

A categoria trançada dos módulos de Yetter-Drinfeld

Carla Mörschbächer*

Coaneis e comódulos

Professor Eliezer Batista

Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Universidade Federal de Santa Catarina

2 de julho de 2015

Resumo

Neste trabalho vamos fazer uma breve introdução às categorias monoidais trançadas e a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld.

1 Introdução

Os objetivos deste trabalho são: rever conceitos básicos de álgebra para introduzir o conceito de álgebra de Hopf, fazer uma breve introdução às categorias monoidais trançadas, definir módulos de Yetter-Drinfeld e finalizar com a definição de álgebra de Hopf trançada na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld. Observa-se que serão admitidos conhecimentos básicos de categorias monoidais

Mostraremos que as categorias trançadas apresentam vantagens em relação as categorias monoidais que não são. Por exemplo, se uma categoria trançada é tal que todo objeto possui dual à esquerda, então também possui dual à direita, sendo então uma categoria rígida. Outra vantagem será apresentada na última seção, em que a trança fornecerá uma estrutura de álgebra para o produto tensorial de duas álgebras na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld.

Apresentaremos no decorrer do trabalho exemplos de categorias trançadas simétricas e mostraremos que se a álgebra de Hopf H (com antípoda bijetora) não for isomorfa ao corpo K , então a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld é um exemplo de uma categoria trançada não simétrica.

2 Preliminares

Com o objetivo de definir módulos de Yetter-Drinfeld vamos apresentar, de modo sucinto, os seguintes conceitos: K -álgebra, K -coálgebra, biálgebra, álgebra de Hopf, A -módulo,

*carlamtm@gmail.com

C -comódulo, em que K é um corpo, A uma K -álgebra e C é uma K -coálgebra, respectivamente.

Uma **K -álgebra** é uma tripla (A, M, u) , em que A é um K -espaço vetorial e $M : A \otimes A \rightarrow A$ e $u : K \rightarrow A$ são morfismos de K -espaços vetoriais de modo que os seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{I_A \otimes M} & A \otimes A \\ \downarrow M \otimes I_A & & \downarrow M \\ A \otimes A & \xrightarrow{M} & A \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & A \otimes A & & \\ & u \otimes I_A \nearrow & & \nwarrow I_A \otimes u & \\ K \otimes A & & & & A \otimes K \\ & \searrow \varphi_l & & \nearrow \varphi_r & \\ & & A & & \end{array}$$

em que $\varphi_l(1_K \otimes a) = 1_K a$ e $\varphi_r(a \otimes 1_K) = a 1_K$, comutam.

Sejam (A, M_A, u_A) e (B, M_B, u_B) K -álgebras. Uma função K -linear $f : A \rightarrow B$ é dita um **morfismo de álgebras** se os diagramas a seguir

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\ \downarrow M_A & & \downarrow M_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & u_A \swarrow \quad \searrow u_B & \\ & K & \end{array}$$

comutam.

Sabemos que se (A, M_A, u_A) e (B, M_B, u_B) são K -álgebras então, em particular são K -espaços vetoriais. Assim, $A \otimes B$ tem estrutura de K -espaço vetorial. Agora, definindo as seguintes funções K -lineares,

$$M_{A \otimes B} = (M_A \otimes M_B)(I_A \otimes \tau \otimes I_B) \text{ e } u_{A \otimes B} = (u_A \otimes u_B)\varphi^{-1},$$

em que, τ é aplicação twist e $\varphi : K \otimes K \rightarrow K$ é o isomorfismo canônico, obtemos que $(A \otimes B, M_{A \otimes B}, u_{A \otimes B})$ é uma K -álgebra.

Dualizando temos:

Uma **K -coálgebra** é uma tripla (C, Δ, ε) em que C é um K -espaço vetorial, $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ e $\varepsilon : C \rightarrow K$ são morfismos de K -espaços vetoriais tais que os seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ \downarrow \Delta & & \downarrow I_{C \otimes \Delta} \\ C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes I_C} & C \otimes C \otimes C \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \varphi_l \swarrow & & \searrow \varphi_r & \\ K \otimes C & & & & C \otimes K \\ & \nwarrow \varepsilon \otimes I_C & & \nearrow I_C \otimes \varepsilon & \\ & & C \otimes C & & \end{array}$$

em que $\varphi_l(1_K \otimes c) = 1_K c$ e $\varphi_r(c \otimes 1_K) = c 1_K$, comutam.

Usando a notação de Sweedler, escrevemos $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2, \forall c \in C$, assim a comutatividade dos diagramas acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} = \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$$

$$c = \sum \varepsilon(c_1)c_2 = \sum c_1\varepsilon(c_2).$$

Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ K -coálgebras. Uma função K -linear $f : C \rightarrow D$ é um **morfismo de coálgebras** se os diagramas a seguir

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ \Delta_C \downarrow & & \downarrow \Delta_D \\ C \otimes C & \xrightarrow{f \otimes f} & D \otimes D \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ \varepsilon_C \searrow & & \swarrow \varepsilon_D \\ & K & \end{array}$$

comutam. Usando a notação de Sweedler, a comutatividade destes diagramas pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\Delta_D f(c) = \sum f(c)_1 \otimes f(c)_2 = \sum f(c_1) \otimes f(c_2) = (f \otimes f)\Delta_C(c)$$

$$\varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c).$$

Além disso, se $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ são K -coálgebras então $C \otimes D$ é uma K -coálgebra com as aplicações lineares:

$$\Delta_{C \otimes D} = (I_C \otimes \tau \otimes I_D)(\Delta_C \otimes \Delta_D) \text{ e } \varepsilon_{C \otimes D} = \varphi(\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D).$$

Unindo estas duas estruturas podemos definir: Um K -espaço vetorial H que possui estruturas de K -álgebra (H, M, u) e K -coálgebra (H, Δ, ε) é dita uma **biálgebra** se Δ e ε são morfismos de álgebras.

Se H_1 e H_2 são biálgebras, dizemos que uma função K -linear $f : H_1 \rightarrow H_2$ é um **morfismo de biálgebras** se f é um morfismo de álgebras e um morfismo de coálgebras com respeito às estruturas de álgebra e de coálgebra de H_1 e H_2 , respectivamente.

Aqui vale observar que Δ e ε são morfismos de álgebras se, e somente se, M e u são morfismos de coálgebras.

Agora vamos relembrar as definições de A -módulo e C -comódulo.

Seja (A, M, u) uma K -álgebra. Um **A-módulo** à esquerda é um par (M, λ) , em que M é um K -espaço vetorial e $\lambda : A \otimes M \rightarrow M$ é um morfismo de K -espaço vetorial tal que os seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes A \otimes M & \xrightarrow{I_A \otimes \lambda} & A \otimes M \\
\downarrow M \otimes I_M & & \downarrow \lambda \\
A \otimes M & \xrightarrow{\lambda} & M
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
& & A \otimes M \\
& \nearrow u \otimes I_M & \downarrow \lambda \\
K \otimes M & & M \\
& \searrow \varphi &
\end{array}$$

comutam.

