsilon) = \mathbb{K}1_B \oplus \ker(\varepsilon)$$

E em consequência disso,

$$B = \mathbb{K}1_B + \cup_{n=1}^{\infty} B'_n$$

Demonstração. De fato, provemos por indução em n que $B_n \subseteq \mathbb{K}1_B \oplus \ker(\varepsilon)$. O caso $n = 1$ resulta do lema 4.1 e de $\mathrm{P}(B) \subseteq \ker(\varepsilon)$. Supomos como hipótese de indução que $B_{n-1} \subseteq \mathbb{K} \oplus \ker(\varepsilon)$. Para B_n, temos que todo $a \in B_n$ pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned} a &= (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(\Delta(a)) \\ &= (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(a \otimes 1_B + 1_B \otimes a + x) \\ &= a + 1_B\varepsilon(a) + (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(x) \end{aligned}$$

usando o axioma da counidade e o lema 4.1, com $x \in B_{n-1} \otimes B_{n-1}$. Temos que $x' := (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon)(x) \subseteq B_{n-1} \subseteq \mathbb{K}1_B \oplus \ker(\varepsilon)$. Então, aplicando ε em a, temos

$$\varepsilon(a) = \varepsilon(a) + \varepsilon(a) + \varepsilon(x') \implies \varepsilon(a + x') = 0$$

e portanto $a = (a + x') - x' \in \mathbb{K}1_B \oplus \ker(\varepsilon)$.
A soma é direta porque $\mathbb{K}1_B \cap \ker(\varepsilon) = 0$ ($\lambda 1_B$ não pode estar no kernel de ε, a não ser que $\lambda = 0$). □

O próximo lema faz uso da álgebra simétrica $\mathrm{S}(V)$. Mostra-se uma condição de injetividade para que um morfismo qualquer de coálgebras com domínio nas álgebras simétricas.

Lema 4.6. *Seja C uma coálgebra. Se $\ell \colon \mathrm{S}(V) \to C$ é um morfismo de coálgebras cuja restrição a $\mathbb{K} \oplus V$ é injetiva, então ℓ é injetivo.*

Demonstração. Considere a filtração de $\mathrm{S}(V)$ dada por $S_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathrm{S}^k(V)$, em que $\mathrm{S}^0(V) = \mathbb{K}$, $\mathrm{S}^1(V) = V$ e $\mathrm{S}^k(V)$ é o subespaço gerado pelos monômios de grau k. Com essa filtração, $\mathrm{S}(V)$ é uma biálgebra conexa. Vamos provar por indução em n que ℓ é injetiva em S_n. O caso $n = 1$ vale por hipótese, já que $S_1 = \mathrm{S}^0(V) \oplus \mathrm{S}^1(V) = \mathbb{K} \oplus V$. Suponha então que ℓ seja injetiva em S_n. Iremos provar que ℓ é injetiva em S_{n+1} mostrando que o kernel da restrição é nulo. Seja $x \in S_{n+1}$ pertencente ao kernel de ℓ, ou seja, $\ell(x) = 0$. Temos

$$\begin{aligned} (\ell \otimes \ell)(\Delta'_{\mathrm{S}(V)}(x)) =& (\ell \otimes \ell)(\Delta_{\mathrm{S}(V)}(x) - x \otimes 1_{\mathrm{S}(V)} - 1_{\mathrm{S}(V)} \otimes x) \\ =& (\ell \otimes \ell)(\Delta_{\mathrm{S}(V)}(x)) - \ell(x) \otimes \ell(1_{\mathrm{S}(V)}) - \ell(1_{\mathrm{S}(V)}) \otimes \ell(x) \\ =& (\ell \otimes \ell)(\Delta_{\mathrm{S}(V)}(x)) \\ =& \Delta_C(\ell(x)) \\ =& \Delta_C(0) = 0 \end{aligned}$$

