Bialgebróides

Ricardo David Morais da Silva

10 de julho de 2015

Resumo

Um *biálgebróide* é uma das generalizações de *biálgebra*. Para k anel comutativo, uma k-biálgebra H é uma k-álgebra e uma k-coálgebra tais que essas estruturas satisfazem uma relação de compatibilidade, a saber, a comultiplicação e a counidade são morfismos de k-álgebras, ou equivalentemente, a multiplicação e a unidade são morfismos de k-coálgebras. Portanto, H é objeto álgebra e coálgebra na mesma categoria monoidal, a categoria dos k-bimódulos. Essa definição de biálgebra é possível pois a categoria dos k-módulos é monoidal trançada, pois k é comutativo. No caso de uma categoria monoidal que não é trançada a definição de biálgebra não faz sentido, mas pode ser substituída pela noção de bialgebróide. Nesse caso, as estruturas de álgebra e coálgebra de um bialgebróide serão definidas em categorias monoidais distintas, a saber, a estrutura de objeto álgebra será definida na categoria dos $R \otimes_k R^{op}$-bimódulos e a estrutura de objeto coálgebra será definida na categoria dos R-bimódulos, onde R é uma k-álgebra, que satisfazem uma relação de compatibilidade.

1 Definições, Propriedades e Resultados Básicos

Definição 1.1. Uma categoria monoidal é uma sêxtupla $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ em que

(1) $\mathcal{C}$ é uma categoria;

(2)
$$\begin{array}{rccc} \otimes : & \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \to & \mathcal{C} \\ & (A, B) & \mapsto & A \otimes B. \end{array}$$

é um funtor;

(3) $a : (- \otimes -) \otimes - \Longrightarrow - \otimes (- \otimes -)$ é isomorfismo natural entre $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$, isto é, para cada tripla de objetos A, B, C em $\mathcal{C}$, temos o isomorfismo $a_{ABC} : (A \otimes B) \otimes C \longrightarrow A \otimes (B \otimes C)$;

(4) $l : \mathbb{1} \otimes - \Longrightarrow Id_{\mathcal{C}}$ é um isomorfismo natural;

(5) $r : - \otimes \mathbb{1} \Longrightarrow Id_{\mathcal{C}}$ é um isomorfismo natural. Satisfazendo:

(i) Axioma do triângulo:

$$\begin{tikzcd} (A \otimes \mathbb{1}) \otimes B \arrow[r, "a_{A,1,B}"] \arrow[dr, "r_A \otimes B"'] & A \otimes (\mathbb{1} \otimes B) \arrow[d, "A \otimes l_B"] \\ & A \otimes B \end{tikzcd}$$

(ii) Axioma do pentágono:

$$\begin{tikzcd} & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[dl, "a_{ABC} \otimes D"'] \arrow[dr, "a_{A \otimes B, C, D}"] & \\ (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[d, "a_{A, B \otimes C, D}"'] & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[d, "a_{ABC \otimes D}"] \\ A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "A \otimes a_{BCD}"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \end{tikzcd}$$
.

Definição 1.2. Uma *Álgebra* ou um *Monóide* em uma categoria monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ é uma tripla (A, μ, η). Onde A é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$, $\eta : \mathbb{1} \longrightarrow A$ são morfismos em $\mathcal{C}$, satisfazendo as condições de associatividade e unitalidade, ou seja, os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} (A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes A"] \arrow[d, "a_{A,A,A}"'] & A \otimes A \arrow[dd, "\mu"] \\ A \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "A \otimes \mu"'] & \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{1} \otimes A \arrow[r, "\eta \otimes A"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes \mathbb{1} \arrow[l, "A \otimes \eta"'] \\ & A \arrow[ul, "l_A^{-1}"] \arrow[ur, "r_A^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$
.

O morfismo μ é chamado de *Multiplicação* ou *Produto* e η é chamado de *Unidade*.

Definição 1.3. Um *Módulo* à direita de um monóide (A, μ, η) é um par (M, θ_M), onde M é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\theta_M : M \otimes A \to M$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, tal que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
M \otimes A \otimes A \arrow[r, "M\otimes\mu"] \arrow[d, "\theta_M\otimes A"'] & M \otimes A \arrow[d, "\theta_M"] \\
M \otimes A \arrow[r, "\theta_M"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "M\otimes\eta"] \arrow[dr, "r_M"'] & M \otimes A \arrow[d, "\theta_M"] \\
 & M
\end{tikzcd} .$$

Definição 1.4. Uma *Coálgebra* ou um *Comonóide* em uma categoria monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ é uma tripla (C, Δ, ε). Onde C é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\Delta : C \otimes C \longrightarrow C$, $\varepsilon : C \longrightarrow \mathbb{1}$ são morfismos em $\mathcal{C}$, satisfazendo as condições de coassociatividade e counitalidade, ou seja, os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dd, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes C"] \\
 & (C \otimes C) \otimes C \arrow[d, "a_{C,C,C}"] \\
C \otimes C \arrow[r, "C\otimes\Delta"'] & C \otimes (C \otimes C)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \otimes C \arrow[r, "l_C"] & C & C \otimes \mathbb{1} \arrow[l, "r_C"'] \\
 & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes C"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur, "C\otimes\varepsilon"'] &
\end{tikzcd} .$$

O morfismo Δ é chamado de *Comultiplicação* ou *Coproduto* e ε é chamado de *Counidade.*

Definição 1.5. Um *C-Comódulo* à direita de um comonóide (C, Δ, ε) é um par (M, ρ^M), onde M é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\rho^M : M \longrightarrow M \otimes C$ é um morfismo em $\mathcal{C}$, tal que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho^M"] \arrow[d, "\rho^M"'] & M \otimes C \arrow[d, "M\otimes\Delta"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\rho^M\otimes C"'] & M \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho^M"] \arrow[dr, "r_M^{-1}"'] & M \otimes C \arrow[d, "M\otimes\varepsilon"] \\
 & M \otimes \mathbb{1}
\end{tikzcd}$$

Seja k um anel comutativo unitário então a categoria $({}_k\mathcal{M}_k, \otimes_k, k)$ é uma categoria monoidal. Onde ${}_k\mathcal{M}_k$ é a categoria dos k-bimódulos e $a_{M,N,P} : (M \otimes_k N) \otimes_k P \cong M \otimes_k (N \otimes_k P)$, $l_M : k \otimes_M \cong M$ e $r_M : M \otimes_k \cong M$ serão omitidos.

Definição 1.6. Uma *k-álgebra* é uma álgebra (R, μ, η) na categoria ${}_k\mathcal{M}_k$.

Podemos então subir um degrau e considerar a categoria ${}_R\mathcal{M}_R$ dos R-bimódulos. E ainda $({}_R\mathcal{M}_R, \otimes_R, R)$ será uma categoria monoidal.

Definição 1.7. Um *R-anel* é uma álgebra (A, μ, η) na categoria $({}_R\mathcal{M}_R, \otimes_R, R)$.

