

Álgebra I

2ª Lista de Exercícios

Números Naturais e subaneis

- 1) Mostre que $\mathbb{N} = \{0\} \cup \text{Im}(\sigma)$.
- 2) Mostre que o axioma de Peano:

Seja um A um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que
(i) $0 \in A$.
(ii) Se $n \in A$, então $\sigma(n) \in A$.
Então $A = \mathbb{N}$.

é equivalente ao primeiro princípio de indução:

Seja um $P(n)$ uma sentença a respeito de cada número $n \in \mathbb{N}$. Suponha que
(i) $P(0)$ é verdadeira.
(ii) Se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira.
Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

- 3) Mostre que o primeiro princípio de indução é equivalente ao segundo princípio de indução:

Seja um $P(n)$ uma sentença a respeito de cada número $n \in \mathbb{N}$. Suponha que
(i) $P(0)$ é verdadeira.
(ii) Se $P(k)$ é verdadeira para $0 \leq k \leq n$, então $P(n+1)$ é verdadeira.
Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

- 4) A soma nos números naturais é definida recursivamente por,

- (i) Para todo $m \in \mathbb{N}$, $m + 0 = m$.
- (ii) Para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $m + \sigma(n) = \sigma(m + n)$.

Mostre as seguintes propriedades da soma:

- a) $0 + m = m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
- b) A soma é comutativa.
- c) A soma é associativa.

- 5) A multiplicação nos números naturais é definida recursivamente por,

- (i) Para todo $m \in \mathbb{N}$, $m \cdot 0 = 0$.
- (ii) Para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $m \cdot \sigma(n) = m \cdot n + m$.

Mostre as seguintes propriedades da multiplicação:

- a) $0 \cdot m = 0$ para qualquer $m \in \mathbb{N}$.
- b) Chamando $1 = \sigma(0)$, então $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
- c) Para todos $m, n, p \in \mathbb{N}$, $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$.
- d) Para todos $m, n, p \in \mathbb{N}$, $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$.
- e) A multiplicação é comutativa.
- f) A multiplicação é associativa.

- 6) Podemos definir uma ordem nos números naturais: $m \leq n$ se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Mostre que
- $m \leq m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.
 - Se $m \leq n$ e $n \leq m$, então $m = n$.
 - Se $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$.
 - Dados dois números naturais m e n , então ou $m < n$ ou $m = n$ ou $n < m$ (entenda-se $m < n$ como $m \leq n$ e $m \neq n$).
 - Se $m \leq n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, $m + p \leq n + p$.
 - Se $m \leq n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, $m.p \leq n.p$.
 - Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n^2$.
- 7) Utilize a ordem nos naturais para mostrar as seguintes propriedades de cancelamento:
- Se $m + p = n + p$, então $m = n$.
 - Se $m.p = n.p$, então $m = n$.
- 8) Mostre que o segundo princípio de indução é equivalente ao princípio da boa ordem:

Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.

- 9) Mostre que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, com $n \neq 0$, existem únicos $q, r \in \mathbb{N}$, com $0 \leq r < n$, satisfazendo $m = q.n + r$.
- 10) Mostre que o conjunto das matrizes triangulares superiores:

$$UT_n(\mathbb{R}) = \left\{ (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0, \text{ para } i > j \right\}$$

é um subanel do anel das matrizes $M_n(\mathbb{R})$.

- 11) O Anel dos inteiros Gaussianos é definido como

$$\mathbb{Z}[i] = \{m + ni \in \mathbb{C} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que $\mathbb{Z}[i]$ é subanel de $\mathbb{C}$ e mostre que $\mathbb{Z}[i]$ é um domínio.

- 12) Mostre que o anel R pode ser visto como subanel do anel de polinômios $R[x]$.
- 13) Dê um exemplo de um anel com unidade que tem um subanel sem unidade.
- 14) Dê um exemplo de um anel sem unidade que possui um subanel com unidade.
- 15) Dê um exemplo de um anel com unidade que possui um subanel com unidade cuja unidade é a mesma do anel original, isto é, R é um anel unital, $S \subseteq R$ é um subanel unital e $1_S = 1_R$.
- 16) Dê um exemplo de um anel unital que possui um subanel unital, mas que a unidade do subanel não coincide com a unidade do anel original, isto é, R é um anel unital, $S \subseteq R$ é um subanel unital mas $1_S \neq 1_R$.
- 17) Dê um exemplo de um anel não comutativo que possui um subanel comutativo.
- 18) Mostre que $\mathbb{R}$ é subanel de $\mathbb{C}$ e de $\mathbb{H}$ (isto responde à questão anterior).
- 19) Mostre que $\mathbb{C}$ é subanel de $\mathbb{H}$.
- 20) Verifique que todo subanel de um anel comutativo também é comutativo.

- 21)** Dê um exemplo de um anel R e um subconjunto $S \subseteq R$ que não seja um subanel e tal que
- (i) Se $a, b \in S$ então $a + b \in S$.
 - (ii) Se $a, b \in S$, então $a.b \in S$.
- 22)** Mostre que todo subanel de $\mathbb{C}$ contém $\mathbb{Z}$ e que todo subcorpo de $\mathbb{C}$ contém $\mathbb{Q}$.
- 23)** Determine todos os subanéis de $\mathbb{Z}$, com ou sem unidade (sugestão: restrinja-se aos elementos positivos do subanel e use o princípio da boa ordem para determinar o menor deles, depois é só tomar os opostos dos elementos encontrados).
- 24)** Determine os elementos invertíveis de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$ e $\mathbb{Z}_n$.
- 25)** Mostre que se um elemento $a \in R$ possui inverso à esquerda e à direita então é inversível, isto é, se existem $b, c \in R$ tais que $b.a = 1 = a.c$, então $b = c$.
- 26)** Seja $\mathbb{K}$ um corpo e

$$R = \{n.1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K} \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que R é subanel de $\mathbb{K}$ e mostre também que qualquer subcorpo $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ contém R .

- 27)** Considere o conjunto

$$\mathbb{F}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}.$$

- a) Mostre que $\mathbb{F}_4$ é subanel de $M_2(\mathbb{Z}_2)$.
- b) Mostre que $\mathbb{F}_4$ é de fato um corpo com exatamente 4 elementos.