Álgebra II

Lista 1

OBS:

1) **Construa a tebela de "multiplicação" dos seguintes grupos finitos:**
   a) S_3.
   b) D_3 **(o que você conclui a respeito deste grupo e do ítem anterior?).**
   c) D_4.
   d) $C_3 \times C_2$.
   e) $(\mathbb{Z}_5, +)$ **(aqui a operação é soma).**
   f) $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$ **(aqui a operação é multiplicação).**
   g) $(\{1, -1\}, \cdot)$ **(este grupo é isomorfo a um grupo cíclico de ordem 2).**
2) **Verifique que a intersecção de dois semigrupos é um semigrupo.**
3) **Seja** G **um grupo e** X **um subconjunto de** G **mostre que os seguintes subconjuntos de** G **são subgrupos e que eles coincidem:**
   a) **O menor subgrupo de** G **que contém** X.
   b) **A intersecção de todos os subgrupos de** G **que contém** X.
   c) **O conjunto contendo o elemento neutro de** G **e todas as palavras finitas escritas com letras do alfabeto (elementos do conjunto)** $X \cup X^{-1}$, **onde** $X^{-1} = \{x^{-1} \in G \,|\, x \in X\}$.

   Este subgrupo é denotado por $\langle X \rangle$ **e é denominado de o subgrupo gerado por** X.
4) **Um subgrupo cíclico de um grupo** G **é um subgrupo gerado por um conjunto unitário** $X = \{a\}$, **e o denotamos por** $\langle a \rangle$. **Mostre que todo subgrupo cíclico é abeliano.**
5) **Mostre que se** X **é subgrupo de** G, **então** $\langle X \rangle = X$.
6) **Verifique que os seguintes conjuntos de matrizes são subgrupos do grupo correspondente.**
   a) $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, \mathbf{det}(A) = 1\} \subseteq GL(n, \mathbb{R})$, **este é denominado grupo linear especial de matrizes** $n \times n$.
   b) $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A.A^T = A^T.A = I\} \subseteq GL(n, \mathbb{R})$, **este é o denominado grupo de matrizes ortogonais** $n \times n$.
   c) $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \,|\, A.A^* = A^*.A = I\} \subseteq GL(n, \mathbb{C})$, **(onde** A^* **é a transposta da matriz obtida dos complexos conjugados da matriz** A**) este é denominado grupo das matrizes unitárias** $n \times n$.
   d) $SO(n) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$, **este é denominado grupo ortogonal especial de matrizes** $n \times n$.
   e) $SU(n) = SL(n, \mathbb{C}) \cap U(n) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$,**este é denominado grupo unitário especial de matrizes** $n \times n$.
7) **Verifique que o conjunto**

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$$

   com a operação de multiplicação dos números complexos forma um grupo abeliano.
8) **Seja** $\mathbb{C}^*$ **o grupo multiplicativo dos números complexos não nulos. Mostre que** $\mathbb{S}^1$ **é um subgrupo de** $\mathbb{C}^*$.
9) **Mostre que a composta de dois homomorfismos de grupos também é um homomorfismo de grupos.**
10) **Mostre que a função identidade em um grupo** G **(**$\mathbf{Id}_G : G \to G$, **não confunda com o elemento neutor do grupo** G**), é um isomorfismo do grupo sobre si mesmo.**
11) **Mostre que se um homomorfismo** $f : G \to H$ **for invertível, isto é, se for um isomorfismo, então** f^{-1} **também será um isomorfismo.**
12) **Mostre que, dado um homomorfismo de grupos** $f : G \to H$, **então o conjunto imagem de** f, **denotado por** $\mathbf{Im}(f)$, **é um subgrupo de** H.

13) **Mostre que, dado um homomorfismo de grupos $f : G \to H$, então o kernel de f, denotado por $\mathbf{Ker}(f) = \{g \in G \,|\, f(g) = e_H\}$, é um subgrupo de G. Mostre ainda que para qualquer $h \in \mathbf{Ker}(f)$ e qualquer $g \in G$, o elemento ghg^{-1} pertence a $\mathbf{Ker}(f)$.**

14) **Mostre que um homomorfismo $f : G \to H$ é injetivo se, e somente se $\mathbf{Ker}(f) = \{e_G\}$.**

15) **Considere uma permutação $f \in S_n$, podemos associar a esta permutação um número $+1$ ou -1 da seguinte forma: Escreva os número de 1 a n em duas colunas (faça para casos pequenos primeiro para ganhar intuição $n = 3$ $n = 4$ etc). Ligue os números da coluna da esquerda com as suas imagens na coluna da direita. Cuidado para não cruzar mais de duas linhas em cada cruzamento e para não fazer as linhas muito curvas de modo a aparecerem cruzamentos desnecessários. Conte quantos cruzamentos tem neste diagrama (chame este número de N_f, pois este N varia para cada f). Calcule o número $\mathbf{sign}(f) = (-1)^{N_f}$ Este é o sinal da permutação.**

- **a)** **Mostre que o conjunto $A_n = \{f \in S_n \,|\, \mathbf{sign}(f) = 1\}$ é um subgrupo de S_n.**
- **b)** **Mostre que sign : $S_n \to \{1, -1\}$ é um homomorfismo de grupos. Quem é o kernel deste homomorfismo.**

16) **Considere a aplicação**

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{C} & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ & a+bi & \mapsto & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{array}$$

- **a)** **Mostre que $\phi((a + bi) + (c + di)) = \phi(a + bi) + \phi(c + di)$.**
- **b)** **Mostre que $\phi((a + bi)(c + di)) = \phi(a + bi)\phi(c + di)$.**
- **c)** **Mostre que ϕ é uma função injetiva. Ela é também sobrejetiva? Por quê?**
- **d)** **Mostre que a imagem de $\mathbb{S}^1$ pela função ϕ coincide com o grupo das rotações no plano.**
- **e)** **Com a propriedade multiplicativa de ϕ, conclua que os grupo $\mathbb{S}^1$ e o grupo das rotações do plano são isomorfos.**

17) **Mostre que cada elemento do grupo $SO(2)$ é uma matriz de rotação no plano. Com isto, conclua que os grupos $\mathbb{S}^1$, $SO(2)$ e o grupo de rotações no plano são grupos isomorfos.**

18) **Mostre que o grupo unitário $U(1)$ também é isomorfo aos grupos anteriores.**