Para um R-anel (A, μ, η), o *oposto* siginifica o R^{op}-anel (A^{op}, μ^{op}, η). Onde A^{op} é o mesmo k-bimódulo, A^{op} tem estrutura de R^{op}-módulo à esquerda (resp. à direita) via a R-ação à direita (resp. à esquerda). A multiplicação é dada por $\mu^{op}(a \otimes_{R^{op}} b) = \mu(b \otimes_R a)$ e a unidade é a mesma η.

Definição 1.8. Um C-*coanel* é uma coálgebra (C, Δ, ε) na categoria $({}_R\mathcal{M}_R, \otimes_R, R)$.

Para um R-coanel (C, Δ, ε), o *co-oposto* siginifica o R^{op}-coanel $(C_{cop}, \Delta_{cop}, \varepsilon)$. Onde C_{cop} é o mesmo k-bimódulo C, C_{cop} tem estrutura de R^{op}-módulo à esquerda (resp. à direita) via a R-ação à direita (resp. à esquerda). A comultiplicação é dada por $\Delta_{cop}(c) = c_{(2)} \otimes_{R^{op}} c_{(1)}$ e a counidade é a mesma ε.

Lema 1.1. *O módulo à direta regular R se estende para um módulo à direita de um R-anel (A, μ, η) se, e somente se, existe um morfismo de k-módulo $\chi : A \longrightarrow R$, tal que para quaisquer $a, b \in A$ e $r \in R$ as seguintes condições são satisfeitas.*

(i) $\chi(1_A) = 1_R$

(ii) $\chi(a\eta(r)) = \chi(a)r$

(iii) $\chi((\eta \circ \chi)(a)b) = \chi(a)\chi(b)$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Queremos definir $\chi : A \longrightarrow R$ morfismo de k-módulos. Como R é A-módulo à direita, temos $\psi_R : R \otimes_R A \longrightarrow R$ onde $\psi_R(r \otimes a) = r \leftharpoondown a$ é a ação à direita de A em R. Também temos

$$A \xrightarrow{l_A^{-1}} R \otimes_R A \xrightarrow{\psi_R} R \ ,$$

defina $\chi := \psi_R \circ l_A^{-1}$, dessa forma temos

$$\chi(a) = (\psi_R \circ l_A^{-1})(a) = \psi_R(1_R \otimes_R a) = 1_R \leftharpoondown a.$$

Note que χ é morfismo de k-módulos pois é a composição de k-módulos. Vamos verificar as outras condições:

(i) $\chi(1_A) = 1_R \leftharpoondown 1_A = 1_R$;

(ii)

$$\begin{aligned} \chi(a\eta(r)) = 1_R \leftharpoondown (a\eta(r)) =& 1_R \leftharpoondown (a \cdot r) \\ =& (1_R \leftharpoondown a)r \\ =& \chi(a)r; \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \chi((\eta \circ \chi)(a)(b)) =& \chi((\eta(\chi(a))(b)) \\ =& 1_A \leftharpoondown \eta(\chi(a))b \\ =& (1_R \leftharpoondown \eta(\chi(a))) \leftharpoondown b \\ =& (1_R \leftharpoondown 1_A \cdot \chi(a)) \leftharpoondown b \\ =& ((1_R \leftharpoondown 1_A)\chi(a)) \leftharpoondown b \\ =& \chi(a) \leftharpoondown b = (1_R \leftharpoondown a) \leftharpoondown b \\ =& 1_R \leftharpoondown ab = \chi(ab). \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Temos $\chi : A \longrightarrow R$ morfismo de k-módulos que satisfaz as condições acima. Defina,

$$\begin{array}{rlcl} \psi_R : & R \times A & \to & R \\ & (r, a) & \mapsto & \chi(\eta(r)a). \end{array}$$

Mostremos primeiro que ψ_R é R-balanceada. De fato, para $r, s \in R$ e $a \in A$ temos

$$\begin{aligned} \psi_R(r, s \cdot a) =& \chi(\eta(r)(s \cdot a)) = \chi(\eta(r)\eta(s)a) \\ =& \chi(\eta(rs)a) = \psi_R(rs, a). \end{aligned}$$

Segue que ψ_R é R-balanceada. Portanto, existe única $\psi_R : R \otimes A \longrightarrow R$. Vamos mostrar agora a comutatividade dos seguintes diagramas

$$\begin{tikzcd} R \otimes_R A \otimes_R A \arrow[r, "\psi_R \otimes A"] \arrow[d, "R\otimes\mu"'] & R \otimes_R A \arrow[d, "\psi_R"] \\ R \otimes_R A \arrow[r, "\psi_R"'] & R \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \cong R \otimes_R R \arrow[r, "R\otimes A"] \arrow[dr, "Id_R"'] & R \otimes_R A . \arrow[d, "\psi_R"] \\ & R \end{tikzcd}$$

De fato, para o primeiro diagrama temos

$$\begin{aligned} (\psi_R \circ (\psi_R \otimes A))(r \otimes a \otimes b) =& \psi_R(\chi(\eta(r)a) \otimes b) \\ =& \chi(\eta(\chi(\eta(r)a))b) \\ =& \chi(\eta(r)ab) = \psi_R(r \otimes ab) \\ =& (\psi_R \circ (R \otimes \mu))(r \otimes a \otimes b). \end{aligned}$$

Para o segundo diagrama temos

$$\begin{aligned} (\psi_R \circ (R \otimes \eta))(r \otimes 1_R) =& \psi_R(r \otimes \eta(1_R)) = \psi_R(r \otimes 1_A) \\ =& \chi(\eta(r)1_A) = \chi(1_A\eta(r)) \\ =& \chi(1_A)r = 1_R r = r. \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado. $\square$

Um R-anel (A, μ, η) com $\chi : A \longrightarrow R$, satisfazendo as condições acima é chamado de *caracter à direita* no R-anel (A, μ, η).

Definição 1.9. Seja (A, μ, η) um R-anel possuindo um caracter à direita $\chi : A \longrightarrow R$. Os invariantes de um A-módulo à direita (M, θ_M) com respeito ao caracter χ são os elementos do k-submódulo

$$M_\chi := \{m \in M; \quad \theta_M(m \otimes a) = \theta_M(m \otimes \eta(\chi(a))), \quad \forall a \in A\} \cong Hom_A(R, M)$$

Onde o isomorfismo $F : M_\chi \longrightarrow Hom_A(R, M)$ é dado por $F(m)(r) = \theta_M(m \otimes \eta(r))$. Em particular, os invariantes de R são os elementos da subálgebra

$$R_\chi = \{r \in R; \; \chi(\eta(r)a) = r\chi(a), \; \forall\, a \in A\} \cong End_A(R).$$

Associado ao caracter χ, existe um morfismo canônico

$$\begin{array}{rlcl} G : & A & \to & {}_B End(R) \\ & a & \mapsto & (r \longmapsto \chi(\eta(r)a)). \end{array}$$

O R-anel (A, μ, η) é dito ser *Galois* com respeito a χ se G é bijetiva.

Lema 1.2. *O R-módulo à direita regular R se estende para um C-comódulo à direita de um R-coanel (C, Δ, ε) se, e somente se, existe um elemento $g \in C$ obedecendo as seguintes propriedades:*

(i) $\varepsilon(g) = 1_R$*;*

(ii) $\Delta(g) = g \otimes g$.

