

Geometria Quantitativa II

Lista de Exercícios 1

- 1) Mostre que a seguinte igualdade é válida sempre que as frações envolvidas estiverem definidas:

$$\frac{\cos a}{1 + \sin a} = \frac{1 - \sin a}{\cos a}. \quad (2 \text{ pontos})$$

- 2) Mostre as seguintes identidades trigonométricas:

a) $1 + \operatorname{tg}^2 a = \sec^2 a.$

b) $\sin^4 a - \cos^4 a = \sin^2 a - \cos^2 a.$

c) $\cos^2 a - \sin^2 a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}.$

d) $\sin^6 a + \cos^6 a - 2 \sin^4 a - \cos^4 a + \sin^2 a = 0$

- 3) Sabendo que

$$\begin{cases} 1 + \cos x = a \sin x \\ 1 - \cos x = b \sin x \end{cases}$$

encontre uma relação entre a e b .

- 4) Calcule $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\sin 72^\circ$ e $\cos 72^\circ$.

- 5) Mostre que a área de um triângulo $\triangle ABC$ pode ser calculada como

$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}.$$

- 6) (lei dos senos) Considere um triângulo $\triangle ABC$ inscrito em uma circunferência de raio R . Mostre que

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} = 2R.$$

- 7) (lei dos cossenos) Seja um triângulo $\triangle ABC$ cujos lados opostos aos vértices A , B , e C medem, respectivamente, a , b e c . Mostre que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \sin \hat{C}$$

(Sugestão: Use uma altura relativa ao lado $\overline{AC}$ e com isto trabalhe com o teorema de Pitágoras nos dois triângulos retângulos por ela determinados).

- 8) (Teorema de Ptolomeu) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência. Mostre que

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

(Sugestão, considere um ponto E sobre a diagonal $\overline{AC}$ de forma que $\angle EDA \equiv \angle CDB$. Este teorema, junto com a lei dos senos, vai ser importante para calcularmos as fórmulas de soma de ângulos)