Exercícios

1. Em que quadrante se tem simultaneamente:

a) $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$?.

b) $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\operatorname{tg}\theta < 0$?.

c) $\cos\theta > 0$ e $\operatorname{tg}\theta > 0$?.

2. A que quadrantes pode pertencer θ, se:

a) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{4}$.

b) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) $\operatorname{tg}\theta = 7\sqrt{3}$.

3. Calcule

a) $\operatorname{sen} 345°$.

b) $\cos 210°$.

c) $\operatorname{tg} 135°$.

4. Para que valores de $\theta, 0 \leq \theta < 2\pi$, se tem:

a) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2}$.

b) $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\operatorname{tg}\theta = -1$.

d) $\cos\theta = 2$.

5. Calcule:

a) $\operatorname{tg} 1.935°$.

b) $\operatorname{sen} 3.000°$.

c) $\cos\dfrac{12\pi}{5}$.

d) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}$.

e) $\operatorname{sen}\dfrac{10\pi}{3}$.

f) $\dfrac{\cos 765° - \operatorname{sen} 1.395°}{\operatorname{tg} 1.410°}$.

6. Verifique que as igualdades abaixo valem para todo valor de $x \neq 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$, onde n é um número inteiro qualquer. Tais igualdades são chamadas *identidades trigonométricas*.

a) $\dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$.

b) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

7. Determine o conjunto dos números reais x para os quais $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Seja s o lado de um polígono regular de n lados e R o raio do círculo inscrito neste polígono. Mostre que: $s = 2R\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

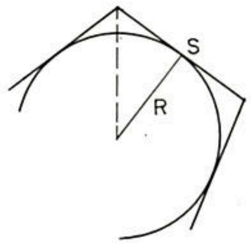

Figura 49

9. Mostre que o perímetro de um pentágono regular inscrito em um círculo unitário é dado por $10\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$.

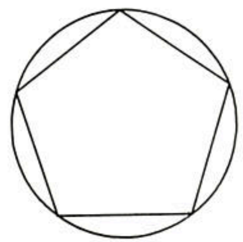

Figura 50

10. Encontre as três menores soluções positivas da equação

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

11. Determine o conjunto dos números reais x tais que

$$\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

12. Quantos são os valores distintos de $\cos \frac{k\pi}{3}$, k inteiro?

13. Determine para que valores de x a função $y = 5 - \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ assume seu valor máximo.

14. Determine o conjunto dos números reais x tais que $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$.

15. Verdadeiro ou falso?

a) $\operatorname{sen} 2 > 0$
b) $\cos 4 < 0$
c) $\operatorname{sen} 3 > \operatorname{sen} 2$
d) $\cos 3 > \cos 2$
e) $\operatorname{tg} 5 > \operatorname{tg} 6$
f) $\cos \frac{\pi}{4} > \cos 1$
g) $\cos \sqrt{3} < 0$

16. Para que valores de x tem-se $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$?

17. Verifique que as extremidades dos arcos x e $-x$ são simétricas em relação ao eixo das abscissas; que as extremidades dos arcos x e $\pi - x$ são simétricas em relação ao eixo das ordenadas e que as extremidades dos arcos x e $\pi + x$ são simétricas em relação à origem. Conclua que:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x,$$
$$\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x, \quad \cos(\pi + x) = -\cos x, \quad \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x.$$

18. Verifique que as extremidades dos arcos x e $\frac{\pi}{2} - x$ são simétricas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Conclua que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x,$$

e

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$$

19. Usando os resultados dos exercícios 17 e 18, mostre que

$$\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2} + x) = \cos x, \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{ctg} x,$$
$$\operatorname{sen}(\tfrac{3\pi}{2} - x) = -\cos x, \quad \cos(\tfrac{3\pi}{2} - x) = -\operatorname{sen} x, \quad \operatorname{tg}(\tfrac{3\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x,$$
$$\operatorname{sen}(\tfrac{3\pi}{2} + x) = -\cos x, \quad \cos(\tfrac{3\pi}{2} + x) = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{tg}(\tfrac{3\pi}{2} + x) = -\operatorname{ctg} x.$$

20. Sabendo que $m\widehat{AP} = x$, verifique, observando as figuras abaixo que $\operatorname{ctg} x = t, \sec x = s$ e $\operatorname{cosec} x = s'$.

