Teorema de Nichols-Zoeller

Ricardo David Morais da Silva

4 de dezembro de 2014

Resumo

Sabemos da teoria de grupos o Teorema de Lagrange, que afirma que a ordem de um grupo finito é divisível pelas ordens de cada um dos seus subgrupos. A consequência mais importante do que se tornou conhecido como o Teorema de Nichols-Zoeller é o análogo para álgebras de Hopf: cada álgebra de Hopf finito-dimensional é livre como um módulo sobre cada uma de suas subálgebras de Hopf. Teorema de Lagrange é um caso especial, já que álgebras de grupo são álgebras de Hopf.

1 Definições, Propriedades e Resultados Básicos

Definição 1.1. Seja $\mathcal{A}$ uma k -álgebra, M um $\mathcal{A}$ -módulo e N um submódulo de M o aniquilador de N é o conjunto $\text{ann}_{\mathcal{A}}(M) = \{a \in \mathcal{A}; a \cdot n = 0 \ \forall n \in N\}$.

Definição 1.2. Seja $\mathcal{A}$ uma k -álgebra e M um $\mathcal{A}$ -módulo. Dizemos que M é $\mathcal{A}$ -fiel se $\text{ann}_{\mathcal{A}}(M) = 0$.

Definição 1.3. Seja M um módulo e seja

$$0 = M_r \subseteq M_{r-1} \subseteq \dots \subseteq M_0 = M \quad (S)$$

uma sequência finita de submódulos de M . Um *refinamento* (S') para (S) é uma sequência finita de submódulos

$$0 = N_s \subseteq N_{s-1} \subseteq \dots \subseteq N_0 = N \quad (S')$$

tal que para todo $i = 1, \dots, r$ existe um j para o qual $M_i = N_j$.

Definição 1.4. Seja M um módulo e seja

$$0 = M_r \subseteq M_{r-1} \subseteq \dots \subseteq M_0 = M \quad (S)$$

uma sequência finita de submódulos de M . Dizemos que (S') é um *refinamento próprio* de (S) se existir algum j tal que $N_j \neq M_i$, para qualquer que seja $i = 1, \dots, r$. Quando M não admite refinamento próprio dizemos que M tem comprimento finito.

Definição 1.5. Um módulo M é indecomponível se $M \neq 0$ e não existirem submódulos não triviais N_1 e N_2 tais que $M = N_1 \oplus N_2$.

Teorema 1.1. (Teorema de Krull-Schmidt). *Todo módulo M de comprimento finito tem uma decomposição em soma direta de submódulos*

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$$

onde, para cada $i = 1, \dots, r$, M_i é indecomponível. Além disso, essa decomposição é única a menos de isomorfismo, isto é, se

$$M = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$$

é outra decomposição de M como soma direta de submódulos indecomponíveis, então $s = r$ e existe uma permutação σ do conjunto $\{1, \dots, r\}$ talque $M_i \simeq N_{\sigma(i)}$ para todo $i = 1, \dots, r$.

Teorema 1.2. *Sejam A um anel com unidade e D um A -módulo qualquer fixo. Sejam M , L e N A -módulos e $\varphi : M \rightarrow N$, $\psi : L \rightarrow M$ homomorfismos de A -módulos são equivalentes:*

(1) *Para toda seqüência exata curta*

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$$

a seqüência

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(N, D) \xrightarrow{\varphi'} \text{Hom}_A(M, D) \xrightarrow{\psi'} \text{Hom}_A(L, D) \longrightarrow 0$$

é exata curta.

(2) *Para todo homomorfismo injetor $\psi : L \rightarrow M$. Temos que $\psi' : \text{Hom}_A(M, D) \rightarrow \text{Hom}_A(L, D)$ é sobrejetor, ou seja, para todo $f \in \text{Hom}_A(L, D)$ existe $F \in \text{Hom}_A(M, D)$ tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\psi} & M \\ & & \downarrow f & \swarrow F & \\ & & D & & \end{array}$$

(3) *Se D é um submódulo de um módulo M então D é somando direto de M , ou seja, toda seqüência exata curta*

$$0 \longrightarrow D \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

cinde.

Definição 1.6. Diremos que D é um módulo injetivo se D satisfaz uma (e portanto todas) das condições equivalentes do teorema acima.