Seja (C, Δ, ε) uma K -coálgebra. Um **C-comódulo** à esquerda é um par (M, ρ) tal que M é um K -espaço vetorial e $\rho : M \rightarrow C \otimes M$ é um morfismo de K -espaços vetoriais tais que os diagramas abaixo comutam

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{\rho} & C \otimes M \\
\downarrow \rho & & \downarrow \Delta \otimes I_M \\
C \otimes M & \xrightarrow{I_C \otimes \rho} & C \otimes C \otimes M
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
M & & K \otimes M \\
\downarrow \rho & \nearrow \varphi^{-1} & \\
C \otimes M & \xrightarrow{\varepsilon \otimes I_M} &
\end{array}$$

De maneira análoga definimos A -módulos e C -comódulos à direita.

Usando a notação de Sweedler para comódulos, escrevemos $\rho(m) = \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$. Deste modo, a comutatividade dos diagramas acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\sum (m_{(-1)})_1 \otimes (m_{(-1)})_2 \otimes m_{(0)} &= \sum m_{(-1)} \otimes (m_{(0)})_1 \otimes (m_{(0)})_2 \\
\sum \varepsilon(m_{(-1)}) m_{(0)} &= m.
\end{aligned}$$

Sejam A uma K -álgebra e (M, λ_M) , (N, λ_N) A -módulos à esquerda. Uma função K -linear $f : M \rightarrow N$ é dita um **morfismo de A-módulos**, se o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A \otimes M & \xrightarrow{I_A \otimes f} & A \otimes N \\
\downarrow \lambda_M & & \downarrow \lambda_N \\
M & \xrightarrow{f} & N
\end{array}$$

comuta.

Sejam C uma K -coálgebra e (M, ρ_M) , (N, ρ_N) C -comódulos à esquerda. Uma função K -linear $f : M \rightarrow N$ é dita um **morfismo de C-comódulos**, se o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{f} & N \\
\rho_M \downarrow & & \downarrow \rho_N \\
C \otimes M & \xrightarrow{I_C \otimes f} & C \otimes N
\end{array}$$

comuta.

A definição de morfismo de comódulos pode ser escrita por extenso, usando a notação de Sweedler, da seguinte maneira:

$$f(m)_{(-1)} \otimes f(m)_{(0)} = m_{(-1)} \otimes f(m_{(0)}).$$

Sejam M e N H -módulos à esquerda, em que H é uma biálgebra, então $H \otimes M$ tem uma estrutura natural de H -módulo à esquerda dada por:

$$h.(m \otimes n) = h_1.m \otimes h_2.n.$$

O produto tensorial de H -comódulos M e N também tem uma estrutura natural de H -comódulo à esquerda dada por:

$$\rho(m \otimes n) = m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes n_{(0)}.$$

Para finalizar, se f e g são morfismos de H -módulo (H -comódulo), então $f \otimes g$ é morfismo de H -módulo (H -comódulo).

2.1 Álgebra de Hopf

Agora vamos nos encaminhar para a definição de Álgebras de Hopf e para isso definimos a seguir o conceito de álgebra de convolução e antípoda.

Sejam K um corpo, (C, Δ, ε) uma K -coalgebra e (A, M, u) uma K -álgebra. Definimos sobre $Hom(C, A)$ uma estrutura de álgebra, denotada por $*$, definida da seguinte maneira: Sejam $f, g \in Hom(C, A)$ e $c \in C$,

$$(f * g)(c) = M(f \otimes g)\Delta(c) = \sum f(c_1)g(c_2).$$

Sejam $f, g, h \in Hom(C, A)$ e $c \in C$, então

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(c) &= \sum (f * g)(c_1)h(c_2) \\
&= \sum (f(c_{1_1})g(c_{1_2})h(c_2)) \\
&= \sum f(c_1)(g(c_{2_1})h(c_{2_2})) \\
&= \sum f(c_1)(g * h)(c_2) \\
&= (f * (g * h))(c).
\end{aligned}$$

Logo, $*$ é associativa.

A unidade de $\text{Hom}(C, A)$ é a composição $u\varepsilon$. De fato, dados $f \in \text{Hom}(C, A)$ e $c \in C$,

$$\begin{aligned}
(u\varepsilon * f)(c) &= \sum u\varepsilon(c_1)f(c_2) \\
&= \sum u(\varepsilon(c_1)1_K)f(c_2) \\
&= \sum \varepsilon(c_1)u(1_K)f(c_2) \\
&= \sum \varepsilon(c_1)1_A f(c_2) \\
&= \sum \varepsilon(c_1)f(c_2) \\
&= f(\sum \varepsilon(c_1)c_2) \\
&= f(c).
\end{aligned}$$

Mostrando que $u\varepsilon * f = f, \forall f \in \text{Hom}(C, A)$. De modo análogo temos $f * u\varepsilon = f, \forall f \in \text{Hom}(C, A)$. Portanto, $(\text{Hom}(C, A), *, u\varepsilon)$ é uma K -álgebra, denominada **álgebra de convolução**.

Consideramos agora uma biálgebra H e denotamos por H^C e H^A suas estruturas de K -coálgebra e K -álgebra, respectivamente. Deste modo, podemos considerar a estrutura de álgebra de convolução em $\text{Hom}(H^C, H^A)$. Notemos que $I : H \rightarrow H \in \text{Hom}(H^C, H^A)$, pois é um morfismo de K -espaços vetoriais.

Nesse momento podemos definir antípoda e álgebra de Hopf:

Definição 2.1 *Seja H uma biálgebra. Uma função K -linear $S : H \rightarrow H$ é dita uma **antípoda** de H se S for a inversa de I com respeito ao produto de convolução da K -álgebra $\text{Hom}(H^C, H^A)$.*

Definição 2.2 *Uma biálgebra H é dita uma **álgebra de Hopf** se H possui uma antípoda.*

Observamos três fatos essenciais a respeito de álgebras de Hopfs: a antípoda de uma álgebra de Hopf é única, pois é a inversa de I na álgebra de convolução. É claro que nem toda biálgebra é uma álgebra de Hopf. E de $S * I = I * S = u\varepsilon$, segue que

$$\begin{aligned}
S * I(h) &= \sum S(h_1)I(h_2) \\
&= \sum S(h_1)h_2 \\
&= u\varepsilon(h) \\
&= u(\varepsilon(h)1_K) \\
&= \varepsilon(h)u(1_K) \\
&= \varepsilon(h)1_H,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I * S(h) &= \sum I(h_1)S(h_2) \\
&= \sum h_1 S(h_2) \\
&= u\varepsilon(h) \\
&= u(\varepsilon(h)1_K) \\
&= \varepsilon(h)u(1_K) \\
&= \varepsilon(h)1_H.
\end{aligned}$$

Ou ainda, $M(S \otimes I)\Delta = M(I \otimes S)\Delta = u\varepsilon$.

Definição 2.3 *Sejam H e K álgebras de Hopfs. Uma função $f : H \rightarrow K$ é dita um **morfismo de álgebras de Hopf** se for morfismo de biálgebras.*

As propriedades satisfeitas pela antípoda, na próxima proposição, mostram que S é um antimorfismo de álgebras e de coálgebras, respectivamente.

Proposição 2.4 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S . Então são válidas as seguintes afirmações:*

1. $S(hg) = S(g)S(h), \forall g, h \in H$.
2. $S(1_H) = 1_H$.
3. $\Delta(S(h)) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$.
4. $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$.