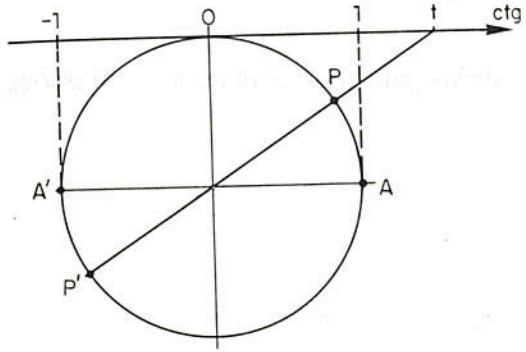

Figura 51a

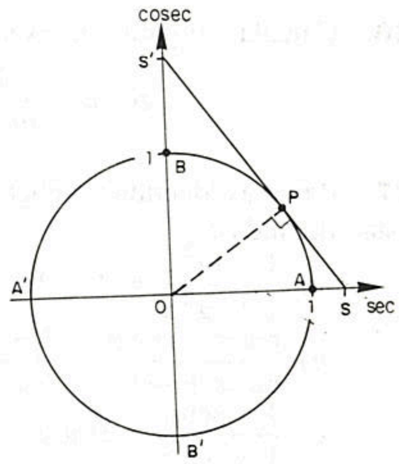

Figura 51b

21. Determine as imagens das funções secante, co-secante e cotangente.

22. Prove as relações

$$\operatorname{ctg} x = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}, & \text{se } x \neq k\dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{se } x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$
$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$
$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$$

23. Se x está no segundo quadrante e $\operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}$, calcule as demais funções de x.

24. Determine todas as soluções da equação

$$\sec\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

25. Prove as identidades abaixo, para $x \neq n\pi/2$:

a) $\sec x \cdot \operatorname{ctg} x = \operatorname{cosec} x$.

b) $\dfrac{\sec x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = \operatorname{sen} x$.

c) $\dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x} = 2\operatorname{sen}^2 x - 1$.

26. Calcular m para que exista um ângulo x com

$$\cos x = \frac{2}{m-1} \text{ e } \operatorname{tg} x = \sqrt{m-2}$$

27. Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

a) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$.

b) $\dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

c) $\dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = (\sec x - \operatorname{tg} x)^2$.

d) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x} = 1 + \cos x$.

28. Sabendo que $\operatorname{tg} x + \sec x = \frac{3}{2}$, calcular $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

29. Sabendo que $\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2$, calcular $\operatorname{tg} x$.

30. Sabendo que $\operatorname{sen} x + \cos x = m$, calcular $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.

31. Sabendo que $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1$, provar que $\cos^4 x + \cos^2 x = 1$.

32. Provar que para quaisquer números reais a e b,

$$2(1 - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) \geq \cos^2 a + \cos^2 b$$

33. Sabendo que

$$\begin{cases} 1 + \cos x = a\operatorname{sen} x \\ 1 - \cos x = b\operatorname{sen} x \end{cases}$$

encontre uma relação entre a e b.

34. Calcule k de modo que as raízes da equação

$$x^2 - 2kx + k^2 + k = 0$$

sejam o seno e o cosseno de um mesmo ângulo.

35. Sabendo que

$$\begin{cases} a\sec x = 1 + \operatorname{tg} x \\ b\sec x = 1 - \operatorname{tg} x \end{cases}$$

encontre uma relação entre a e b.

36. Prove que para todo x

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x - 2\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x + \operatorname{sen}^2 x = 0$$

37. Prove a identidade abaixo, válida para todo x onde a expressão do lado esquerdo está bem definida.

$$\frac{\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^3 x}{2\cos^3 x - \cos x} = \operatorname{tg} x$$

38. Determinar para que valores de a a equação $1 + \operatorname{sen}^2 ax = \cos x$ admite alguma solução não nula.

39. De um triângulo ABC são dados o lado $\overline{BC} = a$ e o ângulo $\widehat{ABC} = \alpha$. Determinar em cada um dos casos: $\alpha < 90°, \alpha = 90°$ e $\alpha > 90°$ que valores pode ter o lado AC para garantir a existência do triângulo. Determine ainda, em que caso pode existir mais de uma solução.

40. É possível provar que tomando círculos centrados em O os arcos determinados nestes círculos por duas semi-retas OA e OB são proporcionais aos seus raios, isto é,

$$\frac{S_1}{OA_1} = \frac{S_2}{OA_2} = \frac{S_3}{OA_3} \cdots$$

(ver Figura 52a).

Este fato se relaciona com a medida do raio da Terra feita por Eratóstenes (grego, 200 anos a.C.). Consultando as observações astronômicas acumuladas durante séculos na biblioteca de Alexandria, Eratóstenes soube que em Siena, 5.000 estádios (medida grega de comprimento) ao sul de Alexandria, o sol se refletia no fundo de um poço ao meio dia de um certo dia de cada ano. Ao meio-dia deste tal dia, Eratóstenes mediu o ângulo que o raio do Sol fazia com a vertical de Alexandria, achando aproximadamente 7°. Mostre que este processo dá para o raio da Terra o valor aproximado de $\frac{250.000}{2\pi}$ estádios.

