

Álgebra II

Lista 2

- 1) Seja G um grupo no qual todo elemento $a \in G$ satisfaz $a^2 = e$, mostre que G é abeliano.
- 2) Mostre que um grupo G , é abeliano se, e somente se, para todos $a, b \in G$ tivermos $aba^{-1}b^{-1} = e$.
- 3) Mostre que a equação $a^n b^n = (ab)^n$ é válida para todo $n \geq 1$ se, e somente se, G for abeliano.
- 4) Mostre que todo grupo de ordem menor que, ou igual a 5 é abeliano.
- 5) Considere $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ como um anel com as operações de soma e multiplicação. Mostre que um elemento $[k] \in \mathbb{Z}_n$ é invertível, se, e somente se, $\text{mdc}(k, n) = 1$.
- 6) A partir do exercício anterior, mostre que $\mathbb{Z}_n^\times$ é um grupo multiplicativo com ordem exatamente $\varphi(n)$ (onde φ é a função totiente de Euler, que a cada número natural n associa a cardinalidade do conjunto dos números entre 1 e n que são primos com n).
- 7) Seja G um grupo de ordem n e $g \in G$, mostre que a ordem de g^k é igual a $\frac{n}{\text{mdc}(n, k)}$. Conclua disto que se G é um grupo cíclico, o número de geradores de G é exatamente igual a $\varphi(n)$.
- 8) Utilize o resultado do exercício anterior para provar que, se $\text{mdc}(n, a) = 1$ então $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.
- 9) Determine todos os subgrupos de S_3 , D_4 e S_4 .
- 10) Seja G um grupo, $H \leq G$ um subgrupo e $S = G \setminus H$. Mostre que $\langle S \rangle = G$.
- 11) Determine as classes laterais à esquerda e à direita determinadas pelo subgrupo $S_3 \leq S_4$ e escreva os quocientes.
- 12) Determine as classes laterais à esquerda e à direita determinadas pelo subgrupo $C_4 \leq D_4$ e escreva os quocientes (faça o mesmo para o subgrupo $H = \{I, \theta\} \subseteq D_4$).
- 13) Considere o subconjunto do grupo $T(n) \subseteq GL(n)$ das matrizes invertíveis e triangulares superiores. Mostre que T é subgrupo de $GL(n)$.
- 14) Seja G um grupo cíclico:
 - a) Mostre que, se G for infinito, então $\text{Aut}(G)$ é um grupo cíclico de ordem 2, contendo a identidade e o morfismo $g \mapsto g^{-1}$.
 - b) Mostre que, se $|G| = n$ então $\text{Aut}(G)$ consiste da identidade e dos morfismos ψ_k (para $\text{mdc}(n, k) = 1$) que associam a cada $g \in G$ o elemento g^k .
 - c) Mostre então que $\text{Aut}(G)$ é isomorfo ao grupo $\mathbb{Z}_n^\times$.
- 15) Seja $f : G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos. Mostre que, se G é abeliano, então $\text{Im}(f)$ é um subgrupo abeliano de H .
- 16) Seja $f : G \rightarrow H$ um isomorfismo de grupos. Mostre que, se H é abeliano, se, e somente se, G também o é.
- 17) Considere dois números primos p e q , e sejam C_p e C_q os grupos cíclicos de ordem p e q , respectivamente. Mostre que, para qualquer grupo G , um homomorfismo não constante $f : C_p \rightarrow G$ (isto é $\exists g \in C_p$ tal que $f(g) \neq e$) é sempre injetivo. Mostre que se $p \neq q$ então C_p e C_q não podem ser isomorfos.
- 18) Mostre que dois grupos cíclicos de ordem n são sempre isomorfos.
- 19) Mostre que existe um homomorfismo injetor (monomorfismo) entre S_n e $GL(n)$.
- 20) Seja $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Considere o subgrupo cíclico de $\mathbb{S}^1$ gerado por $z = \cos \theta + i \sin \theta$. Mostre que este subgrupo cíclico é isomorfo a $\mathbb{Z}$.