Proposição 1.3. *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então H é injetivo como H -módulo à esquerda.*

2 O Teorema de Nichols-Zoeller

Proposição 2.1. *Seja W um B -módulo à esquerda. Então $B \otimes W \simeq W \otimes B \simeq B^{\dim(W)}$ como B -módulos.*

Demonstração. Primeiramente note que $B \otimes W$ é um B -módulo à esquerda, com a estrutura de módulo dada por $h(b \otimes w) = \sum h_{(1)}b \otimes h_{(2)} \cdot w$. É também um B -comódulo à esquerda com a estrutura de comódulo dada por $\rho(b \otimes w) = \sum b_1 \otimes b_2 \otimes m$. Dessa forma $B \otimes W$ torna-se um B -módulo Hopf, de fato, vamos mostrar a compatibilidade entre a ação e a coação.

$$\begin{aligned} \rho(h(b \otimes w)) &= \rho(h_{(1)}b \otimes h_{(2)} \cdot w) = (h_{(1)}b)_{(1)} \otimes (h_{(1)}b)_{(2)} \otimes h_{(2)} \cdot w \\ &= h_{(1)(1)}b_{(1)} \otimes h_{(1)(2)}b_{(2)} \otimes h_{(2)} \cdot w \\ &= h_{(1)}b_{(1)} \otimes h_{(2)}b_{(2)} \otimes h_{(3)} \cdot w \\ &= h_{(1)}b_{(1)} \otimes h_{(2)(1)}b_{(2)} \otimes h_{(2)(2)} \cdot w \\ &= h_{(1)}b_{(1)} \otimes h_{(2)}(b_{(2)} \otimes w) \\ &= h_{(1)}(b \otimes w)_{(-1)} \otimes h_{(2)}(b \otimes w)_{(0)}. \end{aligned}$$

Considere agora o conjunto dos coinvariantes

$$(B \otimes W)^{coH} = \left\{ \sum_{i=1}^n b_i \otimes w_i \in B \otimes W; \rho\left(\sum_{i=1}^n b_i \otimes w_i\right) = 1 \otimes \sum_{i=1}^n b_i \otimes w_i \right\}$$

e note que

$$\sum_{i=1}^n b_{i(1)} \otimes b_{i(2)} \otimes w_i = \rho\left(\sum_{i=1}^n b_i \otimes w_i\right) = 1 \otimes \sum_{i=1}^n b_i \otimes w_i \quad (1)$$

agora sem perda de generalidade tome $\{w_i\}_{i=1}^n$ LI e considere o conjunto LI dual $\{w_i^*\}_{i=1}^n$. Agora aplicando $I \otimes I \otimes w_j^*$ em 1 temos

$$b_{j(1)} \otimes b_{j(2)} = 1 \otimes b_j$$

aplicando $I \otimes \varepsilon$ temos

$$b_{j(1)}\varepsilon(b_{j(2)}) = 1\varepsilon(b_j) \implies b_j = 1\varepsilon(b_j)$$

assim temos

$$\sum_{i=1}^n b_i \otimes w_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon(b_i)1 \otimes w_i = 1 \otimes \sum_{i=1}^n \varepsilon(b_i)w_i \in 1 \otimes W$$

logo, $(B \otimes W)^{coH} = 1 \otimes W \simeq W$. Portanto, o teorema fundamental dos módulos de Hopf nos diz que

$$B \otimes W \simeq (B \otimes W)^{coH} \otimes B \simeq W \otimes B \simeq B^{\dim(W)}.$$

Vamos considerar agora a álgebra de Hopf B^{cop} , com a mesma multiplicação de B e com comultiplicação dada por

$$c \longmapsto \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} = \sum c_{(2)} \otimes c_{(1)}.$$

Em particular W é um B^{cop} -módulo à esquerda, então aplicando o isomorfismo provado acima obtemos que

$$B^{cop} \otimes W \simeq (B^{cop})^{(dim(W))}$$

como B^{cop} -módulos. A estrutura de B^{cop} -módulo de $B^{cop} \otimes W$ é dada por

$$b(c \otimes w) = \sum b_{(1)}c \otimes b_{(2)}w = \sum b_{(2)}c \otimes b_{(1)}w.$$