Demonstração:

1. Consideramos $H \otimes H$ com a estrutura de coálgebra, H com sua estrutura de álgebra e a álgebra de convolução $\text{Hom}(H \otimes H, H)$. A unidade da álgebra de convolução é $u_H \varepsilon_{H \otimes H} = u_H \varphi(\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H) : H \otimes H \rightarrow H$, em que u_H é a multiplicação de H e ε_H é a counidade de H .

Sejam $F, G, M : H \otimes H \rightarrow H$ definidas por

$$F(h \otimes g) = S(g)S(h), \quad G(h \otimes g) = S(hg) \quad \text{e} \quad M(h \otimes g) = hg, \forall h, g \in H.$$

Mostremos que F e G são as inversas à direita e à esquerda de M , respectivamente. Deste modo teremos $F = G = M^{-1}$, e o resultado segue.

$$\begin{aligned}
M * F(h \otimes g) &= \sum M((h \otimes g)_1)F((h \otimes g)_2) \\
&= \sum M(h_1 \otimes g_1)F(h_2 \otimes g_2) \\
&= \sum h_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{S}(\mathbf{g}_2) S(h_2) \\
&= \sum h_1 \varepsilon(\mathbf{g}) \mathbf{1}_H S(h_2) \\
&= \sum \varepsilon(g) 1_H \mathbf{h}_1 \mathbf{S}(\mathbf{h}_2) \\
&= \varepsilon(g) 1_H \varepsilon(\mathbf{h}) \mathbf{1}_H \\
&= \varepsilon(g) \varepsilon(h) 1_H \\
&= \varepsilon(h) \varepsilon(g) 1_H \\
&= \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g) 1_H \\
&= \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g) u(1_K) \\
&= u(\varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g) 1_K) \\
&= u(\varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g))
\end{aligned}$$

.

Também,

$$\begin{aligned}
G * M(h \otimes g) &= \sum G((h \otimes g)_1)M((h \otimes g)_2) \\
&= \sum G(h_1 \otimes g_1)M(h_2 \otimes g_2) \\
&= \sum S(h_1 g_1) h_2 g_2 \\
&= \sum S((hg)_1) (hg)_2 \\
&= \varepsilon(hg) 1_H \\
&= \varepsilon(h) \varepsilon(g) 1_H \\
&= \varepsilon(h) \varepsilon(g) u(1_K) \\
&= \varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g) u(1_K) \\
&= u(\varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g) 1_K) \\
&= u(\varepsilon_{H \otimes H}(h \otimes g))
\end{aligned}$$

.

Logo, $M * F = G * M = u_H \varepsilon_{H \otimes H}$ e o resultado segue.

2. Como Δ é morfismo de álgebra temos $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$. Logo,

$$S(1_H) 1_H = \varepsilon(1_H) 1_H = 1_K 1_H = 1_H.$$

Os itens 3 e 4 seguem de forma análoga considerando as funções e estruturas adequadas.

■

3 Categorias Trançadas

Definição 3.1 Uma categoria trançada é uma coleção $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, l, r, c)$, em que $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, l, r)$ é uma categoria monoidal e c é um isomorfismo natural entre os funtores $\otimes$ e $\otimes \tau$, tais que, para quaisquer U, V, W objetos em $\mathcal{C}$, os seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (U \otimes V) \otimes W & \xrightarrow{c_{U \otimes V, W}} & W \otimes (U \otimes V) \\
 & \nearrow a_{U, V, W} & & & \searrow a_{W, U, V} \\
 U \otimes (V \otimes W) & & & & (W \otimes U) \otimes V \\
 & \searrow I_U \otimes c_{V, W} & & & \nearrow c_{U, W} \otimes I_V \\
 & & U \otimes (W \otimes V) & \xrightarrow{a_{U, W, V}} & (U \otimes W) \otimes V
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U \otimes (V \otimes W) & \xrightarrow{c_{U, V \otimes W}} & (V \otimes W) \otimes U \\
 & \nearrow a_{U, V, W}^{-1} & & & \searrow a_{V, W, U}^{-1} \\
 (U \otimes V) \otimes W & & & & V \otimes (W \otimes U) \\
 & \searrow c_{U, V} \otimes I_W & & & \nearrow I_V \otimes c_{W, U} \\
 & & (V \otimes U) \otimes W & \xrightarrow{a_{V, U, W}^{-1}} & V \otimes (U \otimes W)
 \end{array}$$

comutam.

Os diagramas acima são chamados de axiomas do hexágono 1 e 2, respectivamente. O isomorfismo natural c é chamado de **trança**. Observamos que estamos considerando a como um isomorfismo natural entre os funtores $(- \otimes (- \otimes -))$ e $((- \otimes -) \otimes -)$, l um isomorfismo natural entre os funtores Id e $Id \otimes \mathbb{I}$, e r um isomorfismo natural entre os funtores Id e $\mathbb{I} \otimes Id$.

Notemos que a categoria monoidal $(Set, \times, \{y\}, a, l, r)$ é trivialmente trançada. Para quaisquer conjuntos $U, V \in Set$, basta definirmos

$$c_{U, V} : U \times V \rightarrow V \times U, \quad \text{por} \quad c_{U, V}(u, v) = (v, u).$$

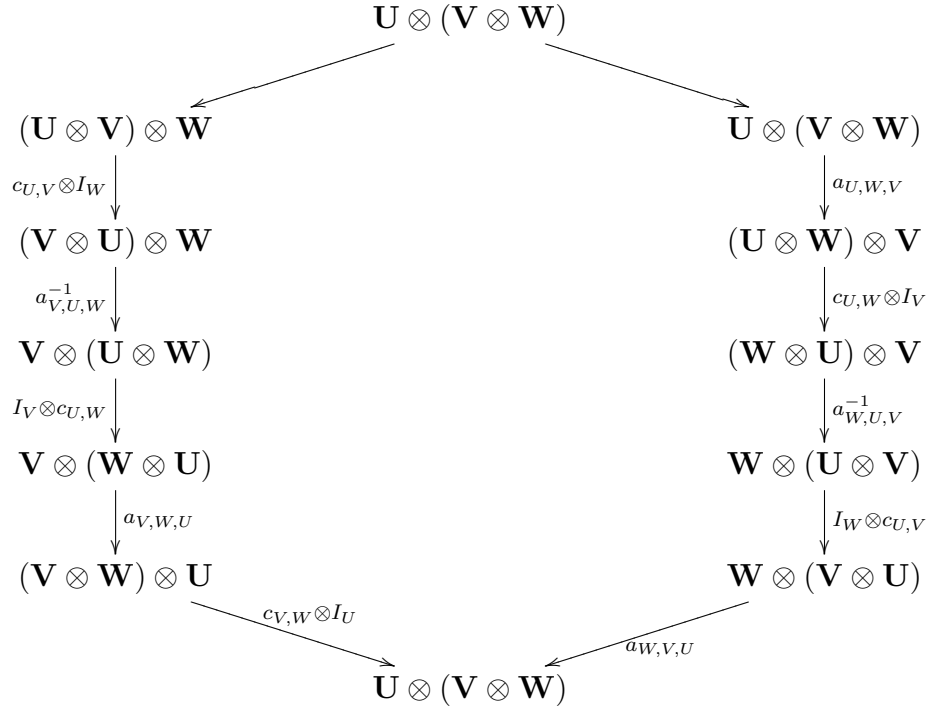
Se R é um anel comutativo, então a categoria $({}_R\mathcal{M}, \otimes, R, a, l, r, c)$, em que

$$c_{U, V} : U \otimes V \rightarrow V \otimes U, \quad c_{U, V}(u \otimes v) = v \otimes u,$$

