

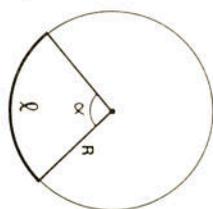
"O comprimento de um arco de circunferência (ℓ) é proporcional à sua medida (α)".

Para α em graus

$$360^\circ \text{ — } 2\pi R \quad \left. \begin{array}{l} \alpha \text{ — } \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\ell = \frac{\pi R \alpha}{180}}$$

Para α em radianos

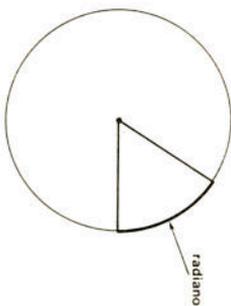
$$2\pi \text{ rad — } 2\pi R \quad \left. \begin{array}{l} \alpha \text{ rad — } \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\ell = R\alpha}$$



Em particular, numa circunferência de raio unitário, o comprimento de um arco é numericamente igual à sua medida em radianos.

231. Observação

Chama-se radiano (rad) todo arco de circunferência cujo comprimento é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém.



Numa circunferência (comprimento = $2\pi R$) há 2π radianos e por conseguinte

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 180^\circ \times \frac{1}{\pi} = 180^\circ \times 0,31831 = 57^\circ 17' 38,4\dots''$$

EXERCÍCIOS

- 1.511 Se o raio de uma circunferência aumenta de 1 m , de quanto aumenta o comprimento?
- 1.512 Um arco de circunferência de comprimento $2\pi R$, de uma circunferência de raio G que ângulo central subtende?
- 1.513 Dado uma circunferência de diâmetro d , calcular o comprimento de um arco cujo ângulo central correspondente é:
- a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 120° f) 135° g) 150°

1.514 O comprimento de uma circunferência é de $12\pi \text{ cm}$. Determinar o raio de outra circunferência cujo comprimento é a quarta parte da primeira.

1.515 Um círculo tem 4 cm de raio, calcular o comprimento de sua circunferência.

1.516 Dar o raio de uma circunferência cujo comprimento é igual ao de uma semi-circunferência de 5 cm de raio.

1.517 O comprimento de uma circunferência é de $12,56 \text{ cm}$ aproximadamente. Calcular o raio. Adote π com duas casas decimais.

1.518 As rodas de um automóvel tem 32 cm de raio. Que distância percorreu o automóvel depois que as rodas deram 8000 voltas?

1.519 Uma pista circular foi construída por duas circunferências concêntricas, cujos comprimentos são de 1500 m e 1200 m aproximadamente. Quanto mede sua largura?

1.520 Um ciclista percorreu 26 km em 1 h e 50 minutos . Se as rodas da bicicleta tem 40 cm de raio, quantas voltas aproximadamente deram as rodas e quantas por minuto?

1.521 As rodas dianteiras de um carro tem 1 m de raio e dão 25 voltas ao mesmo tempo em que as traseiras dão 20 voltas. Calcular o raio das rodas traseiras e quanto percorreu o carro depois que as rodas dianteiras deram 100 voltas.

1.522 Aumentando-se de 2 m o raio de uma circunferência, de quanto aumentará o seu comprimento? O que ocorre com o comprimento se o raio for aumentado de 3 m ? E se o raio for aumentado de a metros?

1.523 A circunferência C_1 , de raio R_1 e perímetro $P_1 = 10^3$ é concêntrica à circunferência C_2 , de raio R_2 e perímetro $P_2 = 1 + 10^3$. Calcule $R_2 - R_1$.

1.524 Duplicando o raio de uma circunferência, o que ocorre com seu comprimento?

1.525 Um arco de comprimento $2\pi R$ de uma circunferência de raio $2R$, subtende um arco de quantos graus?

1.526 De quanto aumenta o raio de uma circunferência quando seu comprimento aumenta de 5 metros?

1.527 De quanto aumenta o comprimento de uma circunferência cujo raio sofreu um aumento de 50% ?

1.528 Determine o ângulo que subtende um arco de 2 cm de comprimento numa circunferência de 1 cm de raio.

1.529 Se o raio de um círculo aumenta de k unidades, o que ocorre com o comprimento da circunferência?

descrita pelo ponteiro maior tem comprimento maior que a circunferência descrita pelo ponteiro menor. Determine essa diferença.