Portanto, desde que $B = B^{cop}$ como álgebras, nós vemos que $B^{cop} \otimes W$ é isomorfo a $W \otimes B$ como B -módulos (o isomorfismo é dado pelo twist), então

$$W \otimes B \simeq (B^{cop})^{dim(W)} = B^{(dim(W))}.$$

□

Lema 2.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma k -álgebra e M um $\mathcal{A}$ -módulo à esquerda finitamente gerado. Então M é $\mathcal{A}$ -fiel se, e somente se, $\mathcal{A}$ é imerso em M^n como um $\mathcal{A}$ -módulo para algum inteiro positivo n .*

Demonstração. Se $\mathcal{A}$ é imerso em M^n como $\mathcal{A}$ -módulo para algum inteiro positivo n , então

$$ann_{\mathcal{A}}(M) = ann_{\mathcal{A}}(M^n) = ann_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0,$$

então M é $\mathcal{A}$ -fiel. Se M é $\mathcal{A}$ -fiel, seja $\{m_1 \cdots m_n\}$ uma base do k -espaço vetorial M . Então definindo $f : \mathcal{A} \rightarrow M^n$ por $f(a) = (am_1 \cdots am_n)$ para $a \in \mathcal{A}$ é um morfismo de $\mathcal{A}$ -módulos com $ker(f) = \bigcap_{i=1}^n ann_{\mathcal{A}}(m_i) = ann_{\mathcal{A}}(M) = 0$. □

Corolário 2.3. *Seja $\mathcal{A}$ uma k -álgebra de dimensão finita ao qual é injetivo como um $\mathcal{A}$ -módulo à esquerda, e seja $P_1, \dots, P_t$ tipos de isomorfismos de $\mathcal{A}$ -módulos indecomponíveis principais. Se M $\mathcal{A}$ -módulo finitamente gerado, então M é $\mathcal{A}$ -fiel se, e somente se, cada P_i é isomorfo a um somando direto do $\mathcal{A}$ -módulo M .*

Demonstração. O lema anterior diz que M é $\mathcal{A}$ -fiel se, e somente se, $\mathcal{A}$ é imerso em $M^{(n)}$ para algum n inteiro positivo. O fato de $\mathcal{A}$ ser injetivo como $\mathcal{A}$ -módulo é equivalente ao fato que $M^{(n)} \simeq \mathcal{A} \oplus X$ para algum inteiro positivo n e algum $\mathcal{A}$ -módulo X . Fazendo a decomposição, em ambos os lados, como soma direta de indecomponíveis, o teorema de krull-schmidt mostra que isso é equivalente ao fato que M contém um somando direto isomorfo a cada P_i para $i = 1, \dots, t$. □

Proposição 2.4. *Seja $\mathcal{A}$ uma k -álgebra de dimensão finita tal que $\mathcal{A}$ é injetivo como um $\mathcal{A}$ -módulo à esquerda. Se W $\mathcal{A}$ -módulo é finitamente gerado, então existe um inteiro r tal que $W^{(r)} = F \oplus E$ para um $\mathcal{A}$ -módulo livre F e um $\mathcal{A}$ -módulo E o qual não é $\mathcal{A}$ -fiel.*

Demonstração. Se W não é $\mathcal{A}$ -fiel, simplesmente tomamos $r = 1, F = 0$ e $E = W$. Assuma agora que W é $\mathcal{A}$ -fiel. Seja $\mathcal{A} \simeq P_1^{(n_1)} \oplus \dots \oplus P_t^{(n_t)}$, onde $P_1, \dots, P_t$ são os tipos de isomorfismos de $\mathcal{A}$ -módulos indecomponíveis principais. Pelo corolário anterior temos que $W \simeq P_1^{(m_1)} \oplus \dots \oplus P_t^{(m_t)} \oplus Q$ para alguns $m_1, \dots, m_t > 0$ e algum $\mathcal{A}$ -módulo Q tal que nenhum somando direto de Q