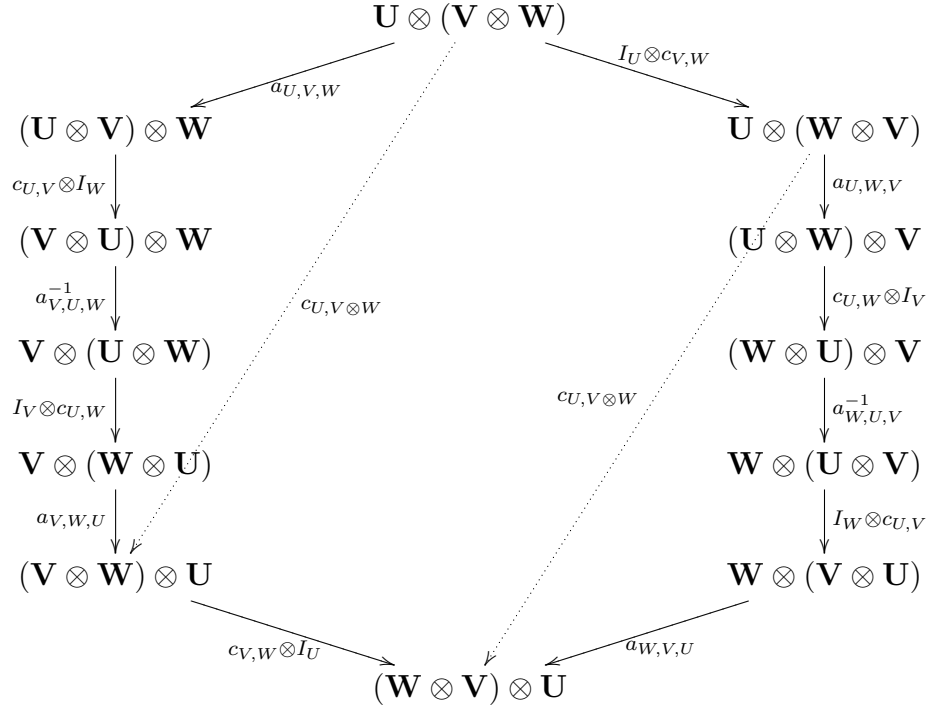
é trançada. Em particular, a categoria dos espaços vetoriais é trançada.

O teorema a seguir mostra como podemos relacionar a associatividade com a trança, no tratamento de três objetos da categoria.

Teorema 3.2 Sejam U, V, W objetos em uma categoria trançada. Então o seguinte diagrama, chamado dodecágono, comuta:



Demonstração: Consideremos as seguintes partições no dodecágono:



Notemos que o triângulo à esquerda comuta, pois é justamente o axioma do hexágono 2 da definição de categoria trançada. O mesmo ocorre com o triângulo à direita, pois é o axioma do hexágono 2, trocando V por W . O paralelogramo comuta pois é o quadrado de naturalidade de c . Portanto o dodecágono comuta. ■

Proposição 3.3 Para qualquer objeto W em uma categoria trançada com unidade $\mathbb{I}$, os diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I} \otimes W & \xrightarrow{c_{\mathbb{I},W}} & W \otimes \mathbb{I} \\ & \nwarrow r_W \quad \nearrow l_W & \\ & W & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} W \otimes \mathbb{I} & \xrightarrow{c_{W,\mathbb{I}}} & \mathbb{I} \otimes W \\ & \nwarrow l_W \quad \nearrow r_W & \\ & W & \end{array}$$

Demonstração: Vamos mostrar que o primeiro diagrama comuta. A maneira de demonstrar o segundo é análoga.

Considere o diagrama a seguir em que V, W são objetos da categoria.

$$\begin{array}{ccccccc} V \otimes (\mathbb{I} \otimes W) & \xrightarrow{a_{V,\mathbb{I},W}} & (V \otimes \mathbb{I}) \otimes W & \xrightarrow{c_{V \otimes \mathbb{I},W}} & W \otimes (V \otimes \mathbb{I}) & & \\ & \searrow I_V \otimes r_W & \uparrow l_V \otimes I_W & & \uparrow I_W \otimes l_V & \searrow a_{W,V,\mathbb{I}} & \\ & \mathbf{2} & & \mathbf{3} & & & \\ & & V \otimes W & \xrightarrow{c_{V,W}} & W \otimes V & & \\ & \swarrow I_V \otimes l_W & \downarrow l_{V \otimes W} & & \downarrow l_{W \otimes V} & \swarrow \mathbf{6} & \\ & \mathbf{4} & & \mathbf{5} & & & \\ V \otimes (W \otimes \mathbb{I}) & \xrightarrow{a_{V,W,\mathbb{I}}} & (V \otimes W) \otimes \mathbb{I} & \xrightarrow{c_{V,W \otimes \mathbb{I}}} & (W \otimes V) \otimes \mathbb{I} & & \end{array}$$

Mostremos inicialmente que o triângulo 1 comuta.

Observemos que o diagrama externo comuta pois trata-se do axioma do hexágono 1, com V e $\mathbb{I}$ nos lugares de U e V , respectivamente. O triângulo 2 comuta pois é o axioma do triângulo de categoria monoidal, já os triângulos 4 e 6 comutam devido ao "axioma do triângulo modificado". 3 e 5 comutam devido as naturalidades de c e l , respectivamente. Temos então

$$\begin{aligned} (c_{V,W} \otimes I_{\mathbb{I}})a_{V,W,\mathbb{I}}(I_V \otimes c_{\mathbb{I},W})(I_V \otimes r_W) &= a_{W,V,\mathbb{I}}(c_{V \otimes \mathbb{I},W})a_{V,\mathbb{I},W}(I_V \otimes r_W) \\ &= a_{W,V,\mathbb{I}}(c_{V \otimes \mathbb{I},W})(l_V \otimes I_W) \\ &= a_{W,V,\mathbb{I}}(I_W \otimes l_V)c_{V,W} \\ &= (l_{W \otimes V})c_{V,W} \\ &= (c_{V,W} \otimes I)l_{V \otimes W} \\ &= (c_{V,W} \otimes I)a_{V,W,\mathbb{I}}(I_V \otimes l_W) \end{aligned}$$

Como $(c_{V,W} \otimes I_{\mathbb{I}})a_{V,W,\mathbb{I}}$ é isomorfismo segue que $(I_V \otimes c_{\mathbb{I},W})(I_V \otimes r_W) = I_V \otimes l_W$. Portanto o diagrama 1 comuta, para todo V .