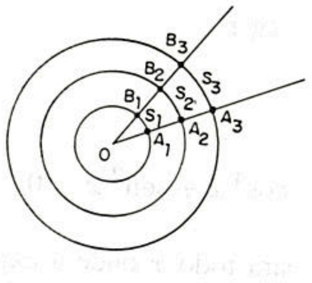

Figura 52a

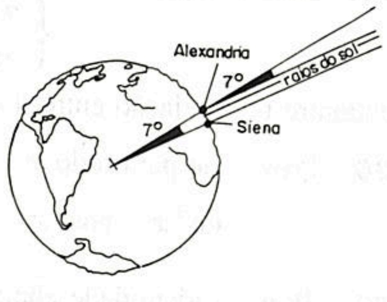

Figura 52b

4. As leis do seno e do cosseno

1. As fórmulas de adição

Nesta seção, vamos deduzir as fórmulas que calculam as funções trigonométricas da soma e da diferença de dois arcos cujas funções são conhecidas. Para obter a primeira delas devemos lembrar que a distância entre dois pontos do plano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada por

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Consideremos então no círculo unitário os pontos P e Q tais que $m\widehat{AP} = a$ e $m\widehat{AQ} = b$ (figura 53). Como $P = (\cos a, \operatorname{sen} a)$ e $Q = (\cos b, \operatorname{sen} b)$, a distância d entre os pontos P e Q é dada por

$$d^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2.$$

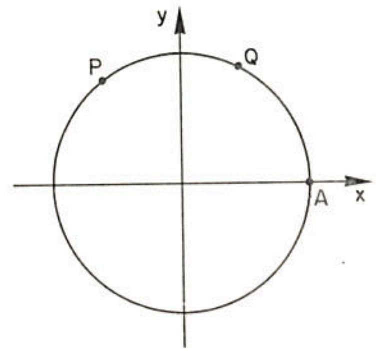

Figura 53

Desenvolvendo os quadrados e lembrando que $sen^2 x + \cos^2 x = 1$ obtemos

$$d^2 = 2 - 2(\cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b).$$

Mudemos agora o nosso sistema de coordenadas girando os eixos de um ângulo b em torno da origem (figura 54).

fato, traçando a altura BD do triângulo ABC temos:

a) Se $\hat{A}$ é agudo, observando a figura 59A, temos

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}\,\hat{A};$$

b) Se $\hat{A}$ é obtuso, observando a figura 59B, temos

$$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}(\pi - \hat{A}) = \frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}\,\hat{A};$$

c) Se $\hat{A}$ é reto,

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}bc \cdot 1 = \frac{1}{2}bc\,\mathrm{sen}\,\hat{A},$$

ficando provada em qualquer caso a afirmação (7).

Para demonstrar agora a lei dos senos, começamos por multiplicar por a (comprimento do lado BC do triângulo) a relação (7) para obter

$$aS = \frac{1}{2}abc\,\mathrm{sen}\,\hat{A} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{\mathrm{sen}\,\hat{A}} = \frac{abc}{2S}.$$

Por raciocínio inteiramento análogo, temos ainda para a área do triângulo ABC as expressões

$$S = \frac{1}{2}ac\,\mathrm{sen}\,\hat{B} \tag{8}$$

$$S = \frac{1}{2}ab\,\mathrm{sen}\,\hat{C} \tag{9}$$

o que nos permite escrever

$$\frac{b}{\mathrm{sen}\,\hat{B}} = \frac{abc}{2S} \quad \text{e} \quad \frac{c}{\mathrm{sen}\,\hat{C}} = \frac{abc}{2S}$$

Temos então que em qualquer triângulo ABC vale a relação

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\mathrm{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\mathrm{sen}\,\hat{C}}.$$

conhecida como a *lei dos senos*.

É importante notar que esta relação nos informa que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo cujos lados medem $\mathrm{sen}\,\hat{A}$, $\mathrm{sen}\,\hat{B}$ e $\mathrm{sen}\,\hat{C}$. Diversas relações entre ângulos de um triângulo podem ser obtidas daí. Por exemplo, é verdade que em qualquer triângulo ABC vale a desigualdade $\mathrm{sen}\,\hat{A} < \mathrm{sen}\,\hat{B} + \mathrm{sen}\,\hat{C}$ porque em qualquer triângulo devemos ter $a < b + c$.