Mas $\Delta'_{\mathrm{S}(V)}(x) \in S_n \otimes S_n$, pela proposição 4.3. Pela hipótese de indução ℓ é injetiva em S_n, e isso implica que $\ell \otimes \ell$ é injetiva em $S_n \otimes S_n$ (de fato, $\ker(\ell \otimes \ell) = S_n \otimes \ker(\ell) + \ker(\ell) \otimes S_n = 0$, considerando ℓ restrita em S_n). Então

$$(\ell \otimes \ell)(\Delta'_{\mathrm{S}(V)}(x)) = 0 \implies \Delta'_{\mathrm{S}(V)}(x) = 0$$

e isso implica que x é primitivo, conforme a observação 7. Já que $\mathrm{S}(V) = \mathcal{U}(V)$ (com o colchete de Lie nulo em V), e como os elementos primitivos de uma álgebra envolvente universal são os próprios elementos da álgebra de Lie, temos que $x \in V$. Portanto, lembrando que $\ell(x) = 0$ e que ℓ é injetiva em S_n, temos que $x = 0$. Dessa forma, ℓ é injetiva em S_{n+1}. $\square$

A seguir temos um lema bastante interessante sobre o mapa de simetrização, definido abaixo. Surpreendentemente, esse mapa é um isomorfismo (de coálgebras).

Lema 4.7. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathbb{K}$ de característica 0. O mapa de simetrização $\rho\colon \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ definido por*

$$\rho(g_1 \dots g_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)}$$

$$\rho(1_{\mathbb{K}}) := 1_{\mathbb{K}}$$

(e estendido a uma transformação linear) é um isomorfismo de coálgebras, mas não é morfismo de álgebras. A sua inversa $\rho^{-1}\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{S}(\mathfrak{g})$ é a transformação linear dada nos vetores da base por

$$\rho^{-1}(g_1 \dots g_n) = g_1 \dots g_n$$

Demonstração.
Afirmação: ρ é bijeção.

Demonstração. Vamos mostrar que $\varrho = \rho^{-1}$ é de fato a inversa. Uma das composições é mais fácil:

$$\begin{aligned}
\varrho \circ \rho(g_1 \dots g_n) &= \varrho\left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)}\right) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} g_1 \dots g_n \\
&= \frac{1}{n!} n!\; g_1 \dots g_n \\
&= g_1 \cdots g_n
\end{aligned}$$

A outra composição precisa ser feita por indução em n, o número de fatores de $g_1 \dots g_n \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Os casos $n = 0$ e $n = 1$ são imediatos:

$$\rho \circ \varrho(1_{\mathbb{K}}) = \rho(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}}$$

$$\rho \circ \varrho(g_1) = \rho(g_1) = g_1$$

Para o caso $n = 2$, vamos reescrever a parcela $g_1 g_2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ da seguinte forma:

$$g_1 g_2 = \tfrac{1}{2!} g_1 g_2 + \tfrac{1}{2!} g_1 g_2 = \tfrac{1}{2!} g_1 g_2 + \tfrac{1}{2!} g_2 g_1 + \tfrac{1}{2!} \underbrace{[g_1, g_2]}_{\text{um só fator}}$$

Temos $\rho \circ \varrho([g_1, g_2]) = [g_1, g_2]$ pelo caso $n = 1$. Então

$$\begin{aligned}
\rho \circ \varrho(g_1 g_2) &= \rho \circ \varrho \left(\tfrac{1}{2!} g_1 g_2 + \tfrac{1}{2!} g_2 g_1 + \tfrac{1}{2!} [g_1, g_2] \right) \\
&= \rho \circ \varrho \left(\tfrac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} g_{\sigma(1)} g_{\sigma(2)} + \tfrac{1}{2!} [g_1, g_2] \right) \\
&= \rho \left(\tfrac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} \underbrace{g_{\sigma(1)} g_{\sigma(2)}}_{\in \mathrm{S}(\mathfrak{g})} + \tfrac{1}{2!} [g_1, g_2] \right) \\
&= \rho \left(\tfrac{1}{2!} 2! g_1 g_2 + \tfrac{1}{2!} [g_1, g_2] \right) \\
&= \rho \left(g_1 g_2 + \tfrac{1}{2!} [g_1, g_2] \right) \\
&= \tfrac{1}{2!} \sum_{\sigma \in S_2} g_{\sigma(1)} g_{\sigma(2)} + \tfrac{1}{2!} [g_1, g_2] \\
&= \tfrac{1}{2!} g_1 g_2 + \tfrac{1}{2!} g_2 g_1 + \tfrac{1}{2!} (g_1 g_2 - g_2 g_1) \\
&= g_1 g_2
\end{aligned}$$