1.531 Determinar o raio de uma circunferência cujo comprimento é igual ao de uma semi-circunferência de 5 cm de raio.

1.532 Um menino brinca com um aro de 1 m de diâmetro. Que distância percorreu o menino ao dar 100 voltas com o aro?

1.533 Um carpinteiro vai construir uma mesa redonda para acomodar 6 pessoas sentadas ao seu redor. Determine o diâmetro dessa mesa para que cada pessoa possa dispor de um arco de 50 cm na mesa.

1.534 As rodas dianteiras de um caminhão tem 50 cm de raio e dão 25 voltas no mesmo tempo em que as rodas traseiras dão 20 voltas. Determine o diâmetro das rodas traseiras.

1.535 Uma pista circular está limitada por duas circunferências concêntricas cujos comprimentos valem respectivamente 3000 m e 2400 m. Determine a largura da pista.

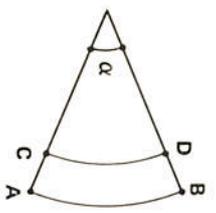
1.536 Para ir de um ponto A a um ponto B posso percorrer a semi-circunferência de diâmetro \overline{AB} e centro O. Se percorrer as duas semi-circunferências de diâmetros AO e OB terei percorrido um caminho maior ou menor?

1.537 Quantas voltas dá uma das rodas de um carro num percurso de 60 km, sabendo que o diâmetro dessa roda é igual a 1,20 m?

1.538 Uma corda determina em um círculo um arco que mede 80° . Sendo 20 cm o comprimento desse arco, determine a medida do raio desse círculo.

1.539 O comprimento de um arco \widehat{AB} é 1 cm, o ângulo central do setor circular delimitado por esse arco mede 60° . Determine o raio do círculo ao qual pertence esse setor.

1.540 Na figura ao lado, calcule a medida do ângulo central α , sabendo que os arcos \widehat{AB} e \widehat{CD} medem respectivamente 100 cm e 80 cm, e que $\overline{CA} = \overline{DB} = 25$ cm.



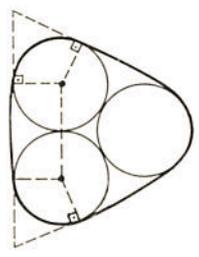
1.541 Num círculo uma corda de 3 cm dista 2 cm do centro. Calcule o comprimento da circunferência.

1.542 Determinar o comprimento de uma circunferência inscrita a um quadrado de 4 cm de lado.

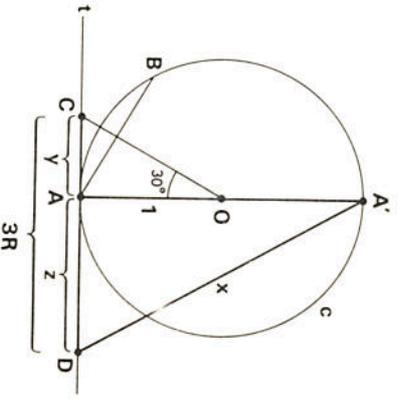
1.543 Calcule o comprimento de uma circunferência inscrita em um quadrado de 10 cm de diagonal.

1.544 O comprimento de uma circunferência é de 8π cm. Determinar o raio e o perímetro do quadrado inscrito.

1.545 Na figura ao lado, os três círculos têm mesmo raio r igual a 10 cm. Determinar o comprimento da correia que envolve os três círculos.



1.546 Sejam um círculo c de centro O, de raio $R = 1$, diâmetro $\overline{AA'}$ e a tangente t em A ao círculo c. \overline{AB} sendo um lado do hexágono regular inscrito em c, a mediatriz de \overline{AB} corta a reta t em C. Construamos sobre t o segmento $\overline{CD} = 3R$. Mostrar que o comprimento $\overline{A'D}$ é um valor aproximado de π .



1.547 Uma corda \overline{AB} distando 3 cm do centro de um círculo de diâmetro 12 cm determina nesse círculo dois arcos. Determinar a razão entre a medida do maior para o menor arco desse círculo.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{n-2}}{T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{n-2}} =$$

$$= \frac{K^2 T_1 + K^2 T_2 + K^2 T_3 + \dots + K^2 T_{n-2}}{T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_{n-2}} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = K^2$$

Conclusão: A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

264. Observação

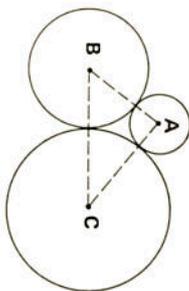
A propriedade acima é extensiva a quaisquer superfícies semelhantes e, por isso, vale:

A razão entre as áreas de duas superfícies semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