Para mostrar uma aplicação, consideremos o problema de calcular a distância de um ponto para o outro, inacessível. Por exemplo, um observador está em um ponto A e deseja conhecer a distância deste ponto à um ponto P, como na figura 60. Como a medida não pode ser feita diretamente, o observador escolhe um ponto B qualquer (desde que P possa ser visto de B) e mede a distância $\overline{AB} = c$ e os ângulos $\widehat{PAB} = \alpha$ e $\widehat{PBA} = \beta$. Aplicando então a lei dos senos no triângulo PAB temos

$$\frac{\overline{PA}}{\mathrm{sen}\,\beta} = \frac{c}{\mathrm{sen}(\pi - \alpha - \beta)} \quad \text{ou seja,}$$

$$\overline{PA} = \frac{c \cdot \mathrm{sen}\,\beta}{\mathrm{sen}(\alpha + \beta)}.$$

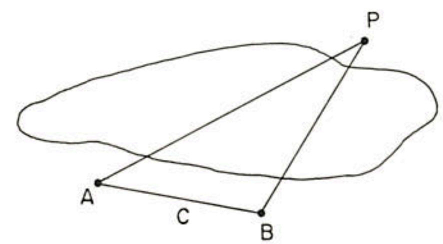

Figura 60

Exercícios

1. Os arcos a e b do primeiro quadrante são tais que $\mathrm{sen}\,a = 3/5$ e $\mathrm{sen}\,b = 12/13$. Calcular $\cos(a + b)$.

2. Os ângulos agudos a e b são tais que $\mathrm{tg}\,a = 1/2$ e $\mathrm{tg}\,b = 1/3$. Mostre que $a + b = 45°$.

3. Se $\mathrm{sen}\,a = 4/5$ e $\cos b = 3/5$, sendo a do segundo quadrante e b do primeiro quadrante, calcular $\mathrm{sen}(a - b)$.

4. Se $\mathrm{sen}\,a = \frac{1}{3}$, calcular $\mathrm{sen}\,2a$ e $\cos 2a$.

5. Se $\mathrm{tg}\,a = \frac{1}{2}$, calcular $\mathrm{tg}\,2a$ e $\mathrm{tg}\,3a$.

6. Provar que em todo triângulo não retângulo ABC, $\text{tg}\,A+\text{tg}\,B+\text{tg}\,C = \text{tg}\,A \cdot \text{tg}\,B \cdot \text{tg}\,C$.

7. Calcular

a) $y = \text{sen}\,15° \cdot \cos 15°$

NÃO b) $y = \sqrt{3}\,\text{sen}\,15° + \cos 15°$

c) $y = \frac{1+\text{tg}\,15°}{1-\text{tg}\,15°}$

8. Calcular $\text{sen}\,\frac{x}{2}$ e $\cos\frac{x}{2}$ em função de $\cos x$.

9. Se $\text{tg}\,x = -\frac{7}{24}$, calcular $\text{sen}\,\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}$ e $\text{tg}\,\frac{x}{2}$.

10. Sendo $2\,\text{sen}\,x + \cos x = 1$, calcule $\text{tg}\,x$.

11. Calcule

NÃO a) $y = \cos 36° \cdot \cos 72°$.

b) $y = \text{sen}\,10° \cdot \cos 20° \cdot \cos 40°$.

12. Demonstre as identidades

a) $\text{tg}\,x + \text{ctg}\,x = 2\,\text{cosec}\,2x$

b) $\text{tg}\,x - \text{ctg}\,x = -2\,\text{ctg}\,2x$

c) $\frac{\sec^2 x}{2-\sec^2 x} = \sec 2x$

d) $\frac{1-\text{sen}\,x}{\cos x} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

e) $\frac{\text{tg}\,2x}{\text{tg}\,2x-\text{tg}\,x} = 2\cos^2 x$

f) $\frac{1}{1+\text{tg}\,x\,\text{tg}\,2x} = \cos 2x$

g) $\frac{\text{sen}\,2x}{1+\cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1+\cos x} = \text{tg}\,\frac{x}{2}$

13. Determine o maior ângulo de um triângulo cujos lados medem 3, 5 e 7.

14. Calcule as diagonais de um paralelogramo de lados 3 e 4 e que tem um ângulo de 60°.

15. Determine os lados de um triângulo ABC no qual se tem $a = 3, \hat{A} = 30°$ e $\hat{B} = 45°$.

16. Os lados de um triângulo ABC medem $a = 4, b = 5$ e $c = 6$. Mostre que $\hat{C} = 2\hat{A}$.

17. Calcule o cosseno do ângulo formado por duas diagonais de um cubo.

18. Calcule o cosseno do ângulo formado por duas faces de um octaedro regular.

19. Dois círculos são tangentes entre si e aos lados de um ângulo dado $2x$. Conhecendo o raio R do círculo maior, calcular o raio do círculo menor.