Consideramos agora o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{I} \otimes (\mathbb{I} \otimes W) & \xrightarrow{I_{\mathbb{I}} \otimes c_{\mathbb{I}, W}} & \mathbb{I} \otimes (W \otimes \mathbb{I}) \\
\uparrow r_{\mathbb{I} \otimes W} & \swarrow I_{\mathbb{I}} \otimes r_W & \nearrow I_{\mathbb{I}} \otimes l_W & \uparrow r_{W \otimes \mathbb{I}} \\
& \mathbb{I} \otimes W & \\
\mathbb{I} \otimes W & \xrightarrow{r_W} & W \otimes \mathbb{I} \\
\uparrow r_W & \nwarrow c_{\mathbb{I}, W} & \nearrow l_W \\
& W &
\end{array}$$

Notemos que as laterais deste prisma comutam devido a naturalidade de r . A tampa comuta pois é justamente o diagrama 1 acima. Deste modo, a base do diagrama comuta, que era justamente o que queríamos provar. ■

Definição 3.4 Uma categoria **simétrica** é uma categoria trançada $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I}, a, l, r, c)$ em que $c_{U,V}c_{V,U} = I_{V \otimes U}$, para quaisquer objetos U e V em $\mathcal{C}$.

Os exemplos de categorias trançadas apresentadas até o momento são trivialmente simétricas.

As categorias trançadas apresentam uma vantagem em relação as categorias monoidais não trançadas: Se um objeto da categoria trançada possui dual à esquerda, então também possui dual à direita e consequentemente é rígida. Relembremos então as definições de dual e categoria rígida, a fim de provar esse resultado.

Definição 3.5 Seja V um objeto em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$. Um **dual à esquerda** de V é uma tripla (V^*, e_V, coe_V) em que V^* é um objeto em $\mathcal{C}$, $e_V : V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{I}$ e $coe_V : \mathbb{I} \rightarrow V \otimes V^*$ são morfismos em $\mathcal{C}$, tais que as composições

$$\begin{aligned}
V &\xrightarrow{r_V} \mathbb{I} \otimes V \xrightarrow{coe_V \otimes I_V} (V \otimes V^*) \otimes V \xrightarrow{a_{V^*, V^*, V}^{-1}} V \otimes (V^* \otimes V) \xrightarrow{I_V \otimes e_V} V \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{l_V^{-1}} V \\
V^* &\xrightarrow{l_V} V^* \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{I_{V^*} \otimes coe_V} V^* \otimes (V \otimes V^*) \xrightarrow{a_{V^*, V, V^*}} (V^* \otimes V) \otimes V^* \xrightarrow{e_V \otimes I_{V^*}} \mathbb{I} \otimes V^* \xrightarrow{r_V^{-1}} V^*
\end{aligned}$$

são I_V e I_{V^*} , respectivamente.

Um **dual à direita** de V é uma tripla $({}^*V, e'_V, coe'_V)$ em que *V é um objeto em $\mathcal{C}$, $e'_V : V \otimes {}^*V \rightarrow \mathbb{I}$ e $coe'_V : \mathbb{I} \rightarrow {}^*V \otimes V$ são morfismos em $\mathcal{C}$, tais que as composições

$$\begin{aligned}
V &\xrightarrow{l_V} V \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{I_V \otimes coe'_V} V \otimes ({}^*V \otimes V) \xrightarrow{a_{V, {}^*V, V}} (V \otimes {}^*V) \otimes V \xrightarrow{e'_V \otimes I_V} \mathbb{I} \otimes V \xrightarrow{r_V^{-1}} V \\
{}^*V &\xrightarrow{r_{{}^*V}} \mathbb{I} \otimes {}^*V \xrightarrow{coe'_V \otimes I_V} ({}^*V \otimes V) \otimes {}^*V \xrightarrow{a_{{}^*V, V, {}^*V}^{-1}} {}^*V \otimes (V \otimes {}^*V) \xrightarrow{I_{{}^*V} \otimes e'_V} {}^*V \otimes \mathbb{I} \xrightarrow{l_{{}^*V}^{-1}} {}^*V
\end{aligned}$$

são I_V e $I_{{}^*V}$, respectivamente.

Definição 3.6 Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Dizemos que $\mathcal{C}$ é uma categoria rígida se todo objeto em $\mathcal{C}$ admite dual à esquerda e à direita.

Teorema 3.7 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria trançada e V um objeto em $\mathcal{C}$. Se V admite dual à esquerda, então V admite dual à direita.*

Demonstração: (Esboço) Seja (V^*, e_V, coe_V) um dual à esquerda de V . Como $\mathcal{C}$ é trançada, existem os isomorfismos naturais

$$c_{V,V^*} : V \otimes V^* \rightarrow V^* \otimes V \text{ e } c_{V^*,V}^{-1} : V \otimes V^* \rightarrow V^* \otimes V.$$

Definimos e'_V e coe'_V da seguinte forma

$$e'_V = e_V c_{V,V^*} \text{ e } coe'_V = c_{V^*,V}^{-1} coe_V.$$

Agora basta verificar que e'_V e coe'_V , assim definidos, satisfazem as composições da definição de dual à direita. ■

4 Módulos de Yetter-Drinfeld

Definição 4.1 *Seja $H = (H, M, u, \Delta, \epsilon, S)$ uma álgebra de Hopf sobre um corpo K . Um K -espaço vetorial M é dito um **módulo de Yetter-Drinfeld** à esquerda sobre H se M é simultaneamente um H -módulo à esquerda e um H -comódulo à esquerda tal que vale a seguinte relação de compatibilidade*

$$(h.m)_{(-1)} \otimes (h.m)_{(0)} = \rho(h.m) = h_1 m_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2.m_{(0)}, \quad \forall h \in H, m \in M.$$

Exemplos de Módulos de Yetter-Drinfeld:

1. Todo K -espaço vetorial V é um módulo de Yetter-Drinfeld. De fato, definimos para $h \in H, v \in V$

$$\begin{aligned} h.v &= \epsilon(h)v, \\ \rho(v) &= 1_H \otimes v = v_{(-1)} \otimes v_{(0)}. \end{aligned}$$

Com essa ação e coação, V é H -módulo e H -comódulo, respectivamente. Mostremos que é válida a relação de compatibilidade.

Notemos que,

$$\rho(h.v) = \rho(\epsilon(h)v) = \epsilon(h)\rho(v) = \epsilon(h)1_H \otimes v$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} h_1 v_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2.v_{(0)} &= h_1 1_H S(h_3) \otimes h_2.v \quad \text{def de } \rho \\ &= h_1 S(h_3) \otimes \epsilon(h_2)v \\ &= h_1 S(\epsilon(h_2)h_3) \otimes v \\ &= h_1 S(h_2) \otimes v \\ &= \epsilon(h)1_H \otimes v. \end{aligned}$$

Provando que V é um módulo de Yetter-Drinfeld.

