Coanéis e Comódulos
Lista de Exercícios 2

1) Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. Mostre que um objeto $A \in \mathcal{C}$ é uma álgebra, se, e somente se, o funtor $A \otimes \_\_ : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ for uma mônada.

2) Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. Mostre que um objeto $C \in \mathcal{C}$ é uma coálgebra, se, e somente se, o funtor $C \otimes \_\_ : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ for uma comônada.

3) (Elemento nulo em um produto tensorial) Seja R um anel com unidade, $N \in {}_R\mathcal{M}$ e $M \in \mathcal{M}_R$. Sejam ainda $\{n_i\}_{i \in I}$ uma família de geradores para N e $\{m_i\}$ uma família de elementos de M tais que $m_i = 0$ a menos de um número finito de índices. Mostre que se a soma finita

$$\sum_{i \in I} m_i \otimes n_i = 0$$

no produto tensorial $M \otimes_R N$, se, e somente se, existe uma família finita $\{a_j\}_{j \in J} \subseteq M$ e uma família $\{r_{ji}\}_{(j,i) \in J \times I} \subseteq R$ satisfazendo

(i) $r_{ji} \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de índices $(j, i) \in J \times I$.

(ii) $\sum_{i \in I} r_{ji} \cdot n_i = 0$ para todo $j \in J$.

(iii) $m_i = \sum_{j \in J} a_j \cdot r_{ji}$.

4) Considere R um anel com unidade, não necessariamente comutativo. Considere um R-módulo à direita L e uma sequência exata de R módulos à esquerda

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

Mostre que a sequência

$$L \otimes_R M \xrightarrow{L \otimes_R f} L \otimes_R N \xrightarrow{L \otimes_R g} L \otimes_R P \to 0$$

é exata.

5) **Pull backs:** Considere uma categoria $\mathcal{C}$ e um par de morfismos $f : A \to C$ e $g : B \to C$, um pull back de f e g é uma tripla (D, α, β), onde D é um objeto na categoria $\mathcal{C}$, e $\alpha : D \to A$ e $\beta : D \to B$ são morfismos tais que $f \circ \alpha = g \circ \beta$ e satisfazendo à seguinte propriedade universal: Para qualquer par de morfismos $h : X \to A$ e $k : X \to B$ tais que $f \circ h = g \circ k$ existe um único morfismo $\phi : X \to D$ tal que $h = \alpha \circ \phi$ e $k = \beta \circ \phi$. A propriedade universal de um pull back é descrita diagramaticamente como

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\phi"] \arrow[drr, "h"] \arrow[ddr, "k"'] & & \\
& D \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

a) Mostre que, se existir, só existe um pull back para o par de morfismos f e g.

b) Mostre que, dado um anel R, sempre existem pull-backs nas categorias ${}_R\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_R$ e ${}_R\mathcal{M}_R$.

c) Descreva equalizadores e kernels como pull backs.

d) Mostre que se g (resp. f) for monomorfismo, então α (resp. β) também o é.

e) Mostre que se g (resp. f) for epimorfismo, então α (resp. β) também o é (faça só na categoria de R módulos, onde epimorfismos são sobrejetivos).

f) Mostre que se o quadrado à direita no diagrama abaixo, na categoria ${}_R\mathcal{M}$ for um pull back, então as linhas são exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & P \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[d, "f_2"] \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f_1"'] & M
\end{tikzcd}$$

onde $K = \mathrm{Ker}(f_1)$.

g) Considere o monomorfismo $f_1 : M_1 \to M$ na categoria ${}_R\mathcal{M}$. Mostre que o quadrado à esquerda no diagrama abaixo é um pull back, se e somente se as linhas são exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P \arrow[r, "h_2"'] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "\pi\circ f_2"] \arrow[d, "f_2"] & M/M_1 \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f_1"'] & M \arrow[r, "\pi"'] & M/M_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Neste caso, se f_2 é epimorfismo, também $\pi \circ f_2$ também o será.

6) Utilize os resultados do item anterior para provar que para quaisquer R módulos M_1 e M_2, temos o seguinte diagrama comutativo de linhas exatas com as inclusões e projeções canônicas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \cap M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_2/(M_1 \cap M_2) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & M_1 + M_2 \arrow[r] & (M_1 + M_2)/M_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

7) Seja R um anel $L \in \mathcal{M}_R$, uma sequência exata em ${}_R\mathcal{M}$,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é dita ser L-pura se a sequência

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \otimes_R M \arrow[r, "L\otimes_R f"] & L \otimes_R N \arrow[r, "L\otimes_R g"] & L \otimes_R P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

também é exata. Uma sequência exata é dita pura se for L-pura para todo L. Um sub-módulo ${}_RM \leq {}_RN$ é dito ser puro se a sequência exata

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\imath"] & N \arrow[r, "\pi"] & N/M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

for pura. Sejam $f : M_1 \to M_2$ e $g : N_1 \to N_2$ epimorfismos em $\mathcal{M}_R$ e ${}_R\mathcal{M}$, respectivamente. Mostre que se $\mathrm{Ker}(f) \subseteq M_1$ e $\mathrm{Ker}(g) \subseteq N_1$ forem submódulos puros, então $\mathrm{Ker}(f \otimes g) = \mathrm{Ker}(f) \otimes_R N_1 + M_1 \otimes_R \mathrm{Ker}(g)$. (**Sugestão:** Para fazer a inclusão $\supseteq$ você deve utilizar a propriedade universal do Kernel, para fazer a inclusão $\subseteq$ você deve utilizar o resultado sobre elementos nulos no produto tensorial, veja exercício 3)

8) Seja R um anel, mostre que se $X_R \leq M_R$ e ${}_RY \leq {}_RN$ forem submódulos puros, então $X \otimes_R Y = (X \otimes_R N) \cap (M \otimes_R Y)$ (**Sugestão:** Aqui você tem que utilizar o resultado do item g do exercício 5).

9) Sejam R e S aneis, $M, P \in {}_S\mathcal{M}_R$ e $N \in {}_R\mathcal{M}_S$ mostre o seguinte isomorfismo

$$ {}_S\mathrm{Hom}(M \otimes_R N, P) \cong {}_R\mathrm{Hom}(N, {}_S\mathrm{Hom}(M, P)). $$

10) Sejam R e S anéis, $P \in {}_S\mathcal{M}_R$ tal que P seja projetivo e finitamente gerado como R módulo às direita. Definindo, para todo $M \in {}_R\mathcal{M}$ e $N \in \mathcal{M}_R$, respectivamente

$$ {}^*M = {}_R\mathrm{Hom}(M, R), \qquad N^* = \mathrm{Hom}_R(N, R), $$

mostre que

$$ {}_S\mathrm{Hom}(P, {}^*(P^*)) \cong {}_S\mathrm{End}(P). $$