20. Mostre que o comprimento da mediana relativa ao vértice A do triângulo ABC de lados a, b e c é

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}.$$

21. Prove que em qualquer paralelogramo, a soma dos quadrados dos lados é igual a soma dos quadrados das diagonais.

22. Se $a \cdot \text{sen}\,x + \cos x = a$, calcule $\cos x$.

23. Encontre uma relação entre a, b e c sabendo que

$$\begin{cases} \text{sen}\,x + \text{sen}\,y = a \\ \cos x + \cos y = b \\ \cos(x-y) = c \end{cases}$$

24. Dado $\text{sen}\,x = -24/25$, x no terceiro quadrante, calcular $\text{sen}(x/2)$ $\cos(x/2)$ e $\text{tg}(x/2)$.

25. Calcule $y = \frac{1}{\text{sen}\,10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°}$.

NÃO **26.** Calcular $\text{sen}\,3x$ em função de $\text{sen}\,x$.

27. Prove que $4\,\text{sen}\,x \cdot \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \text{sen}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \text{sen}\,3x$.

28. Mostre que $\text{tg}\,40° + \text{tg}\,20° = 4\sqrt{3} \cdot \text{sen}\,10°$.

NÃO **29.** Obtenha um polinômio de coeficientes inteiros que admita sen 10 como raiz. Determine as outras raízes e prove que $\text{sen}\,10°$ não pode se escrito na forma p/q, onde p e q são inteiros, ou seja, é um númer irracional.

NÃO *Sugestão*: use o exercício 26.

30. Prove que

a) $\operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$

b) $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

c) $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = -\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

31. Prove que

a) $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$

b) $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{a-b}{2}$

c) $\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$

d) $\cos a - \cos b = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{a-b}{2}$.

32. Mostre que $\operatorname{sen} 20° + \operatorname{sen} 40° = \operatorname{sen} 80°$.

33. Mostre que $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

34. Mostre que em todo triângulo ABC, $\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4 \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C$.

35. Determine a natureza do triângulo ABC (acutângulo, retângulo ou obtusângulo; equilátero isósceles ou escaleno) no qual:

a) $\operatorname{sen}^2 \hat{A} = \operatorname{sen}^2 \hat{B} + \operatorname{sen}^2 \hat{C}$

b) $\operatorname{sen} \hat{A} = 2 \operatorname{sen} \hat{B} \cos \hat{C}$

c) $\operatorname{sen} \hat{A} = \operatorname{sen} \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}$

d) $\operatorname{sen} \hat{B} + \cos \hat{C} = \cos \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{C}$

e) $\operatorname{sen} \hat{B} \cdot \operatorname{sen} \hat{C} = \cos^2 \frac{\hat{A}}{2}$

f) $\operatorname{sen} 2\hat{A} \cdot \operatorname{sen} \hat{B} = \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} 2\hat{B}$

g) $\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} = 1$

36. Mostre que $\dfrac{\operatorname{sen} 30° + \operatorname{sen} 40° + \operatorname{sen} 50°}{\cos 30° + \cos 40° + \cos 50°} = \operatorname{tg} 40°$.

37. Determine os valores máximo e mínimo de

a) $y = \operatorname{sen} x + \cos x$

b) $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{9}\right)$

38. Mostre que $\operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 40° = \operatorname{tg} 10°$.

39. Mostre que se $ABCDEFG$ é um heptágono regular convexo então $\frac{1}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$.

40. As distâncias de um ponto P aos lados AC e BC de um triângulo ABC são m e n. Mostre que, supondo P interior ao triângulo,

$$\overline{CP}^2 = (m^2 + n^2 + 2mn \cdot \cos \hat{C}) \cdot \operatorname{cosec}^2 \hat{C}.$$

41. Um balão foi visto simultaneamente de três estações A, B e C sob ângulos de elevação de $45°$, $45°$ e $60°$, respectivamente. Sabendo que A está $3\,km$ a oeste de C e que B está $4km$ ao norte de C, determine a altura do balão.

42. Para determinar a distância entre dois pontos A e B situados além de um rio, marcaram-se dois pontos C e D aquém do rio e mediram-se os ângulos $\widehat{ACB} = 35°, \widehat{BCD} = 20°, \widehat{ADC} = 18°, \widehat{ADB} = 41°$ e a distância $\overline{CD} = 320m$. Calcular a distância $\overline{AB}$.

