

Álgebra I

Lista 5

Nome:

- 1) Sejam R e S dois anéis comutativos com unidade e $f : R \rightarrow S$ um morfismo unital. Mostre que, se $I \trianglelefteq S$ é ideal primo, então $f^{-1}(I) \trianglelefteq R$ é ideal primo.
- 2) Mostre que $(\bar{a}) = (\bar{b})$ em $\mathbb{Z}_n$ se, e somente se, $\text{mdc}(a, n) = \text{mdc}(b, n)$.
- 3) Mostre que $\mathbb{Z} + 2i\mathbb{Z}$ é sub anel de $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ mas não é ideal.
- 4) Seja $\mathbb{K}$ um corpo. mostre que o ideal $\langle x, y \rangle$ não é um ideal principal em $\mathbb{K}[x, y]$.
- 5) Seja R o anel das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em um corpo $\mathbb{K}$. Determine os ideais $R^2, R^3, R^4, \dots$ de R .
- 6) Sejam $I, J, K \trianglelefteq R$.
 - a) Mostre que $I + J = I$ se, e somente se $J \subseteq I$.
 - b) Mostre que $I \cap J = I$ se, e somente se $I \subseteq J$.
 - c) Mostre que $(I \cap K) + (J \cap K) \subseteq (I + J) \cap K$ e que a igualdade ocorre se $I \subseteq K$ ou $J \subseteq K$.
- 7) Dê um exemplo de ideal primo de um anel que não seja maximal.
- 8) Mostre que

$$I = \{f \in \mathbb{Z}[x] \mid f(0) = 0\}$$

é um ideal principal de $\mathbb{Z}[x]$. Este ideal é primo? Este ideal é maximal?

- 9) Seja R um domínio e $a_1, \dots, a_n \in R$. mostre que $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ é um ideal primo de $R[x_1, \dots, x_n]$.
- 10) Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathbb{K}(x)$ o corpo de frações de $\mathbb{K}[x]$. Para $\alpha \in \mathbb{K}$ seja R_α o conjunto de todos os elementos $\varphi \in \mathbb{K}(x)$ que podem ser expressos na forma $\varphi = \frac{f}{g}$, com $f, g \in \mathbb{K}[x]$ e $g(\alpha) \neq 0$. Mostre que R_α é um anel e que a avaliação

$$\begin{array}{ccc} ev_\alpha : R_\alpha & \rightarrow & \mathbb{K} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(\alpha) \end{array}$$

é um morfismo de anéis bem definido e $\text{Ker}(ev_\alpha) = R_\alpha$.

- 11) Seja R um anel comutativo com unidade. Mostre que se todo ideal principal próprio de R for primo (incluindo o ideal nulo $\{0\}$), então R é um corpo.
- 12) Seja R um anel comutativo com unidade. Suponha que para cada $a \in R$ exista um natural $n > 1$ tal que $a^n = a$. Mostre que todo ideal primo de R é maximal.
- 13) Mostre que $2\mathbb{Z}[x]$ não é ideal maximal em $\mathbb{Z}[x]$, muito embora $2\mathbb{Z}$ seja maximal em $\mathbb{Z}$.
- 14) Seja R um anel comutativo com unidade e $\text{Nil}(R) = \sqrt{\{0\}}$. mostre que são equivalentes
 - (i) R tem exatamente um ideal primo.
 - (ii) Todo elemento de R ou é invertível ou é nilpotente.
 - (iii) $R/\text{Nil}(R)$ é um corpo.
- 15) Seja R um anel comutativo com unidade finito. mostre que todo ideal primo de R é maximal.