Demonstração. ($\Longrightarrow$) R é C-comódulo à direita, ou seja, os diagramas seguintes comutam

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & R \otimes C \arrow[d, "R\otimes\Delta"] \\ R \otimes C \arrow[r, "\rho\otimes C"'] & R \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "I_R"'] & R \otimes C \arrow[d, "R\otimes\varepsilon"] \\ & R \cong R \otimes R \end{tikzcd} .$$

Agora defina $g = \varphi(\rho(1_R))$ e omitindo o isomorfismo $R \otimes C \cong C$ temos

$$g = \rho(1_R) = 1_R \otimes g$$

. Assim,

$$(R \otimes \Delta)(1_R \otimes g) = 1_R \otimes g_{(1)} \otimes g_{(2)} = g_{(1)} \otimes g_{(2)} = \Delta(g).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta(g) &= (R \otimes \Delta)(1_R \otimes g) \\ &= (R \otimes \Delta)\rho(1_R) \\ &= (\rho \otimes C)\rho(1_R) \\ &= (\rho \otimes C)(1_R \otimes g) \\ &= \rho(1_R) \otimes g \\ &= g \otimes g. \end{aligned}$$

Também temos

$$(R \otimes \varepsilon)\rho(1_R) = (R \otimes \varepsilon)(1_R \otimes g) = 1_R \otimes \varepsilon(g) = \varepsilon(g) = 1_R.$$

($\Longleftarrow$) Agora, dado um elemento grouplike $g \in C$, defina

$$\begin{array}{rccc} \rho: & R & \longrightarrow & R \otimes C \\ & r & \longmapsto & 1_R \otimes g \cdot r. \end{array}$$

Note que ρ é morfismo de R-módulo à direita. De fato,

$$\begin{aligned} \rho(rs) &= 1_R \otimes g \cdot (rs) \\ &= 1_R \otimes (g \cdot r) \cdot s \\ &= (1_R \otimes g \cdot r)s \\ &= \rho(r)s. \end{aligned}$$

Portanto, ρ é morfismo de R-módulo à direita. Vamos mostrar que ρ é uma coação à direita. De fato, temos

$$\begin{aligned}(R\otimes\Delta)\rho(r) &= (R\otimes\Delta)(1_R\otimes g\cdot r)\\ &= 1_R\otimes\Delta(g\cdot r)\\ &= 1_R\otimes\Delta(g)r\\ &= 1_R\otimes(g\otimes g)r\\ &= 1_R\otimes g\otimes g\cdot r\\ &= \rho(1_R)\otimes g\cdot r\\ &= (\rho\otimes C)(1_R\otimes g\cdot r)\\ &= (\rho\otimes C)\rho(r).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(R\otimes\varepsilon)\rho(r) &= (R\otimes\varepsilon)(1_R\otimes g\cdot r) \qquad (1)\\ &= 1_R\otimes\varepsilon(g\cdot r)\\ &= 1_R\otimes\varepsilon(g)r\\ &= 1_R\otimes r = r.\end{aligned}$$

Segue portanto, que R tem estrutura de C-comódulo à direita. □

Um R-coanel (C,Δ,ε) com $g\in C$ satisfazendo as condições acima é chamado de *grouplike*.

Definição 1.10. Seja (C,Δ,ε) um R-coanel possuindo um grouplike $g\in C$. Os coinvariantes de um comódulo à direita (M,ρ^M) com respeito a g, são os elementos do k-submódulo

$$M^g := \left\{m\in M;\ \ \rho^M(m)=m\otimes g\right\}\cong Hom^C(R,M).$$

Onde o isomorfismo $F: M^g\longrightarrow Hom^C(R,M)$ é dado por $m\longmapsto(r\longmapsto m\cdot r)$. Em particular, os coinvariantes de R são os elementos da subálgebra

$$B := \{b\in R;\ \ b\cdot g = g\cdot b\}.$$

Associado ao grouplike g, existe um morfismo canônico,

$$\begin{array}{rccc} Can: & R\otimes R & \longrightarrow & C\\ & a\otimes b & \longmapsto & a\cdot g\cdot b.\end{array}$$

O R-coanel C é dito ser R-coanel *Galois* se Can é uma bijeção.

Proposição 1.3. *Seja C um R-coanel o qual é R-módulo à esquerda, projetivo finitamente gerado. Para $g\in C$, temos o mapa $\chi_g :^* C\longrightarrow R$, $\phi\longmapsto\phi(g)$. Então vale as seguintes afirmações:*

(1) O elemento $g\in C$ grouplike se, e somente se, χ_g é um caracter à direita no R-anel $^*C$;

(2) Um elemento $b\in R$ é um coinvariante do C-comódulo R à direita (com coação induzida por um elemento grouplike g) se, e somente se,b é um invariante do $^*C$-módulo R (com respeito ao caracter à direita χ_g);

(3) *O R-coanel C é um coanel Galois (com respeito ao elemento grouplike g) se, e somente se, o R-anel ${}^*C$ é um anel Galois (com respeito ao caracter à direita χ_g).*

Demonstração. Antes de provarmos, o produto de convolução em ${}^*C$ é dado da seguinte forma: $(\phi * \psi)(g) = \psi(g_{(1)} \cdot \phi(g_2))$ para $g \in C$ e $\phi, \psi \in {}^*C$ quaisquer. E ainda $\eta : R \longrightarrow^* C$ é definido por $\eta(r)(g) = \varepsilon(g)r$ para todo $g \in C$ e $r \in R$.

(1) ($\Longrightarrow$) temos q verificar as condições (i), (ii) e (iii) do lema 1.1. De fato,

(i) $\chi_g(1_{^*C}) = 1_R$, onde $1_{^*C} = \varepsilon$.

$$\chi_g(\varepsilon) = \varepsilon(g) = 1_R.$$

(ii) $\chi_g(\phi * \eta(r)) = \chi_g(\phi)r$. De fato, para quaisquer $g \in C$, $\phi, \psi \in {}^*C$ e $r \in R$ temos

$$\begin{aligned}
\chi_g(\phi * \eta(r)) &= (\phi * \eta(r))(g) \\
&= \eta(r)(g \cdot (\phi(g))) \\
&= \varepsilon(g \cdot (\phi(g)))r \\
&= \varepsilon(g)\phi(r)r \\
&= \phi(g)r \\
&= \chi_g(\phi)r.
\end{aligned}$$

(iii) $\chi_g(\eta(\chi_g(\phi)) * \psi) = \chi_g(\phi * \psi)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\chi_g(\eta(\chi_g(\phi)) * \psi) &= (\eta(\chi_g(\phi)) * \psi)(g) \\
&= \psi(g \cdot \eta(\chi_g(\phi))(g)) \\
&= \psi(g \cdot \varepsilon(g)\chi_g(\phi)) \\
&= \psi(g \cdot \chi_g(\phi)) \\
&= \psi(g \cdot \phi(g)) \\
&= (\phi * \psi)(g) \\
&= \chi_g(\phi * \psi).
\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Queremos mostrar que g é grouplike. Note que

$$\chi_g(\varepsilon) = 1_R = \varepsilon(g).$$

Temos também,

$$\begin{aligned}
\chi_g(\eta(\chi_g(\phi)) * \psi) &= (\eta(\chi_g(\phi)) * \psi)(g) \\
&= \psi(g_{(1)} \cdot \eta(\chi_g(\phi))(g_{(2)})) \\
&= \psi(g_{(1)} \cdot \varepsilon(g_{(2)})\chi_g(\phi)) \\
&= \psi(g \cdot \chi_g(\phi)) \\
&= \psi(g \cdot \phi(g)).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\chi_g(\phi * \psi) = (\phi * \psi)(g) = \psi(g_{(1)} \cdot \phi(g_{(2)}))$$