2. Seja H álgebra de Hopf. Definimos em H a ação e a coação, respectivamente, por:

$$h.x := (I_H \otimes S)\Delta(h)(x \otimes 1_H) = h_1 x S(h_2) \text{ e } \rho(x) := \Delta(x) = x_1 \otimes x_2, \quad \forall x, h \in H.$$

Mostremos que $(H, .)$ é H -módulo. Sejam $h, g, x \in H$, então

$$\begin{aligned} h.(g.x) &= h.(g_1 x S(g_2)) \\ &= h_1 g_1 x S(g_2) S(h_2) \\ &= h_1 g_1 x S(h_2 g_2) \\ &= h_1 g_1 x S((hg)_2) \\ &= (hg)_1 x S((hg)_2) \\ &= (hg).x \end{aligned}$$

e

$$1_H.x = 1_H x S(1_H) = 1_H x 1_H = x, \quad \text{pois } \Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H.$$

Mostremos agora que $(H, \rho = \Delta)$ é H -comódulo. Seja $x \in H$, então

$$\begin{aligned} (I_H \otimes \rho)\rho(x) &= (I_H \otimes \rho)(x_1 \otimes x_2) \\ &= x_1 \otimes x_{2_1} \otimes x_{2_2} \\ &= x_{1_1} \otimes x_{1_2} \otimes x_2 \\ &= (\Delta \otimes I_H)(x_1 \otimes x_2) \\ &= (\Delta \otimes I_H)\rho(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi(\epsilon \otimes I_H)\rho(x) &= \varphi(\epsilon \otimes I_H)(x_1 \otimes x_2) \\ &= \epsilon(x_1)x_2 \\ &= x. \end{aligned}$$

Finalmente verifiquemos a validade da relação de compatibilidade. Sejam $h, x \in H$,

$$\begin{aligned} \rho(h.x) &= \rho(h_1 x S(h_2)) \\ &= (h_1 x S(h_2))_1 \otimes (h_1 x S(h_2))_2 \\ &= h_{1_1} x_1 S(h_2)_1 \otimes h_{1_2} x_2 S(h_2)_2 \\ &= h_{1_1} x_1 S(h_{2_2}) \otimes h_{1_2} x_2 S(h_{2_1}), \text{ pois } S \text{ é um antimorfismo de coálgebras.} \\ &= h_1 x_1 S(h_3) \otimes h_{2_1} x_2 S(h_{2_2}) \\ &= h_1 x_1 S(h_3) \otimes h_2.x_2 \\ &= h_1 x_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2.x_{(0)} \end{aligned}$$

Portanto H , com a ação e coação definidas, é um módulo de Yetter-Drinfeld. A ação definida neste exemplo é chamada de ação adjunta à esquerda de H sobre si mesma.

3. Seja H uma álgebra de Hopf. Então H é um Módulo de Yetter-Drinfeld com as estruturas de H -módulo e H -comódulo dadas por

$$h.x := hx \quad \rho(x) = x_1 S(x_3) \otimes x_2, \quad h, x \in H.$$

A coação definida neste exemplo é chamada de coação coadjunta à esquerda de H sobre si mesma.

Observação 4.2 Denotamos por ${}^H_H\mathcal{YD}$ a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H . Os objetos são os módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H e os morfismos são aqueles que, simultaneamente, são morfismos de H -módulos e de H -comódulos.

Proposição 4.3 Sejam M, N módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H . Então, $M \otimes N$ com as estruturas de H -módulo à esquerda e H -comódulo à esquerda usuais,

$$h.(m \otimes n) = h_1.m \otimes h_2.n$$

$$\rho(m \otimes n) = m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes n_{(0)},$$

é um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H .

Demonstração: Mostremos que é satisfeita a relação de compatibilidade. Sejam $h \in H, m \in M, n \in N$,

$$\begin{aligned} \rho(h.(m \otimes n)) &= \rho(h_1.m \otimes h_2.n) \\ &= (h_1.m)_{(-1)}(h_2.n)_{(-1)} \otimes (h_1.m)_{(0)} \otimes (h_2.n)_{(0)} \\ &= (\lambda_H \otimes I \otimes I)(h_1.m)_{(-1)} \otimes (h_2.n)_{(-1)} \otimes (h_1.m)_{(0)} \otimes (h_2.n)_{(0)} \\ &= (\lambda_H \otimes I \otimes I)(I \otimes \tau \otimes I)(h_1.m)_{(-1)} \otimes (h_1.m)_{(0)} \otimes (h_2.n)_{(-1)} \otimes (h_2.n)_{(0)} \\ &= * \end{aligned}$$

Como M e N são módulos de Yetter-Drinfeld, temos

$$(h_1.m)_{(-1)} \otimes (h_1.m)_{(0)} = h_{11}m_{(-1)}S(h_{13}) \otimes h_{12}.m_{(0)}$$

e

$$(h_2.n)_{(-1)} \otimes (h_2.n)_{(0)} = h_{21}n_{(-1)}S(h_{23}) \otimes h_{22}.n_{(0)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&= * \\
&= (\lambda_H \otimes I \otimes I)(I \otimes \tau \otimes I)h_{1_1}m_{(-1)}S(h_{1_3}) \otimes h_{1_2}.m_{(0)} \otimes h_{2_1}n_{(-1)}S(h_{2_3}) \otimes h_{2_2}.n_{(0)} \\
&= (\lambda_H \otimes I \otimes I)h_{1_1}m_{(-1)}S(h_{1_3}) \otimes h_{2_1}n_{(-1)}S(h_{2_3}) \otimes h_{1_2}.m_{(0)} \otimes h_{2_2}.n_{(0)} \\
&= h_{1_1}m_{(-1)}S(h_{1_3})h_{2_1}n_{(-1)}S(h_{2_3}) \otimes h_{1_2}.m_{(0)} \otimes h_{2_2}.n_{(0)} \\
&= h_{1_1}m_{(-1)}\mathbf{S}(\mathbf{h}_{3_1})\mathbf{h}_{3_2}n_{(-1)}S(h_5) \otimes h_2.m_{(0)} \otimes h_4.n_{(0)} \\
&= h_{1_1}m_{(-1)}\epsilon(\mathbf{h}_3)n_{(-1)}S(h_5) \otimes h_2.m_{(0)} \otimes h_4.n_{(0)} \\
&= h_{1_1}m_{(-1)}n_{(-1)}S(h_5) \otimes \epsilon(\mathbf{h}_3)h_2.m_{(0)} \otimes h_4.n_{(0)} \\
&= h_{1_1}m_{(-1)}n_{(-1)}S(h_5) \otimes h_2.m_{(0)} \otimes \epsilon(\mathbf{h}_3)h_4.n_{(0)} \\
&= h_{1_1}m_{(-1)}n_{(-1)}S(h_4) \otimes h_2.m_{(0)} \otimes \epsilon(\mathbf{h}_{3_1})h_{3_2}.n_{(0)} \\
&= h_{1_1}m_{(-1)}n_{(-1)}S(h_4) \otimes h_2.m_{(0)} \otimes \mathbf{h}_3.n_{(0)} \\
&= h_{1_1}m_{(-1)}n_{(-1)}S(h_3) \otimes h_{2_1}.m_{(0)} \otimes h_{2_2}.n_{(0)} \\
&= h_{1_1}m_{(-1)}n_{(-1)}S(h_3) \otimes h_2.(m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \\
&= h_1(m \otimes n)_{(-1)}S(h_3) \otimes h_2.(m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \\
&= h_1(m \otimes n)_{(-1)}S(h_3) \otimes h_2.(m \otimes n)_{(0)}.
\end{aligned}$$

Portanto $M \otimes N$ é um módulo de Yetter-Drinfeld. ■

Teorema 4.4 *Seja H uma álgebra de Hopf. Então ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria monoidal.*

Demonstração: Consideramos $\otimes = \otimes_K$. Pela proposição anterior, se $M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}$, então $M \otimes N \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Pela primeira seção deste trabalho temos que se $f, g \in {}^H_H\mathcal{YD}$, então $f \otimes g \in {}^H_H\mathcal{YD}$.