Suponha válido o caso n, em que $\rho \circ \varrho(g_1 \dots g_n) = g_1 \dots g_n$ para qualquer monômio com até n fatores em g. O caso $n + 1$ se mostra de forma análoga ao caso $n = 2$, mas com uma notação mais complicada. Usando o comutador várias vezes, escrevemos

$$\begin{aligned}
g_1 \cdots g_n g_{n+1} &= \tfrac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_{n+1}} g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n+1)} \\
&= \tfrac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_{n+1}} g_1 \cdots g_{n+1} + \\
&\qquad + \text{termos com } [\ ,\ ] \text{ (monômios com } \leq n \text{ fatores)} \\
&= g_1 \dots g_{n+1} + \\
&\qquad + \text{termos com } [\ ,\ ] \text{ (monômios com } \leq n \text{ fatores)}
\end{aligned}$$

Em seguida, aplicamos ϱ e caímos em $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, onde podemos comutar os g_i's. Ficamos com

$$\begin{aligned}
\varrho(g_1 \cdots g_n g_{n+1}) &= g_1 \cdots g_{n+1} + \\
&\qquad + \text{termos com } [\ ,\ ] \text{ (monômios com } \leq n \text{ fatores)}
\end{aligned}$$

Aplicando ρ, os monômios com $\leq n$ fatores não se alteram, pela hipótese de indução. O termo $g_1 \dots g_{n+1}$ é calculado com a definição de ρ, e ficamos com

$$\begin{aligned}
\varrho(g_1 \cdots g_n g_{n+1}) &= \tfrac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in S_{n+1}} g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n+1)} + \\
&\qquad + \text{termos com } [\ ,\ ] \text{ (monômios com } \leq n \text{ fatores)} \\
&= g_1 \cdots g_{n+1}
\end{aligned}$$

Recuperamos $g_1 \dots g_{n+1}$ revertendo os passos usados no começo. Isso encerra a indução. $\square$

Afirmação: ρ é morfismo de coálgebras.

Demonstração. É fácil ver que ρ^{-1} é morfismo de coálgebras. Então

$$(\rho^{-1} \otimes \rho^{-1}) \circ \Delta = \Delta \circ \rho^{-1}$$
$$\varepsilon \circ \rho^{-1} = \varepsilon$$

implica

$$\Delta \circ \rho = (\rho \otimes \rho) \circ \Delta$$
$$\varepsilon = \varepsilon \circ \rho$$

e portanto ρ é morfismo de coálgebras. $\square$

$\square$

Por fim, veremos uma proposição sobre extensões de morfismos de álgebras de Lie.

Proposição 4.8. *Sejam B uma biálgebra e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Considere um morfismo de álgebras de Lie $f\colon \mathfrak{g} \to B_L$. Pela propriedade universal da álgebra envolvente universal, existe único morfismo de álgebras $\overline{f}\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to B_L$.*

1. *Se $f(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{P}(B)$, então $\overline{f}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathcal{U}(\mathrm{P}(B))$ e a extensão $\overline{f}$ é um morfismo de biálgebras.*
2. *Se B é uma álgebra de Hopf e $f(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{P}(B)$, então $\overline{f}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \subseteq \mathcal{U}(\mathrm{P}(B))$ e a extensão $\overline{f}$ é um morfismo de álgebras de Hopf.*

Demonstração.