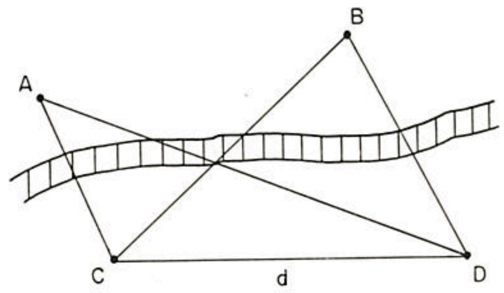

Figura 61

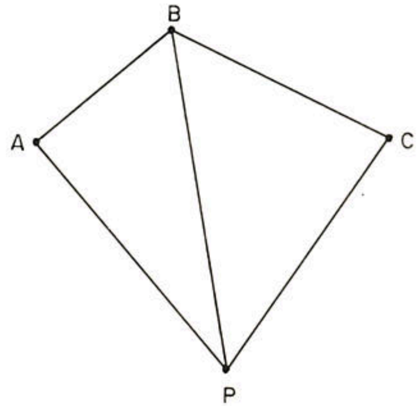

Figura 62

43. No quadrilátero $PABC$ da figura 62 conhecem-se $\overline{AB} = 4, \overline{BC} = 5, \widehat{ABC} = 60°, \widehat{APB} = 20°$ e $\widehat{BPC} = 26°$. Calcular $\overline{PA}, \overline{PB}$ e $\overline{PC}$.

44. Um observador O situado no topo de uma montanha vê dois outros A e B situados no nível do mar. Os observadores A e B medem os ângulos α e β que as linhas AO ee BO formam com o plano horizontal e o observador O mede o ângulo $\widehat{AOB} = r$. Conhecendo a distância $\overline{AB} = d$, calcule a altura da montanha.

45. Mostre que a distância d entre o incentro e o circuncentro de um triângulo é dada por $d = R^2 - 2Rr$ (fórmula de Euler) onde R e r são os raios dos círculos circunscrito e inscrito. Conclua que em qualquer triângulo, $R \geq 2r$. (Incentro e circuncentro são os centros dos círculos inscrito e circunscrito, respectivamente. O primeiro é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos e o segundo é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados.)
Sugestão: Considere um triângulo ABC, seu incentro I e seu circuncentro O. Trace o diâmetro DE do círculo circunscrito perpendicular a BC (A e D estão de um mesmo lado da reta BC). Prove que $\overline{EI} = \overline{EC} = \overline{EB}$, observe que o triângulo ECD é retângulo e portanto $\overline{EC}^2 = 2R(R-r)$ e aplique a lei do cosseno no triângulo OEI.

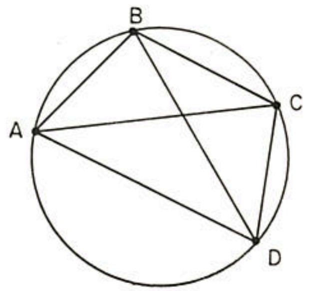

Figura 63

46. O Teorema de Ptolomeu (v. notas históricas) diz que em um quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos. Na figura 63, este teorema se exprime da seguinte forma:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

a) Demonstre este teorema considerando um ponto E sobre AC tal que $\widehat{ABE} = \widehat{CBD}$ e verificando que os triângulos ABE e DBC são semelhantes e que os triângulos ADB e EBC também são.

b) Considerando o caso em que AD é o diâmetro, mostre que d Teorema de Ptolomeu decorre a fórmula

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a.$$

Sugestão: Observe que se em um círculo de raio R temos ur arco $\overset{\frown}{AB} = 2a$, traçando um diâmetro por A, obtemos que c comprimento da corda AB é $\overline{AB} = 2R \operatorname{sen} a$.

47. Mostre que a lei dos senos pode ser escrita

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R,$$

onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

48. De um triângulo ABC são dados os ângulos A, B e C e o perímetrc $2p = a + b + c$. Obtenha as expressões abaixo que permitem calcular os lados a, b e c em função dos elementos dados.

$$a = \frac{p \operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}, \quad b = \frac{p \operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}, \quad c = \frac{p \operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}.$$

49. Prove que, dado o triângulo ABC, tem-se:

a) $1 - \cos A = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$

b) $1 + \cos A = \frac{2p(p-a)}{bc}$

c) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (fórmula de Heron), onde S é a área de ABC.

d) $S = \frac{abc}{4R}$, onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo.

