Álgebra I

Lista 4

1) Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Mostre que o corpo de frações $\mathrm{Fr}(\mathbb{K})$ é isomorfo a $\mathbb{K}$.

2) Seja $\mathbb{K}$ um corpo e R um anel. Mostre que qualquer homomorfismo $f : \mathbb{K} \to R$ ou é identicamente nulo ou é injetivo.

3) Determine todos os homomorfismos de anel entre $\mathbb{Z}^2$ e $\mathbb{Z}$.

4) Mostre que não existe isomorfismo de anel entre

$$R = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}, \qquad \text{e} \qquad S = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

5) Seja R um anel e $I \trianglelefteq R$, mostre que o subconjunto

$$\mathrm{Ann}^L(I) = \{a \in R \mid ai = 0,\ \forall i \in I\}$$

também é um ideal de R.

6) Seja R um anel comutativo com unidade e $I \trianglelefteq R$. Definimos o radical de I como o subconjunto

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N},\ a^n \in I\}.$$

Mostre que $\sqrt{I} \trianglelefteq R$.

7) Mostre que o conjunto dos elementos nilpotentes de um anel comutativo com unidade também é um ideal.

8) Mostre que se R é um anel comutativo e $I \trianglelefteq R$, então R/I também será um anel comutativo.

9) Mostre que se R é um anel com unidade e $I \trianglelefteq R$, então R/I também será um anel com unidade.

10) Considere I um anel qualquer e sejam $I \trianglelefteq R$ um ideal e um elemento $e \in R$ tais que para qualquer $a \in R$ temos que $ea - a \in I$ e $ae - a \in I$. Mostre que R/I é um anel com unidade.

11) Mostre que se R é um anel comutativo com unidade I é um ideal maximal de R, então R/I é um corpo.

12) Mostre que se R é um anel comutativo com unidade e I é um ideal primo de R, então R/I é um domínio.

13) Seja R um anel comutativo com unidade mostre que todo ideal maximal de R também é um ideal primo.