1. Sabemos que $\overline{f}$ é um morfismo de álgebras. Então resta mostrar que é um morfismo de coálgebras. Seja $g \in \mathfrak{g}$ [1]. Temos $f(g) = \overline{f}(g)$ primitivo em B, portanto
$$\begin{aligned}\Delta_B \circ \overline{f}(g) &= \overline{f}(g) \otimes 1_B + 1_B \otimes \overline{f}(g)\\ &= (\overline{f} \otimes \overline{f})(g \otimes 1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} + 1_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \otimes g)\\ &= (\overline{f} \otimes \overline{f}) \circ \Delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(g)\end{aligned}$$
e os morfismos de álgebras $\Delta_B \circ \overline{f}$ e $(\overline{f} \otimes \overline{f}) \circ \Delta_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$ coincidem em $\mathfrak{g}$. Pela propriedade universal da álgebra envolvente, temos que os dois morfismos coincidem em todo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.
Além disso, sabemos da proposição 4.4 que os elementos primitivos de uma biálgebra são anulados pela counidade. Então $\varepsilon_B \circ \overline{f}(g) = 0 = \varepsilon_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}(g)$, e os morfismos $\varepsilon_B \circ \overline{f}$ e $\varepsilon_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$ coincidem em $\mathfrak{g}$. Também pela propriedade universal, temos que esses morfismos são iguais em todo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.
Dessa forma $\overline{f}$ é um morfismo de biálgebras
2. Segue do item 1. e do fato de que todo morfismo de biálgebras entre duas álgebras de Hopf preserva antípoda.

$\square$

[1] Aqui e no que segue estamos considerando $\mathfrak{g}$ incluso em $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

5 Teorema de Milnor-Moore

Vamos à prova do teorema central do artigo. O material seguido continua sendo o livro [4].

Teorema 5.1 (Milnor-Moore)**.** *Seja B uma biálgebra conexa e cocomutativa, sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica 0. Então*

$$B \cong \mathcal{U}(\mathrm{P}(B))$$

e o isomorfismo é dado por $J\colon \mathcal{U}(\mathrm{P}(B)) \to B$, a extensão da inclusão canônica $j\colon \mathrm{P}(B) \to B$.

Demonstração. A extensão da inclusão canônica, $J\colon \mathcal{U}(\mathrm{P}(B)) \to B$, é um morfismo de biálgebras, pela proposição 4.8 (note que a imagem de j são os elementos primitivos de B). Resta mostrar que é bijeção.
Comecemos com a injetividade, que é mais fácil. Temos que $J\circ\rho\colon \mathrm{S}(\mathrm{P}(B)) \to B$ é um morfismo de coálgebras e a sua restrição a $\mathbb{K} \oplus \mathrm{P}(B)$ é injetiva, pois $\rho(\mathbb{K}\oplus\mathrm{P}(B)) = \mathbb{K}\oplus\mathrm{P}(B)$ e J é injetiva nesse domínio (porque $J(\lambda+b) = 0 \implies \lambda + b = 0$). Pelo lema 4.6, temos que $J \circ \rho$ é injetiva, e pelo lema 4.7, ρ é isomorfismo, e portanto J é injetiva.
Vamos à sobrejetividade. Seja $\{a_i\}_{i\in I}$ base para a álgebra de Lie $\mathrm{P}(B)$. Pelo teorema de Poincarè-Birkhoff-Witt,

$$\{a^r := a_{i_1}^{r_1} \dots a_{i_k}^{r_k} \mid r = (r_1, \dots, r_k),\ r_{i_n} \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}\}$$

é base para $\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))$. Aplicando $J\circ\rho$ e multiplicando por constantes adequadas, obtemos que

$$\{A^r := \tfrac{1}{r!}J(a^r) \mid r = (r_1, \dots, r_k),\ r_{i_n} \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}\}$$

é base para a imagem de J. Como B é uma biálgebra conexa, pelo lema 4.5, temos $B = \mathbb{K}1_B + \cup_{n=1}^{\infty} B'_n$. Sabemos que $\mathbb{K}1_B \subseteq \mathrm{Im}(J)$, e seria suficiente provar que $B'_n \subseteq \mathrm{Im}(J)$ para todo $n \geq 1$. Iremos provar por indução em n.
O caso $n = 1$ é consequência do lema 4.1; temos

$$B'_1 = B_1 \cap \ker(\varepsilon) \subseteq \underbrace{(\mathbb{K}1_B \oplus \mathrm{P}(B))}_{\subseteq \mathrm{Im}(J)} \cap \ker(\varepsilon) \subseteq \mathrm{Im}(J)$$