Segue portanto, que para quaisquer $\phi, \psi \in \ ^*C$ temos

$$\psi(g \cdot \phi(g)) = \psi(g_{(1)} \cdot \phi(g_{(2)})).$$

Agora como C é projetivo finitamente gerado, temos que existem $\phi^i \in C$ e $x_i \in C$ tais que $g = \sum_{i=1}^{d} \phi^i(g) \cdot x_i$ e para $\phi^i(g)$ existem $\phi^j \in C$ e $x_j \in C$ tais que $g \cdot \phi^i(g) = \sum_{j=1}^{d} \phi^j(g \cdot \phi^i(g)x_j)$. Desta forma temos

$$\begin{aligned}
g \otimes g &= g \otimes \sum_{i=1}^{d} \phi^i(g) \cdot x_i \\
&= \sum_{i=1}^{d} g \cdot \phi^i(g) \otimes x_i \\
&= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \phi^j(g \cdot \phi^i(g)) \cdot x_j \otimes x_i \\
&= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \phi^j(g_{(1)} \cdot \phi^i(g_{(2)})) \cdot x_j \otimes x_i \\
&= \sum_{i=1}^{d} g_{(1)} \cdot \phi^i(g_{(2)}) \otimes x_i \\
&= g_{(1)} \otimes \sum_{i=1}^{d} \phi^i(g_{(2)}) \cdot x_i \\
&= g_{(1)} \otimes g_{(2)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\Delta(g) = g_{(1)} \otimes g_{(2)} = g \otimes g$. Segue que g é grouplike.

(2) ($\Longrightarrow$) b é coinvariante, ou seja, $b \cdot g = g \cdot b$. Temos que mostrar que

$$\chi_g(\eta(b) * \phi) = b\chi_g(\phi)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\chi_g(\eta(b) * \phi) &= (\eta(b) * \phi)(g) \\
&= \phi(g \cdot \eta(b)(g)) \\
&= \phi(g \cdot \varepsilon(g)b) \\
&= \phi(g \cdot b) \\
&= \phi(b \cdot g) \\
&= b\phi(g) \\
&= b\chi_g(\phi).
\end{aligned}$$

Portanto, b é invariante do $^*C$-módulo R (com respeito a χ_g).
($\Longleftarrow$) Temos que b é invariante, ou seja,

$$\chi_g(\eta(b) * \phi) = b\chi_g(\phi).$$

Ou seja, para todo $\phi \in {}^*C$ temos $\phi(g \cdot b) = \phi(b \cdot g)$. Temos que mostrar que $b \cdot g = g \cdot b$. De fato, como C é projetivo finitamente gerado, temos que existem $\phi^i \in {}^*C$ e $x_i \in C$ tais que

$$b \cdot g = \sum_{i=1}^{d} \phi^i(b \cdot g) \cdot x_i.$$

Desta forma, temos

$$b \cdot g = \sum_{i=1}^{d} \phi^i(b \cdot g) \cdot x_i = \sum_{i=1}^{d} \phi^i(g \cdot b) \cdot x_i = g \cdot b.$$

Portanto, b é coinvariante do C-comódulo R (com respeito a g). □

2 Bialgebróides

Dado um R-anel (A, μ, η) podemos dar uma estrutura de k-álgebra para A com multiplicação $m : A \otimes_k A \longrightarrow A$ definida por $m = \mu \circ \pi$, onde $\pi : A \otimes_k A \longrightarrow A \otimes_R A$ é a projeção canônica, e a unidade $\eta_A : k \longrightarrow A$ é definida por $\eta_A = \eta \circ \eta_R$ onde η_R é a unidade da k-álgebra R. A ação à direita e a ação à esquerda de k em A são dadas respectivamente por $a \cdot s = a\eta_R(s)$ e $s \cdot a = \eta_R(s)a$.

Lema 2.1. *Existe uma bijeção entre R-anéis (A, μ, η) e morfismos de k-álgebras $\eta : R \longrightarrow A$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja (A, μ, η) um R-anel. temos que mostrar que η é morfismo de k-álgebras. De fato, claro que η é k linear. Basta verificarmos que η é multiplicativo

$$\begin{aligned}
\eta(rs) &= \eta(r1_R s) \\
&= r \cdot \eta(1_R) \cdot s \\
&= r \cdot 1_A \cdot s \\
&= (r \cdot 1_A) \cdot s \\
&= ((r \cdot 1_A)1_A) \cdot s \\
&= (r \cdot 1_A)(1_A \cdot s) \\
&= (r \cdot \eta(1_R))(\eta(1_R) \cdot s) \\
&= \eta(r)\eta(s).
\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Suponha que $\eta : R \longrightarrow A$ seja morfismo de k-álgebras. Em particular η é morfismo de R-bimódulos. De fato, podemos dá a estrutura de R-bimódulo para A como $r \cdot a \cdot s = \eta(r)a\eta(s)$. Assim

$$\eta(rs) = \eta(r1_R s) = \eta(r)\eta(1_R)\eta(s) = r \cdot 1_A \cdot s.$$

também podemos munir $A \otimes_k A$ com estrutura de R-bimódulo por

$$r \cdot (a \otimes b) \cdot s = \eta(r)a \otimes b\eta(s).$$

Desta forma podemos mostrar de maneira fácil que m é morfismo de R-bimódulos. Portanto, precisamos apenas construir uma multiplicação $\mu : A \otimes_R A \longrightarrow A$ o qual é morfismo de R-bimódulos. De fato, apartir de η podemos construir dois morfismos

$$f, g : A \otimes_k R \otimes_k A \longrightarrow A \otimes_k A,$$

definidos por

$$f(a \otimes r \otimes b) = a\eta(r) \otimes b \quad \text{e} \quad g(a \otimes r \otimes b) = a \otimes \eta(r)b.$$

Não é difícil mostrar que f, g são morfismos de R-bimódulos. Desta forma, podemos considerar o produto tensorial R balanceado como o coequalizador

$$\begin{tikzcd} A \otimes_k R \otimes_k A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & A \otimes_k A \arrow[r, "\pi"] & A \otimes_R A \end{tikzcd}$$

Agora pela associatividade da multilicação m temos

$$\begin{aligned} m \circ f(a \otimes r \otimes b) &= m(a\eta(r) \otimes b) \\ &= (a\eta(r))b \\ &= a(\eta(r)b) \\ &= m(a \otimes \eta(r)b) \\ &= m \circ g(a \otimes r \otimes b). \end{aligned}$$