EXERCÍCIOS

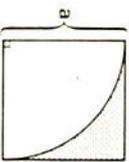
- 1.602 Determinar a área de um círculo sabendo que o comprimento de sua circunferência é igual a 8π cm.
- 1.603 Calcular a área de um setor circular de raio r e ângulo central medindo:
 a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 120° f) 135° g) 150°
- 1.604 Calcular a área de um segmento circular de um círculo de raio R e ângulo central medindo:
 a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 120° f) 135° g) 150°
- 1.605 Determinar a área de coroa determinada por duas circunferências concêntricas de raios 15 cm e 12 cm.
- 1.606 Determine a razão entre as áreas dos círculos circunscrito e inscrito em um quadrado $ABCD$ de lado a .
- 1.607 Unindo-se um ponto qualquer P de uma semi-circunferência às extremidades do diâmetro obtemos um triângulo retângulo de catetos iguais a 9 cm e 12 cm respectivamente. Determinar a razão entre a área do círculo e a área do triângulo retângulo.

- 1.608 Os pontos A , B e C são centros dos três círculos tangentes exteriormente como na figura ao lado. Sendo as distâncias AB , AC e BC respectivamente iguais a 10 cm, 14 cm e 18 cm, determine as áreas desses três círculos.

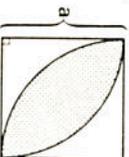


- 1.609 Sobre os lados de um triângulo retângulo, tomados como diâmetros, constroem-se semi-circunferências exteriores ao triângulo. Qual a relação entre as áreas dos semi-círculos determinados?
- 1.610 (FAUUSP-67) Duas circunferências iguais de raio r , tangentes entre si, tangenciam internamente uma outra circunferência de raio $3r$. Calcular a menor das duas áreas limitadas por arcos das três circunferências.
- 1.611 (EPUSP-67) Calcular a área da superfície limitada por seis círculos de raio unitário com centros nos vértices de um hexágono regular de lado 2.
- 1.612 Calcular a área da parte sombreada

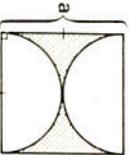
1ª)



2ª)

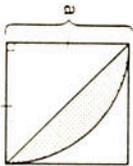


3ª)

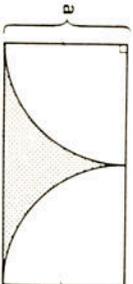


- 1.613 Calcular a área da superfície sombreada.

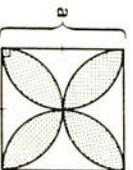
1ª)



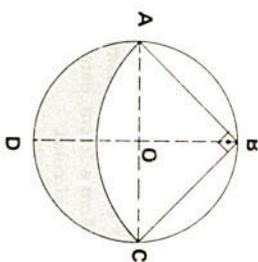
2ª)



3ª)

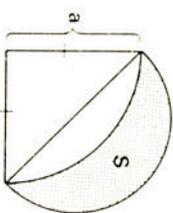


1.614 Na figura ao lado, determinar a área da parte sombreada em função do raio r do círculo, sendo \overline{AB} e \overline{BC} os lados de um quadrado inscrito nesse círculo.

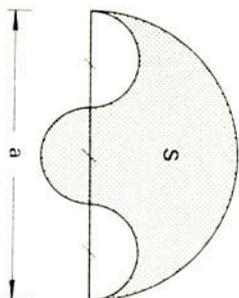


1.615 Num triângulo retângulo, a é a medida da hipotenusa, b e c as dos catetos. Construam-se os semi-círculos de diâmetros b e c externos ao triângulo, e o semi-círculo de diâmetro a circunscrito ao triângulo. As regiões dos dois primeiros semi-círculos externos à terceira, são chamadas "lúnulas de Hipócrates". Mostrar que a soma das áreas das lúnulas é igual a área do triângulo.

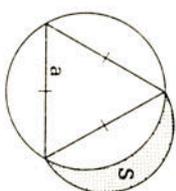
1.616 Calcular a área da superfície sombreada.