Supondo que para $n \in \mathbb{N}$ vale $B'_n \subseteq \mathrm{Im}(J)$. Vamos mostrar que $B'_{n+1} \subseteq \mathrm{Im}(J)$. Seja $a \in B'_{n+1}$. Então $\Delta'_B(a) \in B'_n \otimes B'_n$, segundo a proposição 4.3. Pela hipótese de indução, $\Delta'_B(a) \in \mathrm{Im}(J) \otimes \mathrm{Im}(J)$, e usando a base de $\mathrm{Im}(J)$ escrita acima,

$$\Delta'_B(a) = \sum_{r,s} \lambda(r,s) A^r \otimes A^s$$

com $\lambda(r,s) \in \mathbb{K}$ e a soma é sobre multi-índices $r, s \in \mathbb{N}^I$ com apenas finitas entradas não nulas.
Por outro lado, $\Delta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}(a_i^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a_i^k \otimes a_i^{n-k}$ e então

$$\Delta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}\left(\frac{a_i^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_i^k}{k!} \otimes \frac{a_i^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k+l=n} \frac{a_i^k}{k!} \otimes \frac{a_i^l}{l!}$$

$$\Delta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}\left(\frac{a_{i_1}^{r_1}}{r_1!}\cdots\frac{a_{i_k}^{r_k}}{r_k!}\right)=\left[\sum_{p_1+q_1=r_1}\frac{a_{i_1}^{p_1}}{p_1!}\otimes\frac{a_{i_1}^{q_1}}{q_1!}\right]\cdots\left[\sum_{p_k+q_k=r_k}\frac{a_{i_k}^{p_k}}{p_k!}\otimes\frac{a_{i_k}^{q_k}}{q_k!}\right]$$

logo

$$\Delta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}\left(\frac{1}{r!}a^r\right)=\sum_{p+q=r}A^p\otimes A^q$$

Usando que J é morfismo de biálgebras, temos

$$\begin{aligned}\Delta_B(A^r)=&\Delta_B\left(\frac{1}{r!}J(a^r)\right)\\ =&(J\otimes J)\circ\Delta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}\left(\frac{1}{r!}a^r\right)\\ =&(J\otimes J)\left(\sum_{p+q=r}A^p\otimes A^q\right)\\ =&\sum_{p+q=r}A^p\otimes A^q\end{aligned}$$

Assim conseguimos calcular

$$\begin{aligned}(\Delta'_B\otimes\mathrm{Id})(\Delta'_B(a)) &= \sum_{p,t}\lambda(p,t)\Delta'_B(A^p)\otimes A^t\\ &= \sum_{r,s,t}A^r\otimes A^s\otimes A^t\\ (\mathrm{Id}\otimes\Delta'_B)(\Delta'_B(a)) &= \sum_{r,q}\lambda(r,q)\Delta'_B(A^r)\otimes A^q\\ &= \sum_{r,s,t}A^r\otimes A^s\otimes A^t\end{aligned}$$

Lembramos que Δ'_B é coassociativo e cocomutativo, pela proposição 4.2. A coassociatividade nos dá

$$\lambda(r+s,t)=\lambda(r,s+t)$$

e a cocomutatividade fornece

$$\lambda(r,s)=\lambda(s,r)$$

Afirmação: $\lambda(r,s)$ só depende da soma $r+s$.

Demonstração. De fato, sejam r,s,t,u multi-índices tais que $r+s=t+u$. Vamos decompor esses multi-índices de tal forma que

$$\begin{array}{ll} r=k+l & s=m+n\\ t=k+m & u=l+n\end{array}$$

Para tanto, fixamos $i\in I$ e tentamos resolver o sistema linear para k_i, l_i, m_i e n_i.

$$\left\{\begin{array}{lllll} k_i & +l_i & & & =r_i\\ k_i & & +m_i & & =t_i\\ & +l_i & +m_i & & =u_i\\ & & +m_i & +n_i & =s_i\end{array}\right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrcl} 1 & 1 & 0 & 0 & | & r_i\\ 0 & -1 & 1 & 0 & | & t_i-r_i\\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & s_i\\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \underbrace{t_i-r_i+u_i-s_i}_{=0}\end{array}\right)$$