Portanto, pela propriedade universal do coequalizador, existe único $\mu : A \otimes_R A \longrightarrow A$ morfismo de R-bimódulos tal que comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes_k R \otimes_k A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & A \otimes_k A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "m"'] & A \otimes_R A \arrow[d, dashed, "\mu"] \\ & & A \end{tikzcd} .$$

Não é difícil verificar a associatividade de μ. $\square$

A definição de bialgebróides, contrastando com a definição de biálgebras, não é feita como uma compatibidade entre monóides (objeto álgebras) e comonóides (objeto coálgebras) na mesma cadegoria monoidal de bimódulos. As estruturas de anel e coanel são definidas sobre álgebras base diferentes. Na verdade são monoides e comonoides em categorias monoidais distintas. Lembre do lema 2.1 que um $R \otimes_k R^{op}$-anel A é descrito por um morfismo de k-álgebras $\eta : R \otimes_k R^{op} \longrightarrow A$. De maneira equivalente podemos considerar as restrições

$$s := \eta(- \otimes_k 1_R) : R \longrightarrow A \quad \text{e} \quad t := \eta(1_R \otimes_k -) : R^{op} \longrightarrow A,$$

que são morfismos de k-álgebras com imagens comutando em A. Os morfismos s e t são chamados de *source* e *target* de um $R \otimes_k R^{op}$-anel A, respectivamente. Um $R \otimes_k R^{op}$-anel será dado pela tripla (A, s, t), onde A é uma k-álgebra e s, t são morfismos de álgebras com imagens comutando em A.

Definição 2.1. Seja R uma álgebra sobre um anel comutativo k. Um R-*bialgebróide à direita* B, consiste de um $R \otimes_k R^{op}$-anel (B, s, t) e de um R-coanel (B, Δ, ε) no mesmo k-módulo B, que estão sujeitos aos seguintes axiomas de compatibidade:

(i) A estrutura de R-bimódulo no R-coanel (B, Δ, ε) é dada por

$$r \cdot b \cdot r' = bs(r')t(r) \tag{2}$$

para todo $r, r' \in R$ e $b \in B$.

(ii) Considerando B como R-bimódulo com estrutura dada em 2. A co-restrição $\Delta : B \longrightarrow B \times_R B$ é morfismo de k-álgebras, onde

$$B \times_R B := \left\{ \sum_i b_i \otimes \ b'_i \in B \otimes_R B \mid \sum_i s(r) b_i \otimes \ b'_i = \sum_i b_i \otimes \ t(r) b'_i \ \ \forall r \in R \right\},$$

e $B \times_R B$ é uma k-álgebra, com multiplicação dada por $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$.

(iii) A counidade ε é um caracter à esquerda no R-anel (B, s).

Definição 2.2. Seja R uma álgebra sobre um anel comutativo k. Um *R-bialgebróide à esquerda* B, consiste de um $R \otimes_k R^{op}$-anel (B, s, t) e de um R-coanel (B, Δ, ε) no mesmo k-módulo B, que estão sujeitos aos seguintes axiomas de compatibidade:

(i) A estrutura de R-bimódulo no R-coanel (B, Δ, ε) é dada por

$$r \cdot b \cdot r' = s(r)t(r')b \tag{3}$$

para todo $r, r' \in R$ e $b \in B$.

(ii) Considerando B como R-bimódulo com estrutura dada em 3. A co-restrição $\Delta : B \longrightarrow B \times_R B$ é morfismo de k-álgebras, onde

$$B \times_R B := \left\{ \sum_i b_i \otimes \ b'_i \in B \otimes_R B \mid \sum_i b_i t(r) \otimes \ b'_i = \sum_i b_i \otimes \ b'_i s(r) \ \ \forall r \in R \right\},$$

e $B \times_R B$ é uma k-álgebra, com multiplicação dada por $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$.

(iii) A counidade ε é um caracter à direita no R-anel (B, s).

Note que o k-submódulo $B \times_R B$ de $B \otimes_R B$ é definido de tal maneira que a multiplicação é bem definida. $B \times_R B$ é chamado de *produto Takeuchi*. Na verdade $B \times_R B$ tem mais estrutura do que uma k-álgebra, como vamos ver na próxima proposição.

Proposição 2.2. *Seja (B, s, t) um $R \otimes R^{op}$-anel. Então O produto Takeuchi $B \times_R B$ é um $R \otimes_k R^{op}$-anel com unidade $\eta : R \otimes_k R^{op} \longrightarrow B \times_R B$ dada por $\eta(r \otimes r') = t(r') \otimes_R s(r)$ e a multiplicação dada por*

$$(\sum_i a_i \otimes_R b_i)(\sum_j c_j \otimes_R d_j) = \sum_{i,j} a_i c_j \otimes_R b_i d_j.$$

Demonstração. Primeiro vamos ver que a multiplicação está bem definida, ou seja, que independe da escolha de representates de uma classe. Claramente, pela maneira que foi definida, a multiplicação é linear. Basta mostrarmos que o produto é zero quando um dos fatores é zero. De fato, seja $\sum\limits_i a_i \otimes_R b_i = 0$, pela caracterização do elemento nulo, existem uma quantidade finitas de elementos $r_{ij} \in R$ e $x_j \in B$ tais que

$$\sum_i s(r_{ij})b_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_j t(r_{ij})x_j = a_i,$$

então temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_i a_i \otimes_R b_i\right)(c \otimes_R d) &= \sum_{i,j} t(r_{ij})x_j c \otimes_R b_i d \\ &= \sum_j xj \otimes_R \sum_i s(r_{ij})b_i d = 0. \end{aligned}$$

Perceba que não usamos o fato que $\sum\limits_i a_i \otimes_R b_i \in B \times_R B$, isso vai ser necessário apenas no caso quando o segundo fator é zero. De fato, seja $\sum\limits_j c_j \otimes d_j = 0$, então existem uma quantidade finita de elementos $r_{kj} \in R$ e $y_k \in B$ tais que

$$\sum_j s(r_{kj})d_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_k t(kj)y_k = c_j,$$

seja $\sum\limits_i a_i \otimes b_i \in B \times_R B$, então

$$\begin{aligned} \left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)\left(\sum_j c_j \otimes_R d_j\right) &= \sum_{i,j} a_i c_j \otimes b_i d_j \\ &= \sum_{i,j} a_i \left(\sum_k t(r_{kj})y_k\right) \otimes_R b_i d_j \\ &= \sum_{i,j,k} (a_i t(r_{kj}) \otimes_R b_i)(y_k \otimes_R d_j) \\ &= \sum_{i,j,k} (a_i \otimes_R b_i s(r_{kj}))(y_k \otimes_R d_j) \\ &= \sum_{i,k} a_i y_k \otimes_R b_i \left(\sum_j s(r_{kj})d_j\right) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a multiplicação está bem definida. Não é difícil verificar a associatividade da multiplicação e que $1_B \otimes 1_B$ é a unidade da multiplicação desta álgebra associativa. Agora vamos verificar que η é um morfismo de álgebras. De fato, sejam $r, w, u, v \in R$, então

$$\begin{aligned}\eta((r \otimes w)(u \otimes v)) &= \eta(ru \otimes wv)\\ &= s(ru) \otimes_R t(wv)\\ &= s(r)s(u) \otimes_R t(w)t(v)\\ &= (s(r) \otimes_R t(w))(s(u) \otimes_R t(v))\\ &= \eta(r \otimes w)\eta(u \otimes v).\end{aligned}$$

Segue então que $B \times_R B$ é um $R \otimes_k R^{op}$-anel. □

Exemplo 2.1. Biálgebras A sobre um anel comutativo k são bialgebróides na categoria dos k-bimódulos. No qual os morfismos s e t são iguais ao morfismo unidade $k \longrightarrow A$.