50. Prove que, dado o triângulo ABC, tem-se

a) $\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

b) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

c) $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$

d) $\frac{b-c}{a} = \frac{\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$

e) $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$

51. Mostre que se h_A, h_B e h_C são as alturas de um triângulo ABC,

a) $h_A = 2R \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C$, onde R é o raio do círculo circunscrito ao triângulo.

b) $\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} = \frac{1}{r}$ onde r é o raio do círculo inscrito no triângulo.

52) Mostre que no triângulo ABC,

a) $\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$,

b) $\operatorname{sen}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$ e mostre ainda que $\operatorname{sen}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

5. Equações trigonométricas

Neste capítulo, vamos examinar algumas equações trigonométricas. Elas aparecem naturalmente na solução de problemas de Geometria quando a incógnita escolhida é um ângulo. Se, por exemplo, de um triângulo retângulo conhecemos a hipotenusa a e a soma dos catetos s, para calcular algum outro elemento dessa figura, podemos colocar x para um dos ângulos. Teremos então $\operatorname{sen} x + \cos x = s/a$, que é uma equação trigonométrica. Os métodos usados para resolver as equações mais comuns estão nas seções seguintes.

1. As equações fundamentais

As equações fundamentais são: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a, \cos x = \cos a$ e $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$. Examinemos cada uma delas.

a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$

Para que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ é necessário e suficiente que as extremidades dos arcos x e a coincidam ou que sejam simétricas em relação ao eixo das ordenadas (figura 64). No primeiro caso, x será côngruo a a e no segundo caso, x será côngruo a $\pi - a$. Portanto, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ equivale a $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$.

Por exemplo, os valores de x para os quais $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x$ são os valores para os quais $3x = x + 2k\pi$ ou $3x = \pi - x + 2k\pi$, isto é, $x = k\pi$ ou $x = \pi/4 + k\pi/2$.

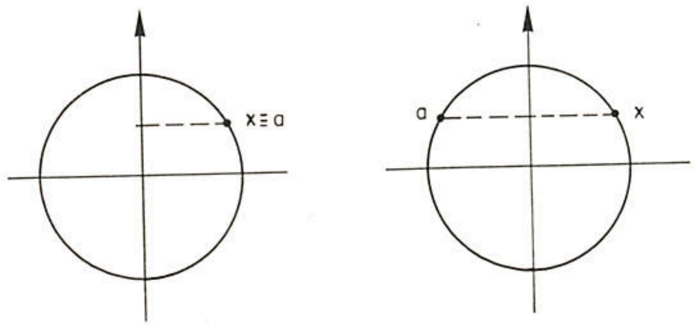

Figura 64

$x = 1/2$ é a única solução.

Exercícios

1. Resolva as equações:

a) $\cos 3x = \cos x$;
b) $\operatorname{sen} 2x = \cos x$;
c) $\operatorname{tg} 7x = \operatorname{tg} 3x$;
d) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 3x = 1$;
e) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 1$;
f) $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$;
g) $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$;
h) $\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x = 1$;
i) $\operatorname{sen} x = \sqrt{3}(\sec x - \cos x)$;
j) $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x = \cos x$;
k) $5 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x \cos x + 4 \cos^2 x = 3$;
l) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$;
m) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

2. Sendo A e B reais não simultaneamente nulos, determine para que valores de C a equação $A \operatorname{sen} x + B \cos x = C$ possui solução.

3. Determine os valores de m para os quais a equação $6(m-1)\operatorname{sen}^2 x - (m-1)\operatorname{sen} x - m = 0$ possui solução.

4. Calcule

a) $\operatorname{sen}(2 \operatorname{arc\,sen} x)$;
b) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sen} x)$;
c) $\cos[\operatorname{arc\,tg} 2 + \operatorname{arc\,tg} 3]$;
d) $4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$;
e) $\operatorname{arc\,tg}(-x) + \operatorname{arc\,tg} x$.

5. Construa os gráficos de:

a) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$;
b) $f(x) = \operatorname{arc\,cos} x$;
c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$;
d) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos} x$;
e) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$;
f) $f(x) = \operatorname{arc\,cos}(\operatorname{sen} x)$;
g) $f(x) = \cos(\operatorname{arc\,sen} x)$;
h) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x)$.

6. Resolva as equações:

a) $\operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,sen} 2x = \frac{\pi}{6}$
b) $\operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1-x}{2} = \frac{\pi}{4}$
c) $\operatorname{arc\,sen} x\sqrt{3} = \operatorname{arc\,sen} 2x - \operatorname{arc\,sen} x$

7. Resolva as equações

a) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$;
b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 9x = \operatorname{sen} 5x$;
c) $\cos 4x \cdot \cos 2x = \cos 3x \cdot \cos x$.

