Geometria Quantitativa II

Lista de Exercícios 3

Mais trigonometria, relações métricas em triângulos e polígonos regulares.

- 1) Mostre que $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ = \sin 80^\circ$.
2) Considere um triângulo qualquer $\triangle ABC$, mostre que

$$\sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C} = 4 \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C}.$$

- 3) Mostre que

$$\frac{\sin 30^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 30^\circ + \cos 40^\circ + \cos 50^\circ} = \operatorname{tg} 40^\circ.$$

- 4) As distâncias de um ponto P no interior do triângulo $\triangle ABC$ aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são, respectivamente m e n , mostre que

$$CP^2 = (m^2 + n^2 + 2mn \cdot \cos \hat{C}) \cdot (\operatorname{cosec} \hat{C})^2.$$

- 5) Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo, com ângulo reto em A . Seja $\overline{AH}$ a altura relativa à hipotenusa $\overline{BC}$. Mostre que

a) $AB^2 = BC \cdot BH$, $AC^2 = BC \cdot CH$.

b) $AH^2 = BH \cdot CH$.

- 6) Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer e a , b e c as medidas dos lados opostos, respectivamente, aos vértices A , B e C . Mostre que

(a) $\frac{\sin \hat{A} + \sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} = \frac{a+b}{c}$.

(b) $\frac{\sin \hat{A} + \sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} = \frac{a+b}{c}$.

- 7) Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer e a , b e c as medidas dos lados opostos, respectivamente, aos vértices A , B e C . Denotando por m_a a medida da mediana relativa ao lado de medida a , mostre que

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

- 8) Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer e a , b e c as medidas dos lados opostos, respectivamente, aos vértices A , B e C . Denotando por h_a a medida da altura relativa ao lado de medida a e denotando por p o semi-perímetro, isto é, $p = \frac{a+b+c}{2}$, mostre que

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

- 9) Considerando o item anterior, mostre que a área do triângulo $\triangle ABC$, de lados a , b e c é igual a

$$A(\triangle ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

- 10) (Relação de Stewart) Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer e a , b e c as medidas dos lados opostos, respectivamente, aos vértices A , B e C . Seja D um ponto no lado $\overline{AB}$ tal que $AD = y$, $BD = x$ e $CD = z$, mostre que

$$a^2y + b^2x - z^2c = cxy.$$

- 11) Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer e a , b e c as medidas dos lados opostos, respectivamente, aos vértices A , B e C . Denotando por s_a a medida da bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$ e denotando por p o semi-perímetro, mostre que

$$s_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}.$$

(OBS: Você tem que utilizar o resultado do exercício anterior, e mais a lei da bissetriz interna).

- 12)** Seja l_n a medida do lado de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio R e seja l_{2n} a medida do lado de um polígono de $2n$ lados inscrito na mesma circunferência. Mostre que

$$l_{2n} = \sqrt{R \left(2R - \sqrt{4R^2 - l_n^2} \right)}$$

- 13)** Começando com $n = 6$ e considerando a fórmula anterior para $R = 1$, calcule os lados de um polígono regular de 12 lados, de 24 lados, de 48 lados e de 96 lados. Calcule as áreas destes polígonos.
- 14)** Baseado no exercício anterior, estime com três casas decimais o valor de π .