Demonstração. De fato, note $k \simeq k \otimes_k k^{op}$, portanto A é $k \otimes_k k^{op}$-anel, pois é k-álgebra. Claro que (A, Δ, ε) é k-coanel, pois é k-coálgebra. Verificando os itens da definição temos,

(i) $r \cdot a \cdot r' = (a \cdot r) \cdot r' = a \cdot (rr') = a\eta(rr') = a\eta(r)\eta(r') = as(r')t(r)$.

(ii) Temos

$$A \times_k A := \left\{ \sum_i b_i \otimes\ b_i' \in A \otimes_k A \mid \sum_i \eta(r)b_i \otimes\ b_i' = \sum_i b_i \otimes\ \eta(r)b_i' \ \ \forall r \in k \right\},$$

mas para todo $\sum_i b_i \otimes_k b' \in A \otimes_k A$ temos

$$\begin{aligned}\sum_i \eta(r)b_i \otimes b_i' &= \sum_i r \cdot b_i \otimes b_i'\\ &= \sum_i b_i \cdot r \otimes b_i'\\ &= \sum_i b_i \otimes r \cdot b_i'\\ &= \sum_i b_i \otimes \eta(r)b_i'.\end{aligned}$$

Ou seja, $A \otimes_k A = A \times_k A$.

(iii) Vamos verificar que ε é caracter à direita de (A, η). De fato,

(a) $\varepsilon(1_A) = 1_k$ é claro, pois ε é morfismo de k-álgebra.

(b) $\varepsilon(a\eta(r)) = \varepsilon(a \cdot r) = \varepsilon(a)r$

(c) $\varepsilon(\eta(\varepsilon(a))b) = \varepsilon(\varepsilon(a) \cdot b) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) = \varepsilon(ab$.

Portanto, temos que A é um k-bialgebroide à direita. □

Exemplo 2.2. Seja R uma álgebra sobre um anel comutativo k. Podemos dá uma estrutura de bialgebróide para $R \otimes_k R^{op}$. Os morfismos source e target são dados pelas inclusões

$$s : R \longrightarrow R \otimes_k R^{op} \quad \text{e} \quad t : R^{op} \longrightarrow R \otimes_k R^{op},$$

definidos por $r \longmapsto r \otimes 1_R$ e $r \longmapsto 1_R \otimes r$, respectivamente. O coproduto é definido por

$$\begin{array}{rlcl} \Delta: & R \otimes_k R^{op} & \longrightarrow & (R \otimes_k R^{op}) \otimes_R R \otimes_k R^{op} \\ & r \otimes r' & \longmapsto & (1_R \otimes r') \otimes_R (r \otimes 1_R). \end{array}$$

e a counidade é dada por

$$\begin{array}{rlcl} \eta: & R \otimes_k R^{op} & \longrightarrow & R \\ & r \otimes r' & \longmapsto & r'r. \end{array}$$

Demonstração. Primeiro, para facilitar vamos denotar $R \otimes_k R^{op}$ simplesmente por R^e e os elementos de R^{op} por $\bar{b}$. Agora, é claro que R^e é um R^e-anel, com multiplicação dada entrada à entrada e unidade dada pela identidade. Vamos ver então que $(R^e, \Delta, \varepsilon)$ é um R-coanel. De fato, primeiro vamos verificar que R^e tem estrutura de R-bimódulos, com

$$r \cdot (a \otimes \bar{b}) \cdot r' = (a \otimes \bar{b}) s(r') t(r).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \Delta(r \cdot (a \otimes \bar{b})) &= \Delta((a \otimes \bar{b}) t(r)) \\ &= \Delta((a \otimes \bar{b})(1_R \otimes \bar{r})) \\ &= \Delta(a \otimes \bar{rb}) \\ &= (1_R \otimes \bar{rb}) \otimes_R (a \otimes 1_R) \\ &= (1_R \otimes \bar{b}) t(r) \otimes_R (a \otimes 1_R) \\ &= r \cdot (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R) \\ &= r\Delta(a \otimes \bar{b}). \end{aligned}$$

O outro lado é análogo. Agora vamos ver que

$$(R^e \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes R^e) \circ \Delta \quad \text{e} \quad (\varepsilon \otimes R^e) \circ \Delta = I_{R^e} = (R^e \otimes \varepsilon) \circ \Delta.$$

De fato,

$$\begin{aligned} (R^e \otimes \Delta) \circ \Delta(a \otimes \bar{b}) &= (R^e \otimes \Delta)[(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)] \\ &= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R [(1_R \otimes 1_R) \otimes_R (a \otimes 1_R)] \\ &= [(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (1_R \otimes 1_R)] \otimes_R (a \otimes 1_R) \\ &= (\Delta \otimes R^e)[(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)] \\ &= (\Delta \otimes R^e) \circ \Delta(a \otimes \bar{b}). \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes R^e) \circ \Delta(a \otimes \bar{b}) &= (\varepsilon \otimes R^e)[(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)] \\ &= \bar{b} \otimes_R (a \otimes 1_R) \\ &= 1_R \otimes_R \bar{b} \cdot (a \otimes 1_R) \\ &= 1_R \otimes_R (a \otimes 1_R) t(\bar{b}) \\ &= 1_R \otimes_R (a \otimes 1_R)(1_R \otimes \bar{b}) \\ &= 1_R \otimes_R (a \otimes \bar{b}) \\ &= (a \otimes \bar{b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(R^e \otimes \varepsilon) \circ \Delta(a \otimes \bar{b}) &= (R^e \otimes \varepsilon)[(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)] \\ &= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R a \\ &= (1_R \otimes \bar{b})s(r) \otimes_R 1_R \\ &= (1_R \otimes \bar{b})(a \otimes 1_R) \otimes_R 1_R \\ &= (a \otimes \bar{b}) \otimes_R 1_R \\ &= (a \otimes \bar{b}).\end{aligned}$$

Portanto, temos que $(R^e, \Delta, \varepsilon)$ é um R-coanel. Vamos verificar que a imagem de Δ está contida no produto Takeuchi. De fato,

$$\begin{aligned}s(r)(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R) &= (r \otimes 1_R)(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R) \\ &= (r \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R) \\ &= (1_R \otimes \bar{b})(r \otimes 1_R) \otimes_R (a \otimes 1_R) \\ &= (1_R \otimes \bar{b})s(r) \otimes_R (a \otimes 1_R) \\ &= (1_R \otimes \bar{b}) \cdot r \otimes_R (a \otimes 1_R) \\ &= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R r \cdot (a \otimes 1_R) \\ &= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)t(r) \\ &= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)(1_R \otimes \bar{r}) \\ &= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes \bar{r}) \\ &= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (1_R \otimes \bar{r})(a \otimes 1_R) \\ &= (1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R t(r)(a \otimes 1_R).\end{aligned}$$