8. Determine o máximo e o mínimo das funções abaixo e construa seus gráficos

a) $f(x) = 3 \operatorname{sen} x - 4 \cos x$;
b) $f(x) = 3 \operatorname{sen}^2 x + 4 \cos^2 x$.

9. Em um triângulo retângulo de hipotenusa 1, a soma dos catetos é $\sqrt{6}/2$. Calcular a razão entre o menor cateto e o maior cateto.

10. Um retângulo está inscrito em um semi-círculo de raio 1 tendo um de seus lados (base) sobre o diâmetro. Calcular a razão entre a altura e a base desse retângulo nas duas situações seguintes:

a) a área do retângulo é máxima.
b) o perímetro do retângulo é máximo.

11. Em um círculo de raio 1, AA' é um diâmetro e BC é uma corda perpendicular a AA'. Determinar os ângulos do triângulo ABC, sabendo que a soma dos quadrados de seus lados é 5.

12. Resolver as inequações:

a) $2 \operatorname{sen}^2 x + 7 \operatorname{sen} x + 3 \leq 0$;
b) $\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x \leq 1$.

13. Uma partícula P percorre, em sentido anti-horário, o círculo de centro na origem e raio a, partindo, no instante $t = 0$, do ponto S (figura 68). Sua velocidade angular, constante, é w radianos por segundo (isto é, em cada segundo ela percorre um arco de w radianos).

Seja Q a projeção ortogonal da partícula no eixo das abscissas. O movimento do ponto Q é dito um *movimento harmônico simples* e o ângu

ϕ indicado na figura é chamado *ângulo de fase*.

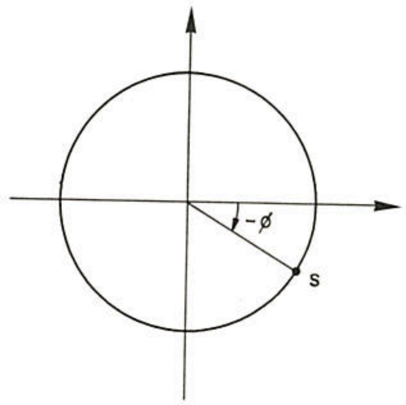

Figura 68

a) Determine a posição do ponto Q no instante t segundos.
b) Determine a amplitude (isto é, o afastamento máximo da origem) do movimento de Q.
c) Verifique que o movimento harmônico simples é periódico e determine seu período.
d) Determine a freqüência (isto é, o número de períodos por segundo) do movimento harmônico.

14. Uma partícula se movimenta sobre o eixo das abscissas de modo que sua abscissa no instante t segundos é

$$x = \operatorname{sen}(\pi t) - \sqrt{3}\cos(\pi t). \text{ (distancias em metros)}$$

Mostre que o movimento da partícula é harmônico simples (v. Exercício 13) e determine a amplitude, o ângulo de fase, o período e a freqüência deste movimento.

15. $a_1, a_2, \dots, a_n$ são constantes dadas,

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x),$$

e x_1, x_2 são reais tais que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Prove que $x_2 - x_1 = m\pi$ para algum inteiro m.

6. Números complexos

1. Introdução

Iniciaremos lembrando que as operações de soma e produto de números reais possuem um certo número de propriedades fundamentais, que são as seguintes:

1) A adição e a multiplicação são *comutativas*, isto é, se a e b são números reais, então

$$a + b = b + a, \quad ab = ba.$$

2) A adição e a multiplicação são *associativas*, isto é, se a, b e c são números reais,

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc).$$

3) A multiplicação é *distributiva* relativamente à adição, isto é, se a, b e c são números reais,

$$a(b + c) = ab + ac.$$

4) Existem e são únicos os números 0 e 1 satisfazendo às condições:

$$a + 0 = a, \quad a1 = a,$$

para todo real a.

5) A todo real a corresponde um único número real $(-a)$, e se $a \neq 0$, um único número real $\frac{1}{a}$, tais que

$$a + (-a) = 0 \quad \text{e} \quad a\left(\frac{1}{a}\right) = 1.$$

A razão pela qual estas propriedades são consideradas fundamentais, é que a partir delas podemos deduzir todas as regras de operações aritméticas sobre os números reais. Por exemplo, de (4), decorre que $(-1)1 = -1$ e de $(3), (4)$ e (5) decorre que $a + a0 = a(1 + 0) = a1 = a$, isto é, $a0 = 0$.

A famosa "regra dos sinais": $(-1)(-1) = 1$ pode também ser dedu-