é isomorfo a P_i , $i = 1 \dots, t$. Seja r o mínimo múltiplo comum dos números $n_1, \dots, n_t$. Assim temos que

$$W^{(r)} \simeq P_1^{(rm_1)} \oplus \dots \oplus P_t^{(rm_t)} \oplus Q^{(r)}.$$

Seja $\alpha = \min(\frac{rm_1}{n_1}, \dots, \frac{rm_t}{n_t})$, digamos que $\alpha = \frac{rm_i}{n_i}$. Então

$$W^{(r)} \simeq \mathcal{A}^{(\alpha)} \oplus P_1^{(rm_1 - \alpha n_1)} \oplus \dots \oplus P_t^{(rm_t - \alpha n_t)} \oplus Q^{(r)}.$$

Assim basta definirmos $F = \mathcal{A}^\alpha$ que é livre e

$$E = P_1^{(rm_1 - \alpha n_1)} \oplus \dots \oplus P_t^{(rm_t - \alpha n_t)} \oplus Q^{(r)},$$

o qual não é $\mathcal{A}$ -afiel, pois ele não contém um somando direto isomorfo a P_i (note que $rm_i - \alpha n_i = 0$ e que usamos novamente o teorema de krull-schimidt). $\square$

Proposição 2.5. *Seja W um B -módulo à esquerda finitamente gerado tal que $W^{(n)}$ é um B -módulo livre para algum inteiro positivo r . Então W é um B -módulo livre.*

Demonstração. Tome $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_n$ uma soma direta de B -módulos à esquerda indecomponíveis. Se t é um elemento integral à esquerda não nula de B e $t = t_1 + \dots + t_n$ é uma representação de t na soma direta acima, nós temos que

$$bt_1 + \dots + bt_n = bt = \varepsilon(b)t = \varepsilon(b)t_1 + \dots + \varepsilon(b)t_n$$

para $b \in B$, mostrando assim que $t_1, \dots, t_n$ são integrais à esquerda de B . Como o espaço das integrais à esquerda tem dimensão igual a 1, temos que existe um único j tal que $t_j \neq 0$, e então $t = t_j$. Portanto, B_j não é isomorfo a outro B_i , já que B_j contém uma integral não nula e B_i não, e se $f : B_j \rightarrow B_i$ fosse uma isomorfismo de B -módulos teríamos claramente que $f(t)$ é um elemento integral não nulo à esquerda.

Tomemos agora $P_1 = B_j, P_2, \dots, P_s$ os tipos de isomorfismos de B -módulos indecomponíveis principais, e $B \simeq P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_s^{n_s}$ a representação de B como uma soma de tal módulos. Note que $n_1 = 1$. Sabemos que $W^{(r)}$ é livre como B -módulos digo $W^{(r)} \simeq B^{(p)}$ para algum inteiro positivo p . Como

$$W^{(r)} \simeq B^{(p)} \simeq P_1^{(pn_1)} \oplus \dots \oplus P_s^{(pn_s)}$$

o teorema de Krull-Schimidt nos mostra que a decomposição de W como uma soma de indecomponíveis é da forma

$$W \simeq P_1^{(m_1)} \oplus \dots \oplus P_s^{(m_s)}$$

para alguns $m_1, \dots, m_s$. Além disso, já que

$$W^{(r)} \simeq P_1^{(rm_1)} \oplus \dots \oplus P_s^{(rm_s)},$$

temos obrigatoriamente $pn_i = rm_i$. Em particular $p = rm_i$. Então para um i temos que $pn_i = rm_1 n_i = rm_i$ então $m_i = m_1 n_i$. Obtemos que $W \simeq B^{(m_1)}$, um B -módulo livre. $\square$

Proposição 2.6. *Seja W um B -módulo à esquerda finitamente gerado tal que existe um B -módulo fiel L com $L \otimes W \simeq W^{(\dim(L))}$ como B -módulos. Então W é um B -módulo livre.*