Segue portanto, que a imagem de Δ está contida no produto takeuchi. Agora vamos ver que a co-restrição $\Delta : R^e \longrightarrow R^e \times_R R^e$ é morfismo de k-álgebra. Basta verificar que Δ é multlicativo. De fato,

$$\begin{aligned}\Delta(a \otimes \bar{b})\Delta(c \otimes \bar{d}) &= [(1_R \otimes \bar{b}) \otimes_R (a \otimes 1_R)][(1_R \otimes \bar{d}) \otimes (c \otimes 1_R)] \\ &= (1_R \otimes \bar{b})(1_R \otimes \bar{d}) \otimes_R (a \otimes 1_R)(c \otimes 1_R) \\ &= (1_R \otimes \bar{b}\bar{d}) \otimes_R (ac \otimes 1_R) \\ &= \Delta(ac \otimes \bar{b}\bar{d}) \\ &= \Delta((a \otimes \bar{b})(c \otimes \bar{d}).\end{aligned}$$

Portanto, Δ é morfismo de k-álgebra. Resta a gente verificar a condição (iii) da definição de bialgebróide, ou seja, que $\varepsilon : R^e \longrightarrow R$ é um caracter no R-anel (R^e, s). De fato,

(a) $\varepsilon(1_R \otimes 1_R) = 1_R 1_R = 1_R$;

(b) $\varepsilon((a \otimes \bar{b})s(r)) = \varepsilon((a \otimes \bar{b}) \cdot r) = \varepsilon(a \otimes \bar{b})r$;

(c)

$$\begin{aligned}\varepsilon(s(\varepsilon(a \otimes \bar{b}))(c \otimes \bar{d})) &= \varepsilon((ba \otimes 1_R)(c \otimes \bar{d})) \\ &= \varepsilon(bac \otimes \bar{d}) \\ &= d(bac) = (db)(ac) \\ &= \varepsilon(ac \otimes \bar{d}\bar{b}) \\ &= \varepsilon(ac \otimes \bar{b}\bar{d}) \\ &= \varepsilon((a \otimes \bar{b})(c \otimes \bar{d})).\end{aligned}$$

Segue daí que ε é um caracter no R-anel (R^e, s). Portanto, concluímos que $R \otimes R^{op}$ é um R-bialgebróide à direita. $\square$

Exemplo 2.3. (*Biálebras fracas*) Uma biálgebra fraca sobre um anel comutativo k, consiste de uma álgebra e uma coálgebra B, onde B é k-módulo. Que estão sujeitos a axiomas de compatibilidade que generalizam os axiomas de biálgebras. De maneira mais clara, o coproduto é multiplicativo. E ainda, a unitalidade do co-produto Δ e a multiplicalidade da counidade ε são enfraquecidas, conforme as seguintes condições

$$(\Delta(1_B)\otimes_k 1_B)(1_B\otimes_k\Delta(1_B)) = (\Delta\otimes_k B)\circ\Delta(1_B) = (1_B\otimes_k\Delta(1_B))(\Delta(1_B)\otimes_k 1_B),$$

e

$$\varepsilon(b1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)}b') = \varepsilon(bb') = \varepsilon(b1_{(2)})\varepsilon(1_{(1)}b'),$$

para $b, b' \in B$ respectivamente. A aplicação $\sqcap^R : B \longrightarrow B$, $b \longmapsto 1_{(1)}\varepsilon(b1_{(2)})$ é idepotente. Temos que $Im(\sqcap^R) = R$ é uma subálgebra de B. Temos ainda que B é um $R \otimes_k R^{op}$-anel, com source $s : R \longrightarrow B$ dado pela inclusão e target $t : R^{op} \longrightarrow B$ dado pela restrição da aplicação

$$\sqcap_t : B \longrightarrow B, \ \ b \longmapsto \varepsilon(b1_{(1)})1_{(2)}.$$

Considere B como um R-bimódulo via a multiplicação à direita de s e t. E ainda, podemos dá estrutura de R-coanel para B, com co-produto definido por $\bar{\Delta} := \pi \circ \Delta$, onde $\pi : B \otimes_k B \longrightarrow B \otimes_R B$ e counidade $\bar{\varepsilon} := \sqcap^R$.

Demonstração. Primeiramente vamos ver que (B, s, t) é de fato, um R^e-anel. Já temos que B é uma k-álgebra, resta verificarmos que s e t são morfismos de k-álgebra. Mas temos que s e t são k-lineares e s morfismo de k-álgebra, ou seja, basta verificarmos que t é multiplicativo. De fato,

$$\begin{aligned} t(b)t(a) &= \varepsilon(b1_{(1)})1_{(2)}\varepsilon(a1_{(1')})1_{(2')} = \varepsilon(b1_{(1)})\varepsilon(a1_{(1')})1_{(2)}1_{(2')} \\ &= \varepsilon(b1_{(1)})\varepsilon(a \sqcap^R (1_{(2)}))1_{(3)} = \varepsilon(b1_{(1)})\varepsilon(a1_{(1')}\varepsilon(1_{(2)}1_{(2')}))1_{(3)} \\ &= \varepsilon(b1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)}1_{(2')})\varepsilon(a1_{(1')})1_{(3)} = \varepsilon(b1_{(1)}1_{(2')})\varepsilon(a1_{(1')})1_{(2)} \\ &= \varepsilon(b1_{(2)})\varepsilon(a1_{(1)})1_{(3)} = \varepsilon(b\varepsilon(a1_{(1)})1_{(2)})1_{(3)} \\ &= \varepsilon(b\varepsilon(a1_{(1)})1_{(2)}1_{(1')})1_{(2')} = \varepsilon(bt(a)1_{(1')})1_{(2')} \\ &= t(bt(a)). \end{aligned} \tag{4}$$

Também temos

$$\begin{aligned} t(t(a)b) &= t(\varepsilon(a1_{(1)})1_{(2)}) \\ &= \varepsilon(a1_{(1)})t(1_{(2)}b) \\ &= \varepsilon(a1_{(1)})\varepsilon(1_{(2)}b1_{(1')})1_{(2')} \\ &= \varepsilon(ab1_{(1')})1_{(2')} \\ &= t(ab). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} t(ab) &= t(t(a)b) \\ &= t(t(a) \sqcap^R (b)) \\ &= t(\sqcap^R(b)t(a)) \\ &= t(bt(a)) \ \text{ por } \ 4 \ \text{ temos} \\ &= t(b)t(a). \end{aligned}$$

Segue daí que B é um R^e-anel. Vamos ver agora que B tem estrutura de R-bimódulo, com

$$r \cdot b \cdot r' = bs(r')t(r).$$

De fato, vamos verificar a estrutura à esquerda pois à direita é imediato.

$$r' \cdot (r \cdot b) = r' \cdot (bt(r)) = bt(r)t(r') = bt(r'r) = (r'r) \cdot b.$$