Definimos $\mathbb{I} := K$. Isso é possível pois, já vimos que, todo K -espaço vetorial é um módulo de Yetter-Drinfeld.

Além disso, basta definir os isomorfismos naturais a , l e r de modo trivial, ou seja, para quaisquer $M, N, P \in {}^H_H\mathcal{YD}$, definimos

$$\begin{aligned}
a_{M,N,P} &: M \otimes (N \otimes P) \rightarrow (M \otimes N) \otimes P, \\
l_M &: M \rightarrow M \otimes K \quad \text{e} \quad r_M : M \rightarrow K \otimes M,
\end{aligned}$$

por $a_{M,N,P}(m \otimes (n \otimes p)) = (m \otimes n) \otimes p$, $l_M(m) = m \otimes 1$ e $r_M(m) = 1 \otimes m$. ■

Teorema 4.5 *Seja H uma álgebra de Hopf. Para quaisquer $M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}$ a função $c_{M,N} : M \otimes N \rightarrow N \otimes M$ tal que $c_{M,N}(m \otimes n) = m_{(-1)}.n \otimes m_{(0)}$ é um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração: Mostremos que $c_{M,N}$ é morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Sejam $h \in H, m \in M$ e $n \in N$. Então

$$\begin{aligned}
c_{M,N}(h.(m \otimes n)) &= c_{M,N}(h_1.m \otimes h_2.n) \\
&= (h_1.m)_{(-1)}.(h_2.n) \otimes (h_1.m)_{(0)} \\
&= (h_{1_1}m_{(-1)}S(h_{1_3})).(h_2.n) \otimes h_{1_2}.m_{(0)} \\
&= (h_1m_{(-1)}S(h_3)).(h_4.n) \otimes h_2.m_{(0)} \\
&= (h_1m_{(-1)}\mathbf{S}(\mathbf{h}_3)\mathbf{h}_4).n \otimes h_2.m_{(0)} \\
&= (h_1m_{(-1)}\epsilon(\mathbf{h}_3)\mathbf{1}_H).n \otimes h_2.m_{(0)} \\
&= (h_1m_{(-1)}).n \otimes (\epsilon(\mathbf{h}_3)\mathbf{h}_2).m_{(0)} \\
&= (h_1m_{(-1)}).n \otimes \mathbf{h}_2.m_{(0)} \\
&= h_1.(m_{(-1)}.n) \otimes h_2.m_{(0)} \\
&= h.(m_{(-1)}.n \otimes m_{(0)}) \\
&= h.c_{M,N}(m \otimes n).
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\rho c_{M,N}(m \otimes n) &= \rho(m_{(-1)}.n \otimes m_{(0)}) \\
&= (m_{(-1)}.n)_{(-1)}(m_{(0)})_{(-1)} \otimes (m_{(-1)}.n)_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(0)} \\
&= (\mathbf{m}_{(-1)})_1\mathbf{n}_{(-1)}\mathbf{S}((\mathbf{m}_{(-1)})_3)(m_{(0)})_{(-1)} \otimes m_{(-1)}.n_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(0)} \\
&= m_{(-4)}n_{(-1)}S(m_{(-2)})m_{(-1)} \otimes m_{(-3)}.n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= m_{(-3)}n_{(-1)}S((m_{(-1)})_1)(m_{(-1)})_2 \otimes m_{(-2)}.n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= m_{(-3)}n_{(-1)}\epsilon(\mathbf{m}_{(-1)})\mathbf{1} \otimes m_{(-2)}.n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= m_{(-3)}n_{(-1)} \otimes \epsilon(\mathbf{m}_{(-1)})m_{(-2)}.n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= m_{(-2)}n_{(-1)} \otimes \epsilon((\mathbf{m}_{(-1)})_2)(\mathbf{m}_{(-1)})_1.n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= m_{(-2)}n_{(-1)} \otimes (\mathbf{m}_{(-1)}).n_{(0)} \otimes m_{(0)} \\
&= m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes (m_{(0)})_{(-1)}.n_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(0)} \\
&= (I \otimes c_{M,N})(m_{(-1)}n_{(-1)} \otimes m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \\
&= (I \otimes c_{M,N})\rho(m \otimes n).
\end{aligned}$$

Logo, para quaisquer $M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}$, $c_{M,N}$ é morfismo de H -módulos e de H -comódulos e portanto um morfismo em ${}^H_H\mathcal{YD}$. ■

Proposição 4.6 Considere os funtores $\otimes, \otimes\tau : {}^H_H\mathcal{YD} \times {}^H_H\mathcal{YD} \rightarrow {}^H_H\mathcal{YD}$. Então a coleção $\{c_{M,N} : M \otimes N \rightarrow N \otimes M\}_{M,N \in {}^H_H\mathcal{YD}}$ define uma transformação natural $c : \otimes \rightarrow \otimes\tau$.

Demonstração: Sejam $(M, N), (M', N') \in {}^H_H\mathcal{YD} \times {}^H_H\mathcal{YD}$ e $(f, g) : (M, N) \rightarrow (M', N')$ um morfismo. Mostremos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
M \otimes N & \xrightarrow{c_{M,N}} & N \otimes M \\
f \otimes g \downarrow & & \downarrow g \otimes f \\
M' \otimes N' & \xrightarrow{c_{M',N'}} & N' \otimes M'
\end{array}$$

comuta.

Sejam $m \in M, n \in N$, então

$$\begin{aligned}
(g \otimes f)c_{M,N}(m \otimes n) &= (g \otimes f)(m_{(-1)}.n \otimes m_{(0)}) \\
&= g(m_{(-1)}.n) \otimes f(m_{(0)}) \\
&= m_{(-1)}g(n) \otimes f(m_{(0)}) \\
&= f(m)_{(-1)}g(n) \otimes f(m)_{(0)} \\
&= c_{M',N'}(f(m) \otimes g(n)) \\
&= c_{M',N'}(f \otimes g)(m \otimes n).
\end{aligned}$$

■

Proposição 4.7 *Sejam H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora e $M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Então o morfismo $c_{M,N}$ é inversível em ${}^H_H\mathcal{YD}$.*

Demonstração: Sejam $M, N \in {}^H_H\mathcal{YD}$, definimos $d_{M,N} : N \otimes M \rightarrow M \otimes N$ por

$$d_{M,N}(n \otimes m) = m_{(0)} \otimes S^{-1}(m_{(-1)}.n).$$

Afirmamos que $d_{M,N}$ é inversa de $c_{M,N}$. De fato, sejam $m \in M, n \in N$,

$$\begin{aligned}
d_{M,N}c_{M,N}(m \otimes n) &= d_{M,N}(m_{(-1)}.n \otimes m_{(0)}) \\
&= m_{(0)(0)} \otimes S^{-1}((m_{(0)})_{(-1)}).(m_{(-1)}.n) \\
&= m_{(0)} \otimes S^{-1}(m_{(-1)}).(m_{(-2)}.n) \\
&= m_{(0)} \otimes S^{-1}(m_{(-1)})(m_{(-2)})n \\
&= m_{(0)} \otimes S^{-1}(m_{(-1)_2})(m_{(-1)_1}).n \\
&= *
\end{aligned}$$

Como S é a antípoda temos $S(h_1)h_2 = \epsilon(h)1_H, \forall h \in H$, logo $S(h_1)S(S^{-1}(h_2)) = \epsilon(h)1_H$. Assim, pelo fato de S ser antimorfismo de álgebras, segue que $S(S^{-1}(h_2)h_1) = \epsilon(h)1_H$ e portanto aplicando S^{-1} temos

$$S^{-1}(h_2)h_1 = \epsilon(h)1_H.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
* &= m_{(0)} \otimes (\epsilon(m_{(-1)})1_H).n \\
&= \epsilon(m_{(-1)})m_{(0)} \otimes n \\
&= m \otimes n.
\end{aligned}$$

De forma análoga $c_{M,N}d_{M,N}(m \otimes n) = m \otimes n$.