Demonstração. Sabemos da proposição 1.3 que B é injetivo como B -módulo à esquerda. Então podemos usar a proposição 2.4 e concluir que $W^{(r)} \simeq F \oplus E$ para algum inteiro positivo r , algum B -módulo livre F e algum B -módulo E ao qual não é fiel. Usando a proposição anterior é suficiente mostrar que $W^{(r)}$ é livre. Agora temos que

$$L \otimes W^{(r)} \simeq (L \otimes W)^{(r)} \simeq (W^{(\dim(L))})^{(r)} \simeq (W^{(r)})^{(\dim(L))}$$

então podemos substituir W por $W^{(r)}$, e assumir que $W \simeq F \oplus E$. Similarmente existe um inteiro positivo s tal que $L^{(s)} \simeq F' \oplus E'$ com F' livre e E' não fiel. Como L é fiel, $L^{(s)}$ também é, então $F' \neq 0$. Como

$$L^{(s)} \otimes W \simeq (L \otimes W)^{(s)} \simeq (W^{(\dim(L))})^{(s)} \simeq W^{(\dim(L^s))}$$

ou seja, podemos substituir L por $L^{(s)}$. Assim reduzimos ao caso $L \simeq F' \oplus E'$. Denote $t = \dim(L)$. Como $L \otimes W \simeq W^{(t)}$, obtemos que

$$F^{(t)} \oplus E^{(t)} \simeq W^{(t)} \simeq L \otimes W \simeq L \otimes F \oplus L \otimes E \quad (2)$$

como F é livre, temos $F \simeq B^{(q)}$ para algum inteiro positivo q , assim vemos que

$$\begin{aligned} L \otimes F &\simeq L \otimes B^{(q)} \\ &\simeq (L \otimes B)^{(q)} \\ &\simeq (B^{(\dim(L))})^{(q)} \quad (\text{pela proposição 2.1}) \\ &\simeq B^{(tq)} \simeq F^{(t)} \end{aligned}$$

A equação 2 e o teorema de Krull-schmidt implica que $E^{(t)} \simeq L \otimes E$. Se $E \neq 0$ temos que

$$E^{(t)} \simeq L \otimes E \simeq (F' \otimes E) \oplus (E' \otimes E)$$

segue da proposição 2.1 que

$$F' \otimes E \simeq B^{(r)} \otimes E \simeq (B \otimes E)^{(r)} \simeq B^{(\dim(E)r)}$$

logo $F' \otimes E$ é não nulo e livre, portanto é fiel, e então $E^{(t)}$ também é, contradição. Isto mostra que $E = 0$ e então W é livre. $\square$

Proposição 2.7. *Seja H uma álgebra de Hopf e B uma subálgebra de Hopf. Seja $M \in {}^H_B \mathcal{M}$, então $H \otimes M \simeq M^{(\dim(H))}$ como B -módulos à esquerda.*

Demonstração. Seja $U = H \otimes M$ como B -módulo com $b(h \otimes m) = b_1 h \otimes b_2 m$ e $V = H \otimes M$ com a estrutura de B -módulos dada por $b(h \otimes m) = h \otimes bm$ para $b \in B$, $h \in H$ e $m \in M$. Assim B age apenas na segunda posição tensorial de V , ou seja, temos $V \simeq M^{\dim(H)}$ como B -módulos à esquerda. Vamos mostrar que os B -módulos U e V são isomorfos como B -módulos. De fato, seja $f : V \rightarrow U$ e $g : U \rightarrow V$ dados por

$$f(h \otimes m) = \sum m_{(-1)} h \otimes m_{(0)}$$

e

$$g(h \otimes m) = \sum S^{(-1)}(m_{(-1)})h \otimes m_{(0)}$$

Assim temos

$$\begin{aligned} gf(h \otimes m) &= \sum g(m_{(-1)}h \otimes m_{(0)}) \\ &= \sum S^{-1}(m_{(0)(-1)})m_{(-1)}h \otimes m_{(0)(0)} \\ &= \sum S^{-1}(m_{(-1)})m_{(-2)}h \otimes m_{(0)} \\ &= \sum \epsilon(m_{(-1)})h \otimes m_{(0)} \\ &= \sum h \otimes \epsilon(m_{(-1)})m_{(0)} \\ &= h \otimes \sum \epsilon(m_{(-1)})m_{(0)} = h \otimes m. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} fg(h \otimes m) &= f\left(\sum S^{-1}(m_{(-1)})h \otimes m_{(0)}\right) \\ &= \sum m_{(0)(-1)}(S^{-1}(m_{(-1)})h) \otimes m_{(0)(0)} \\ &= \sum m_{(-1)}S^{-1}(m_{(-2)})h \otimes m_{(0)} \\ &= \sum \epsilon(m_{(-1)})h \otimes m_{(0)} \\ &= h \otimes \sum \epsilon(m_{(-1)})m_{(0)} = h \otimes m. \end{aligned}$$

