Coanéis e Comódulos
Lista de Exercícios 1

Algumas técnicas categóricas

1) Considere os funtores $\mathcal{C} \overset{F}{\underset{G}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$ e $\mathcal{D} \overset{H}{\underset{K}{\rightrightarrows}} \mathcal{E}$ e as transformações naturais $\alpha : F \Rightarrow G$ e $\beta : H \Rightarrow K$. Mostre que $\beta * \alpha : (H \circ F) \Rightarrow (K \circ G)$ é uma transformação natural.

2) Sejam os funtores $F_1, F_2, F_3 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G_1, G_2, G_3 : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ e as transformações naturais $\alpha_1 : F_1 \Rightarrow F_2$, $\alpha_2 : F_2 \Rightarrow F_3$, $\beta_1 : G_1 \Rightarrow G_2$, $\beta_2 : F_2 \Rightarrow F_3$. Mostre que $(\beta_2 \circ \beta_1) * (\alpha_2 \circ \alpha_1) = (\beta_2 * \alpha_2) \circ (\beta_1 * \alpha_1)$.

3) Um par de funtores $\mathcal{C} \overset{F}{\underset{G}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ é dito ser uma adjunção se existirem transformações naturais $\nu : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$, chamada unidade e $\zeta : FG \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, chamada counidade, tais que, para todo objeto $A \in \mathcal{C}$ e todo objeto $B \in \mathcal{D}$ tenhamos

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(\nu_A)"] \arrow[dr, "F(A)"'] & FGF(A) \arrow[d, "\zeta_{F(A)}"] \\ & F(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(B) \arrow[r, "\nu_{G(B)}"] \arrow[dr, "G(B)"'] & GFG(B) \arrow[d, "G(\zeta_B)"] \\ & G(B) \end{tikzcd}$$

Mostre que um par de funtores como acima é uma adjunção se, e somente se existe um isomorfismo natural

$$\phi : \mathcal{D}(F(\_), \_) \Rightarrow \mathcal{C}(\_, G(\_))$$

sendo estes dois funtores definidos de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ para a categoria dos conjuntos. Dizemos quando temos uma adjunção que o funtor F é adjunto à esquerda do funtor G, ou que o funtor G é adjunto à direita do funtor F.

4) Um par de funtores $\mathcal{C} \overset{F}{\underset{G}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ é uma equivalência categórica se, para cada objeto A em $\mathcal{C}$ e B em $\mathcal{D}$ temos que $GF(A) \cong A$ e $FG(B) \cong B$. Mostre que um par de funtores acima é uma equivalência, se, e somente se, o funtor F satisfizer às condições:

(i) F é essencialmente sobrejetivo, isto é, para qualquer objeto $B \in \mathcal{D}$ existe um objeto $A \in \mathcal{C}$ tal que $B \cong F(A)$.

(ii) F é fiel, isto é, para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ a aplicação $F : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(F(A), F(B))$ é injetiva.

(iii) F é pleno, ou cheio, isto é, para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ a aplicação $F : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(F(A), F(B))$ é sobrejetiva.

5) Considere uma adjunção $\mathcal{C} \overset{F}{\underset{G}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ com unidade ν e counidade ζ.

a) Mostre que se a unidade ν for um isomorfismo, então o funtor F é fiel e pleno.

b) Mostre que se a counidade ζ for um isomorfismo, então o funtor G é fiel e pleno.

c) Mostre que a adjunção é uma equivalência categórica se, e somente se, tanto a unidade como a counidade forem isomorfismos.

6) Considere uma adjunção $\mathcal{C} \overset{F}{\underset{G}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$.

a) Mostre que o funtor F preserva epimorfismos e G preserva monomorfismos.

b) Mostre que o funtor F preserva colimites e G preserva limites.

7) Mostre que o par de funtores $\underline{\text{Set}} \underset{U}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftarrows}} \underline{\text{Grp}}$, é uma adjunção, onde $\underline{\text{Set}}$ é a categoria dos conjuntos, $\underline{\text{Grp}}$ é a categoria dos grupos, o funtor $\mathcal{F}$ associa a cada conjunto X o grupo livre $\mathcal{F}(X)$ e o funtor U é o funtor esquecimento.

8) (relação Hom-tensor) Considere um anel R e um R-módulo à esquerda M, em particular M é um grupo abeliano.

a) Mostre que, para todo grupo abeliano P, o conjunto das aplicações aditivas entre o R módulo M e P, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, P)$, tem a estrutura de um R-módulo à direita, cma ação à direita de R dada por $(f \cdot r)(m) = f(r \cdot m)$.

b) Mostre que temos um funtor covariante

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \_) : \underline{\mathrm{Ab}} \to \mathcal{M}_R.$$

c) Mostre que o funtor produto tensorial

$$\_ \otimes_R M : \mathcal{M}_R \to \underline{\mathrm{Ab}}.$$

é um adjunto à esquerda de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \_)$. O que se tem que mostrar é que para cada R-módulo à direita N e qualquer grupo abeliano P existe um isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N \otimes_R M, P) \cong \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, P)).$$

e que este isomorfismo é natural tanto em N quanto em P.

d) Determine a unidade e a counidade desta adjunção.

9) (Teorema de reciprocidade de Frobenius) Dados, um grupo G e um subgrupo $H \leq G$,

a) Verifique que qualquer kG-módulo W pode ser visto naturalmente como um kH módulo, denotemo-lo por $(W)_H$.

b) Mostre que temos um funtor covariante $(\_)_H : {}_{kG}\mathcal{M} \to {}_{kH}\mathcal{M}$.

c) Mostre que, dado um kH-módulo V podemos construir um kG-módulo a partir dele fazendo-se o produto tensorial $(V)^G = kG \otimes_{kH} V$.

d) Mostre que temos um funtor covariante $(\_)^G : {}_{kH}\mathcal{M} \to {}_{kG}\mathcal{M}$.

e) Verifique o isomorfismo de k espaços vetoriais

$${}_{kG}\mathrm{Hom}((V)^G, W) \cong {}_{kH}\mathrm{Hom}(V, (W)_H)$$

dado da seguinte maneira: Para cada morfismo de kG-módulos $F : (V)^G \to W$ associamos a aplicação $F^\flat : V \to (W)_H$ definida por $F^\flat(v) = F(e \otimes v)$ (verifique que de fato $F^\flat$ é um morfismo de kH-módulos). De outro lado, para cada morfismo de kH-módulos $f : V \to (W)_H$, associamos a aplicação $f^\sharp : (V)^G \to W$ dada por $f^\sharp(\sum_{g \in G} a_g g \otimes v) = \sum_{g \in G} a_g g \cdot f(v)$ (de novo, verifique que isto define um morfismo de kG-módulos). Finalmente, verifique que as aplicações $\flat$ e $\sharp$ são mutuamente inversas.

f) Verifique que este é um isomorfismo natural tanto em V como em W, e portanto o funtor $(\_)^G$ é o adjunto à esquerda de $(\_)_H$.

g) Determine a unidade e a counidade desta adjunção.