Álgebra I

1ª Lista de Exercícios

- 1) Mostre que em todo anel comutativo com unidade vale a fórmula do binômio de Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- 2) Um anel R é dito ter característica $n \in \mathbb{N}$ se:
- (i) Para todo $a \in R$ tivermos $na = 0$ (entenda na da forma natural, como sendo a soma de a com ele mesmo n vezes).
 - (ii) Para todo número natural $m < n$ existe $a \in R$ tal que $ma \neq 0$.
- Mostre que se p é um número primo e um anel comutativo com unidade tiver característica p , então, para quaisquer $a, b \in R$ teremos $(a + b)^p = a^p + b^p$.
- 3) Seja R um anel, um elemento não nulo $a \in R$ é dito ser nilpotente se existe um número natural $n > 1$ tal que $a^n = 0$ (entenda as potências de elementos de um anel naturalmente, isto é, $a^n = a.a \dots a$ em que a multiplicação do elemento por ele mesmo é efetuada n vezes). Mostre que, em um anel comutativo, se a e b são elementos nilpotentes, então $a + b$ e $a.b$ também o serão.
- 4) Seja R um anel, um elemento $a \in R$ é dito ser idempotente se $a^2 = a$. Mostre que em um anel com unidade e sem divisores de zero, os únicos idempotentes que existem são 0 e 1 .
- 5) Dê exemplos de elementos idempotentes e elementos nilpotentes no anel das matrizes $n \times n$ com entradas em um corpo.
- 6) Sejam R e S anéis, mostre que o produto cartesiano $R \times S$ também tem estrutura de anel com a soma

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2)$$

e produto

$$(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 \cdot s_1, r_2 \cdot s_2).$$

Mostre também que, se R e S têm unidade, então $R \times S$ tem unidade, dada por $(1_R, 1_S)$.

- 7) Seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X . Vamos definir duas operações em $\mathcal{P}(X)$:
- (1) Soma, dada pela diferença simétrica entre conjuntos, isto é, se A e B são subconjuntos de X , então $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
 - (2) Produto, dado pela intersecção, isto é, $A.B = A \cap B$.
- Mostre que:
- a) O conjunto $\mathcal{P}(X)$ com as operações acima é um anel comutativo com unidade (neste caso, 0 é o conjunto vazio e 1 é o conjunto X).
 - b) A operação soma também pode ser definida equivalentemente como $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
 - c) Mostre que este anel possui característica 2 .
 - d) Mostre que todo elemento deste anel é idempotente.
 - e) Mostre que o complementar de um subconjunto A , ou seja o conjunto $A^C = X \setminus A$, pode ser obtido como $A^C = A + 1$.

- 8) Seja X um conjunto e R um anel. Mostre que o conjunto

$$\text{Fun}(X, R) = \{f : X \rightarrow R\}$$

é um anel com a soma e multiplicação ponto a ponto.

- 9) Mostre que o conjunto das funções reais contínuas definidas no intervalo $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ é um anel comutativo com a soma e produto de funções ponto a ponto e cuja unidade é dada pela função constante igual a 1.
- 10) Mostre que o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis definidas em um intervalo aberto $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ é um anel comutativo com as operações de soma e produto de funções dadas ponto a ponto e cuja unidade é dada pela função constante igual a 1.
- 11) Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se anula no infinito se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um intervalo fechado $[a, b]$ tal que $|f(x)| < \epsilon$ para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ (onde $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ é o complementar do segmento $[a, b]$ na reta real). Considere

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ se anula no infinito}\}.$$

Mostre que $C_0(\mathbb{R})$ é um anel comutativo sem unidade.

- 12) Considere o conjunto $\text{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ com a soma de funções ponto a ponto e com o produto de convolução:

$$f * g(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k)$$

Mostre que $\text{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ é um anel comutativo com unidade dada pela função $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como

$$u(n) = \delta_{0,n} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 0, & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$