Portanto, f e g são inversas uma da outra. Resta mostrarmos que f é morfismo de B -módulo. De fato,

$$\begin{aligned} f(b(h \otimes m)) &= f(h \otimes bm) = \sum (bm)_{(-1)}h \otimes (bm)_{(0)} \\ &= \sum b_1 m_{(-1)}h \otimes b_{(2)}m_{(0)} \\ &= \sum b(m_{(-1)}h \otimes m_{(0)}) \\ &= b \sum m_{(-1)}h \otimes m_{(0)} \\ &= bf(h \otimes m). \end{aligned}$$

Portanto, temos que $U \simeq V \simeq M^{\dim(H)}$. □

Lema 2.8. *Se todo $M \in {}^H_B\mathcal{M}$ de dimensão finita é livre como B -módulos, então qualquer que seja $M \in {}^H_B\mathcal{M}$ é livre como B -módulo.*

Demonstração. Primeiramente note que $M \in {}^H_B\mathcal{M}$ contém um subobjeto em ${}^H_B\mathcal{M}$ de dimensão finita. De fato, seja N H -submódulo de M não nulo (por exemplo um H -submódulo simples). Então BN é um subobjeto de dimensão finita de M na categoria ${}^H_B\mathcal{M}$.

Para um $M \in {}^H_B\mathcal{M}$ definimos o conjunto $\mathcal{F}$ consistindo de todo subconjunto não vazio X de M com a propriedade que BX é um subobjeto de M na categoria ${}^H_B\mathcal{M}$, e BX é um B -módulo livre com base X . Claro que $\mathcal{F}$ não é vazio pois $BN \in \mathcal{F}$ como acima. Considere a ordem em $\mathcal{F}$ dada pela inclusão de conjuntos. Se $(X_i)_{i \in I}$ é um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{F}$, então claramente $X =$

$\bigcup_{i \in I} X_i$ é uma base do B -módulo BX , e $BX = \sum_{i \in I} BX_i$ é um subobjeto de M em ${}^H_B \mathcal{M}$, então $X \in \mathcal{F}$. Assim pelo lema de Zorn temos um elemento maximal $Y \in \mathcal{F}$. Se $BY \neq M$, então M/BY é um objeto não nulo de ${}^W_B \mathcal{M}$, logo ele contém um subobjeto não nulo S/BY , onde $BY \subseteq S \subseteq M$ e $S \in {}^H_B \mathcal{M}$.

Seja Z uma base de S/BY e $Y' \subseteq S$ tal que $\pi(Y') = Z$, onde $\pi : S \rightarrow S/BY$ é a projeção natural. Então, S é um B -módulo livre com base $Y \cup Y'$, logo $Y \cup Y' \in \mathcal{F}$, o que é uma contradição com a maximalidade de Y . Portanto, devemos ter $BY = M$, logo M é um B -módulo livre com base Y . $\square$

Teorema 2.9. (*Teorema de Nichols-Zoeller*) *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e B uma subálgebra de Hopf. Então qualquer $M \in {}^H_B \mathcal{M}$ é um B -módulo livre. Em particular H é B -módulo livre e $\dim(B)$ divide $\dim(H)$.*

Demonstração. O lema anterior mostra que é suficiente provar a afirmação para $M \in {}^H_B \mathcal{M}$ com dimensão finita. Seja $M \in {}^H_B \mathcal{M}$, como H é finitamente gerado e fiel como B -módulo à esquerda, e pela proposição 2.7 temos $H \otimes M \simeq M^{(\dim(H))}$ como B -módulos, obtemos da proposição 2.6 que M é B -módulo livre. A última parte da afirmação segue tomando $M = H$. $\square$

Referências

- [1] S. DĂSCĂLESCU; C. NĂSTĂSESCU; S. RAIANU. Hopf Algebras: An Introduction, New York: Marcel Dekker, 2001.
- [2] D. S. Dummit, R. M. Foote – “Abstract Algebra”, 3rd Edition, Wiley, 2003.