Logo $d_{M,N} = c_{M,N}^{-1}$ e como $c_{M,N}$ é morfismo de H -módulo e de H -comódulo segue que $c_{M,N}^{-1}$ também é. ■

Teorema 4.8 *Se H é álgebra de Hopf com antípoda bijetora, então $({}^H_H\mathcal{YD}, \otimes_K, K, a, l, r, c)$ é categoria trançada, em que*

$$\begin{aligned}
a_{M,N,P} : M \otimes (N \otimes P) &\rightarrow (M \otimes N) \otimes P \\
m \otimes (n \otimes p) &\mapsto (m \otimes n) \otimes p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_M : M &\rightarrow M \otimes K & r_M : M &\rightarrow M \otimes K \\
m &\mapsto m \otimes 1 & m &\mapsto 1 \otimes m
\end{aligned}$$

Demonstração: É claro que a, l, r são isomorfismos naturais. Verifiquemos que c satisfaz o primeiro axioma do hexágono.

$$\begin{aligned}
a_{P,M,N}(c_{M \otimes N, P})a_{M,N,P}(m \otimes (n \otimes p)) &= a_{P,M,N}(c_{M \otimes N, P})((m \otimes n) \otimes p) \\
&= a_{P,M,N}((m \otimes n)_{(-1)}.p \otimes (m \otimes n)_{(0)}) \\
&= a_{P,M,N}((m_{(-1)}n_{(-1)}) \cdot p \otimes (m_{(0)} \otimes n_{(0)})) \\
&= ((m_{(-1)}n_{(-1)}) \cdot p \otimes m_{(0)}) \otimes n_{(0)}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(c_{M, P \otimes I_N})a_{M,P,N}(I_M \otimes c_{N,P})(m \otimes (n \otimes p)) &= (c_{M, P \otimes I_N})a_{M,P,N}(m \otimes (n_{(0)}.p \otimes n_{(0)})) \\
&= (c_{M, P \otimes I_N})((m \otimes n_{(0)}.p) \otimes n_{(0)}) \\
&= ((m_{(-1)}n_{(-1)}) \cdot p \otimes m_{(0)}) \otimes n_{(0)}.
\end{aligned}$$

A verificação de que o segundo axioma do hexágono comuta é análogo.

Portanto $({}^H_H\mathcal{YD}, \otimes_K, K, a, l, r, c)$ é categoria trançada. ■

Teorema 4.9 *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora e tal que ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma categoria simétrica. Então $H \cong K$.*

Demonstração:

Consideremos $M := H$ com a ação $h.v = h_1 x S(h_2)$ e com a coação $\rho(v) = x_1 \otimes x_2$, e $N := H$ com $h.x = hx$ e $\rho(x) = x_1 S(x_3) \otimes x_2$, $\forall x, h \in H$.

Já vimos que M e N são módulos de Yetter-Drinfeld e assim como, por hipótese, ${}^H_H\mathcal{YD}$ é categoria simétrica, segue que

$$(c_{M,N}c_{N,M})(1_H \otimes x) = 1_H \otimes x, \forall x \in M.$$

No entanto, usando a definição da trança e as ações e coações de M e N , obtemos:

$$\begin{aligned} c_{M,N}c_{N,M}(1_H \otimes x) &= c_{M,N}((1_H)_{(-1)}.x \otimes (1_H)_{(0)}) \\ &= c_{M,N}(1_H S(1_H).x \otimes 1_H) \\ &= c_{M,N}(x \otimes 1_H) \\ &= x_{(-1)}.1_H \otimes x_{(0)} \\ &= x_1.1_H \otimes x_2 \\ &= x_1 1_H \otimes x_2 \\ &= x_1 \otimes x_2. \end{aligned}$$

Logo, $1_H \otimes x = x_1 \otimes x_2$, $\forall x \in M$.

Aplicando $(I_H \otimes \epsilon)$ em $1_H \otimes x = x_1 \otimes x_2$, temos

$$1_H \otimes \epsilon(x) = x_1 \otimes \epsilon(x_2) = x_1 \epsilon(x_2) \otimes 1_H = x \otimes 1_H.$$

Deste modo, $1_H \epsilon(x) = x 1_H$, $\forall x \in M = H$, e assim, concluímos que $x \in K 1_H \cong K$.

■

Em outras palavras, o teorema está nos dizendo que se H não é isomorfa à K , então a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld é um exemplo de uma categoria que não é simétrica.

5 Álgebras de Hopf trançadas em ${}^H_H\mathcal{YD}$

Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora, e ${}^H_H\mathcal{YD}$ a categoria trançada dos módulos de Yetter-Drinfeld. Consideramos (S, m_S, μ_S) , (R, m_R, μ_R) álgebras em ${}^H_H\mathcal{YD}$, então é possível definir uma estrutura de álgebra em $R \otimes S$, através da trança $c_{S,R}$, da seguinte maneira:

$$m_{R \otimes S} := (m_R \otimes m_S)(I_R \otimes c_{S,R} \otimes I_S) \quad \text{e} \quad \mu_{R \otimes S} := (\mu_R \otimes \mu_S)l_K.$$

Uma simples verificação mostra que, de fato, $(R \otimes S, m_{R \otimes S}, \mu_{R \otimes S})$ é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Esta álgebra é denotada por $R \underline{\otimes} S$.

Isto motiva as seguintes definições:

Definição 5.1 Uma biálgebra trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma coleção $(R, m, \mu, \Delta, \epsilon)$ em que $(R, m, \mu, \cdot)$ é uma álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, (R, Δ, ϵ) é uma coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, $\Delta : R \rightarrow R \otimes R$ e $\epsilon : R \rightarrow K$ são morfismos de álgebras.

Definição 5.2 Seja R uma biálgebra trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Dizemos que R é uma álgebra de Hopf trançada de ${}^H_H\mathcal{YD}$ se existe um morfismo K -linear $S : R \rightarrow R$ que é o inverso do morfismo identidade, segundo o produto de convolução, na álgebra $\text{Hom}(R, R)$. S é chamado de antípoda.

Referências

- [1] S. DASCALESCU; C. NASTASESCU; S. RAIANU. **Hopf Algebras: An Introduction**. New York: Marcel Dekker, 2001.
- [2] ANDRADE, G. S. **Coálgebras, Comódulos e o Teorema de Maschke para Álgebras de Hopf**. 2013. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Matemática)-Departamento de Matemática, Universidade Ferderal de Santa Catarina, Santa Catarina.
- [3] PINTER, S. R. **Álgebras de Hopf trançadas**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Departamento de Matemática, Universidade Ferderal de Santa Catarina, Santa Catarina.