Vamos verificar agora que $(B, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ é um R-coanel. De fato, já temos que a coassociatividade é satisfeita. Vamos verificar o axioma da counidade, ou seja,

$$(\bar{\varepsilon} \otimes B) \circ \bar{\Delta} = I_B = (B \otimes \bar{\varepsilon}) \circ \bar{\Delta}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(\bar{\varepsilon} \otimes B) \circ \bar{\Delta}(b) &= 1_{(1)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(2)}) \otimes_R b_{(2)} = 1_{(1)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(2)}) \cdot b_{(2)} \\
&= b_{(2)}t(1_{(1)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(2)})) = b_{(2)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(2)})t(1_{(1)}) \\
&= b_{(2)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(2)})\varepsilon(1_{(1)}1_{(1')})1_{(2')} = b_{(2)}\varepsilon(b_{(1)}1_{(1')})1_{(2')} \\
&= b_{(2)}1_{(2')}\varepsilon(b_{(1)}1_{(1')}) = b_{(2)}\varepsilon(b_{(1)}) = b.
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
(B \otimes \bar{\varepsilon}) \circ \bar{\Delta}(b) &= (B \otimes \bar{\varepsilon})(b_{(1)} \otimes_R b_{(2)}) \\
&= b_{(1)} \otimes_R 1_{(1')}\varepsilon(b_{(2)}1_{(2')}) \\
&= b_{(1)} \cdot 1_{(1')}\varepsilon(b_{(2)}1_{2'}) \\
&= b_{(1)}\varepsilon(b_{(2)}) = b.
\end{aligned}$$

Vamos ver agora que $\bar{\Delta}$ e $\bar{\varepsilon}$ são morfismos de R-bimódulos. De fato,

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}(r \cdot b) &= \bar{\Delta}(bt(r)) \\
&= \bar{\Delta}(b\varepsilon(r1_{(1)})1_{(2)}) \\
&= \varepsilon(r1_{(1)})\bar{\Delta}(b1_{(2)}) \\
&= \varepsilon(r1_{(1)})(b_{(1)}1_{(2)} \otimes_R b_{(2)}1_{(3)}).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
r \cdot \bar{\Delta}(b) &= r \cdot (b_{(1)} \otimes_R b_{(2)}) \\
&= r \cdot b_{(1)} \otimes_R b_{(2)} \\
&= b_{(1)}t(r) \otimes_R b_{(2)} \\
&= b_{(1)}\varepsilon(r1_{(1)})1_{(2)} \otimes_R b_{(2)} \\
&= b_{(1)}1_{(1')}1_{(2)}\varepsilon(r1_{(1)}) \otimes_R b_{(2)}1_{(2')} \\
&= b_{(1)}1_{(2)}\varepsilon(r1_{(1)}) \otimes_R b_{(2)}1_{(3)} \\
&= \varepsilon(r1_{(1)})(b_{(1)}1_{(2)} \otimes_R b_{(2)}1_{(3)}).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}(b\cdot r) &= \bar{\Delta}(b\sqcap^R(r))\\
&= \bar{\Delta}(b)\bar{\Delta}(\sqcap^R(r))\\
&= (b_{(1)}\otimes_R b_{(2)})(1_{(1)}\otimes_R 1_{(2)}\varepsilon(r1_{(3)}))\\
&= b_{(1)}1_{(1)}\otimes_R b_{(2)}1_{(2)}\varepsilon(r1_{(3)})\\
&= b_{(1)}1_{(1)}\otimes_R b_{(2)}1_{(2)}\varepsilon(r1_{(3)})1_{(1')}\varepsilon(r1_{(2)})\\
&= b_{(1)}\otimes_R b_{(2)}\sqcap^R(r)\\
&= \bar{\Delta}(b)\cdot r.
\end{aligned}$$

Portanto, $\bar{\Delta}$ é morfismo de R-bimódulos. Também temos

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}(b\cdot r) &= \sqcap^R(b\cdot r) = \sqcap^R(br)\\
&= \sqcap^R(b\sqcap^R(r)) = \sqcap^R(b)\sqcap_R(r)\\
&= \sqcap^R(b)r = \bar{\varepsilon}(b)r.
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}(r\cdot b) &= \sqcap^R(r\cdot b) = \sqcap^R(bt(r))\\
&= 1_{(1)}\varepsilon(bt(r)1_{(2)})\\
&= 1_{(1)}\varepsilon(b\varepsilon(r1_{(1')})1_{(2')}1_{(2)})\\
&= 1_{(1)}\varepsilon(r1_{(1')})\varepsilon(b1_{(2')}1_{(2)})\\
&= 1_{(1)}\varepsilon(b1_{(2')})\varepsilon(r1_{(1')}1_{(2)})\\
&= 1_{(1)}\varepsilon(r1_{(1')}\varepsilon(b1_{(2')}1_{(2)}))\\
&= 1_{(1)}\varepsilon(r\sqcap^R(b)1_{(2)})\\
&= \sqcap^R(r\sqcap^R(b))\\
&= \sqcap^R(r)\sqcap^R(b)\\
&= r\sqcap^R(b) = r\bar{\varepsilon}(b).
\end{aligned}$$

Segue que $\bar{\varepsilon}$ é morfismo de R-bimódulo. Portanto, conluímos assim que $(B,\bar{\Delta},\bar{\varepsilon})$ é um R-coanel. Vamos verificar que a imagem de $\bar{\Delta}$ está contida em $B\times_R B$. De fato, para isso vamos usar as seguintes propriedades

(1) $\sqcap^R(a)b = b_{(1)}\varepsilon(ab_{(2)}) \quad \forall \quad a,b\in B$;

(2) $t(a)b = \varepsilon(ab_{(1)})b_{(2)} \quad \forall \quad a,b\in B$.

Segue então que

$$\begin{aligned}
s(r)b_{(1)}\otimes_R b_{(2)} &= \sqcap^R(r)b_{(1)}\otimes_R b_{(2)}\\
&= b_{(1)}\varepsilon(rb_{(2)})\otimes_R b_{(3)}\\
&= b_{(1)}\otimes_R \varepsilon(rb_{(2)})b_{(3)}\\
&= b_{(1)}\otimes_R t(r)b_{(2)}.
\end{aligned}$$

Vamos ver que $\bar{\varepsilon}$ é um caracter à direita em (B,s).

(a) $\bar{\varepsilon}(1_B) = \sqcap^R(1_B) = 1_{(1)}\varepsilon(1_B1_{(2)}) = 1_B$;

(b) $\bar{\varepsilon}(as(r)) = \bar{\varepsilon}(ar) = \bar{\varepsilon}(a)r$;

(c) $\bar{\varepsilon}s(\bar{\varepsilon}(a))b = \bar{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}(a)b) = \sqcap^R(\sqcap^R(a)b) = \sqcap^R(ab) = \bar{\varepsilon}(ab)$.

Portanto, concluímos assim que B é um R-bialgebróide à direita. $\square$

Referências

[1] G. Böhm, Hopf algebroids, In: "Handbook of algebra". Vol. 6, 173–235, Elsevier/North-Holland (2009).

[2] M.M.S. Alves, E. Batista: An introduction to Hopf algebras: A categorical approach. XXIII Brazilian Algebra Meeting. Maringá, July 27th to August 1st, 2014.

[3] T. Brzezinski and R. Wisbauer, Corins and comudules, London Math. Soc. Lecture Note Series 309, Cambridge Univ. Press. (2003).