

Álgebra II

Lista 4

- 1) Seja G um grupo cíclico finito. Um gerador de G é um elemento $g \in G$ tal que $G = \langle g \rangle$ (note que pode ter elementos de G que não geram o grupo, por exemplo $G = \langle a \mid a^4 = e \rangle$, o elemento $g = a^2$ não gera o grupo). Mostre que, se $G = \langle a \mid a^n = e \rangle$ um elemento $g = a^k$ é um gerador de G se, e somente se $\text{mdc}(n, k) = 1$.
- 2) Mostre que um grupo cíclico infinito não possui subgrupos cíclicos de ordem finita.
- 3) Seja G um grupo finito e $g \in G$, a ordem de g é o menor número inteiro positivo k tal que $g^k = e$ e $g^j \neq e$ para $0 < j < k$. Denotando a ordem de g por $o(g)$, mostre que $o(G) = |\langle g \rangle|$, e com isto conclua que $o(g) \mid |G|$.
- 4) (pequeno teorema de Fermat) Mostre que se p é um número primo, e $\text{mdc}(a, p) = 1$, então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (dica, verifique o subgrupo gerado por $\bar{a} \in \mathbb{Z}_p^*$).
- 5) Verifique que todo elemento do grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_{13}^*$ é raiz do polinômio $x^{12} - \bar{1} \in \mathbb{Z}_{13}[x]$ (dica, use o pequeno teorema de Fermat).
- 6) Determine todos os subgrupos de D_3 .
- 7) Sejam H e K dois subgrupos de um grupo finito G . Se $|H| = p$ e $|K| = q$, com p e q primos distintos, mostre que $H \cap K = \{e\}$.
- 8) Seja G um grupo finito e $H \leq G$ um subgrupo. Mostre que a cardinalidade do quociente à esquerda $(G/H)_L$ é igual à cardinalidade do quociente à direita $(G/H)_R$.
- 9) O índice de um subgrupo H de um grupo finito G é a cardinalidade do quociente G/H (tanto faz à esquerda ou à direita). Denotando o índice de H em G por $[G : H]$ mostre que, se $[G : H] = 2$ então $H \trianglelefteq G$.
- 10) Mostre que $SL(n, \mathbb{R})$ é subgrupo normal de $GL(n, \mathbb{R})$. Determine o quociente $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R})$.
- 11) Seja G um grupo e $H \trianglelefteq G$. Mostre que
 - a) Se G é abeliano, então G/H é abeliano.
 - b) Se G é cíclico, então G/H é cíclico.
- 12) Mostre que, se $G/Z(G)$ é cíclico, onde $Z(G)$ é o centro de G , então G é abeliano.
- 13) Considere para cada $g \in G$ a aplicação $\text{Ad}_g : G \rightarrow G$ dada por $\text{Ad}_g(h) = ghg^{-1}$.
 - a) Mostre que Ad_g é um automorfismo de G , isto é, um homomorfismo bijetor de G em G .
 - b) Mostre que a aplicação $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ é um homomorfismo de grupos.
 - c) Mostre que $\text{Ker}(\text{Ad}) = Z(G)$.
- 14) Seja G um grupo. Um automorfismo $f : G \rightarrow G$ é interno é chamado de automorfismo interno se existir um elemento $g \in G$ tal que $f = \text{Ad}_g$. Denote por $\text{Inn}(G)$ o conjunto dos automorfismos internos de G . Mostre que $\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$.
- 15) Mostre que um grupo G é abeliano se, e somente se, $\text{Inn}(G) = \{Id_G\}$.
- 16) Identifique, usando os teoremas de isomorfismo, os grupos abaixo:
 - a) $\frac{\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}}$.
 - b) $\frac{3\mathbb{Z}+5\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$.
 - c) $\frac{m\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, onde $m \mid n$.
- 17) Mostre que $n\mathbb{Z} \cong m\mathbb{Z}$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}^*$. Mostre também que, se $m \neq n$ então $\mathbb{Z}_m$ não é isomorfo a $\mathbb{Z}_n$.
- 18) Uma permutação $\sigma \in S_n$ é um ciclo de comprimento r , se existirem números distintos $a_1, \dots, a_r \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ para $1 \leq i < r$, $\sigma(a_r) = a_1$ e $\sigma(k) = k$, para qualquer $k \notin \{a_1, \dots, a_r\}$, denotaremos o ciclo por $(a_1, \dots, a_r)$.
 - a) Mostre que o único ciclo de ordem 1 em S_n é a permutação identidade (elemento neutro de S_n).
 - b) Seja σ um ciclo de comprimento r , mostre que a ordem de σ também é igual a r .

- c) Dois ciclos σ e τ são ditos disjuntos quando para todo $a \in \{1, \dots, n\}$ temos que $\sigma(a) = a$ ou $\tau(a) = a$. Mostre que dois ciclos disjuntos comutam entre si.
 - d) Mostre que todo elemento $\sigma \in S_n$, $\sigma \neq Id$ pode ser escrito de maneira única como o produto de ciclos disjuntos de comprimento maior ou igual a 2 (a unicidade é a menos da ordem com que os ciclos são escritos, uma vez que eles comutam).
 - e) Mostre que $(a_1, \dots, a_r) = (a_1 a_r)(a_1 a_{r-1}) \cdots (a_1 a_2)$.
- 19) Determine subgrupos H e K do grupo de permutações S_4 tais que $H \cong \mathbb{Z}_4$ e $K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.