Álgebra II

Lista 3

Nome:

1) Seja $f : G \to H$ um isomorfismo de grupos. Mostre que se G é abeliano, então H também o será. Mostre que se G é cíclico, então H também o será.

2) Mostre que o grupo abeliano aditivo $\mathbb{Z}_4$ não pode ser isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

3) Mostre que o centro de um grupo G é um subgrupo normal do mesmo.

4) Mostre que, para qualquer grupo G, a ordem do grupo $G/Z(G)$ não pode ser um número primo.

5) Mostre que todo grupo não abeliano de ordem 6 tem centro trivial.

6) Seja G um grupo e $H \leq G$ um subgrupo qualquer.

- **a)** Mostre que, para qualquer $g \in G$, o conjunto $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \in G \,|\, h \in H\}$ é um subgrupo de G.
- **b)** Mostre que, se G for finito, $|H| = |gHg^{-1}|$.
- **c)** Mostre que se G não possuir um outro subgrupo K tal que $|K| = |H|$, então $H \trianglelefteq G$.

7) Mostre que os seguintes subgrupos são normais e determine o quociente:

- **a)** $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\} \subseteq \mathbb{Z}_8$.
- **b)** $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}\} \subseteq \mathbb{Z}_7^*$.
- **c)** $\{e, a, a^2, a^3, a^4\} \subseteq D_5$.
- **d)** $SL(n, k) \subseteq GL(n, k)$ para k um corpo qualquer.

8) Seja G um grupo e $H \trianglelefteq G$ e $K \trianglelefteq G$ dois subgrupos normais. Mostre que $H \cap K \trianglelefteq G$.

9) Seja G um grupo e defina o comutador de G como o subgrupo $[G, G] \leq G$ gerado por elementos da forma $ghg^{-1}h^{-1}$.

- **a)** Mostre que $[G, G] \trianglelefteq G$.
- **b)** Mostre que o grupo quociente $G/[G, G]$ é abeliano.

10) Seja G um grupo e $\mathrm{Aut}(G)$ o grupo dos automorfismos de G. Defina $\mathrm{Inn}(G) = \{f : G \to G \,|\, \exists g \in G,\ f(h) = ghg^{-1}\}$

- **a)** Mostre que $\mathrm{Inn}(G)$ é subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(G)$.
- **b)** Mostre que, se G é abeliano, então $\mathrm{Inn}(G)$ é trivial.
- **c)** Mostre que $\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$.
- **d)** Mostre que $\mathrm{Inn}(D_3) \cong D_3$.

11) Sejam G e H dois grupos e considere o grupo produto direto $G \times H$. Mostre que $\{e_G\} \times H$ é subgrupo normal de $G \times H$ e que $(G \times H)/(\{e_G\} \times H) \cong G$.

12) Seja $G = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad a \neq 0\}$ com a operação

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$$

- **a)** Mostre que G com esta operação forma um grupo. Este grupo é abeliano? Qual o elemento neutro de G? Qual o inverso de $(a, b) \in G$?
- **b)** Determine $Z(G)$.
- **c)** Mostre que $K = \{(1, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \in \mathbb{R}\}$ é subgrupo normal de G. Determine o quociente G/K.