Obtemos que

$$\begin{aligned}
k_i &= \alpha_i - s_i + t_i = \alpha_i - u_i + r_i \\
l_i &= -\alpha_i + u_i \\
m_i &= -\alpha_i + s_i \\
n_i &= \alpha_i
\end{aligned}$$

para qualquer α_i. Resta observar que podemos escolher um α_i tal que $k_i, l_i, m_i, n_i \geq 0$. De fato, as condições para que isso aconteça são

$$\begin{gathered}
0 \leq \alpha_i \leq s_i \\
u_i - r_i \leq \alpha_i \leq u_i
\end{gathered}$$

Basta escolher $\alpha_i = 0$ para os índices i em que $r_i, s_i, t_i, u_i = 0$, e para os finitos índices em que algum desses não é nulo, defina $\alpha_i = u_i - r_i = s_i - t_i$ se $u_i - r_i \geq 0$ e $\alpha_i = \min(s_i, u_i)$ se $u_i - r_i < 0$. Dessa forma, conseguimos multi-índices $k, l, m, n \in \mathbb{N}^I$ como requeridos acima. Tendo isso, fazemos

$$\lambda(r,s) = \lambda(k+l, m+n) = \lambda(k+l+m, n) = \lambda(k+m, l+n) = \lambda(t,u)$$

Assim $\lambda(r,s)$ depende só de $r+s$. □

Dessa forma

$$\begin{aligned}
\Delta'_B(a) &= \sum_{r,s} \lambda(r+s) A^r \otimes A^s \\
&= \sum_t \sum_{r+s=t} \lambda(r+s) A^r \otimes A^s \\
&= \sum_t \lambda(t) \Delta_B(A^t) \\
&= \sum_t \lambda(t) \Delta'_B(A^t)
\end{aligned}$$

já que A^t é primitivo. Assim

$$\Delta'_B\left(a - \sum_t \lambda(t) A^t\right) = 0$$

e $b := a - \sum_t \lambda(t) A^t$ é primitivo. Por fim, $b = j(b) = J(b) \in \mathrm{Im}(J)$, e como todos os A^t estão em $\mathrm{Im}(J)$, temos $a = b + \sum_t \lambda(t) A^t \in \mathrm{Im}(J)$, e terminamos a demonstração. □

Uma consequência é que a biálgebra conexa satisfazendo os requisitos do teorema é, garantidamente uma álgebra de Hopf.

Corolário 5.2. *Seja B uma biálgebra conexa e cocomutativa sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica 0. Então B é uma álgebra de Hopf.*

Demonstração. De fato, pelo teorema de Milnor-Moore, $B \cong \mathcal{U}(\mathrm{P}(B))$ como biálgebras. Seja $J\colon \mathcal{U}(\mathrm{P}(B)) \to B$ esse isomorfismo. Como $\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))$ tem antípoda $S_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))}$, temos que $S := J \circ S_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ J$ é antípoda para B. De fato,

$$\begin{aligned}
\mu \circ \big(S \otimes \mathrm{Id}\big)\Delta &= \mu \circ \big((J \circ S_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ J^{-1}) \otimes \mathrm{Id}\big)\Delta \\
&= \mu \circ (J \otimes J) \circ (S_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \otimes \mathrm{Id}) \circ (J^{-1} \otimes J^{-1}) \circ \Delta \\
&= J \circ \mu_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ (S_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ J^{-1} \\
&= J \circ \eta_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ \varepsilon_{\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))} \circ J^{-1} \\
&= \eta \circ \varepsilon
\end{aligned}$$

e de forma análoga obtem-se que $\mu \circ \big(\mathrm{Id} \otimes S\big)\Delta = \eta \circ \varepsilon$. □

Observação 8. Tendo em vista que B e $\mathcal{U}(\mathrm{P}(B))$ são álgebras de Hopf, o morfismo do teorema de Milnor-Moore é isomorfismo de álgebras de Hopf também.

Referências

[1] S. Dascalescu, C. Nastasescu, S. Raianu, *Hopf Algebras: an introduction*, Marcel Dekker 2001.

[2] D. E. Radford, *Hopf Algebras*, World Scientific 2012.

[3] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover 1979.

[4] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly, H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, 2001.