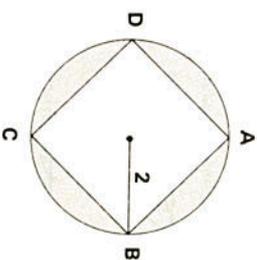
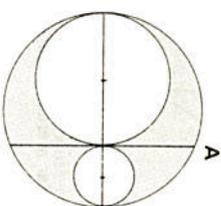
2ª)



3ª)

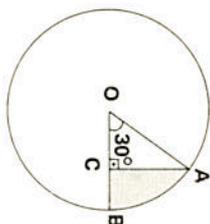


1.617 Calcular a área da parte sombreada sendo $AB = t$ e r o raio do círculo maior.

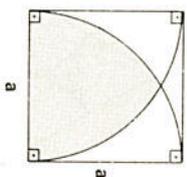


1.618 Calcular a área da figura sombreada

1.619 Em um círculo de 20 m de diâmetro, trace-se um ângulo central \widehat{AOB} de 30° . Sendo \overline{AC} a perpendicular baixada do ponto A sobre o raio \overline{OB} , calcular a área da parte sombreada.

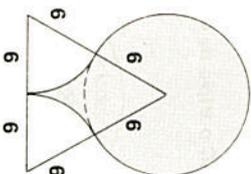


1.620 Calcular a área da parte sombreada:

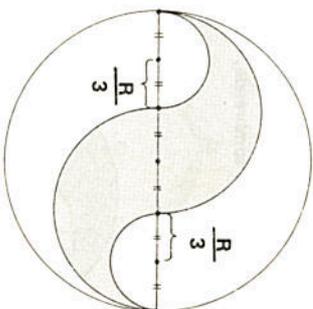


1.621 Calcular a área da figura sombreada

a)

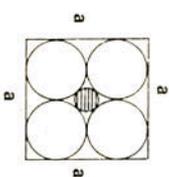


b)

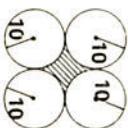


1.622 Idem para as figuras a seguir:

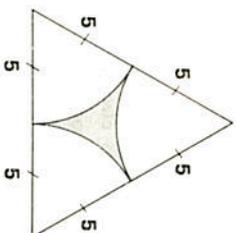
a)

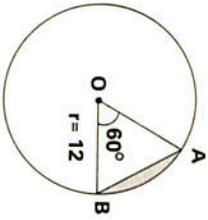


b)

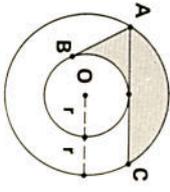
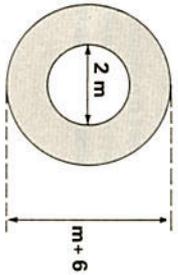
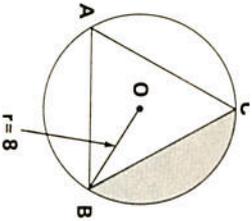


c)



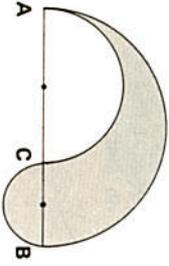


1623 Determinar a área da figura sombreada, em função de m .

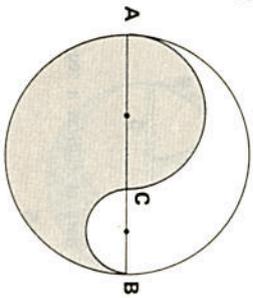


1624 Na figura ao lado, \widehat{AC} e \widehat{AB} são tangentes à circunferência menor. Calcule a área sombreada em função de r .

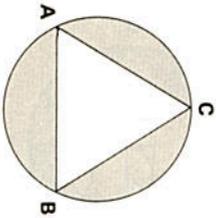
1625 Determinar a área sombreada, nas figuras abaixo, sendo AC o triplo de CB e AB igual a 32 cm .



a)



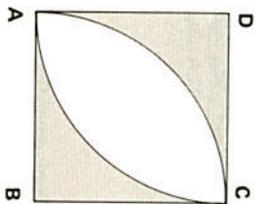
b)



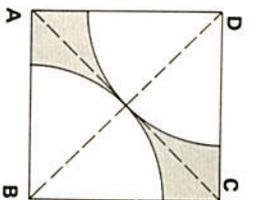
1626 O apótema do triângulo equilátero ABC inscrito no círculo mede $\sqrt{3}\text{ cm}$. Calcular a área sombreada.

268-1

1627 $ABCD$, nas figuras abaixo, é um quadrado de perímetro 16 cm . Determinar as áreas sombreadas.

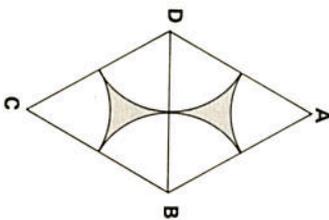


a)

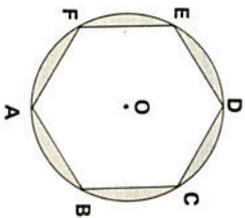


b)

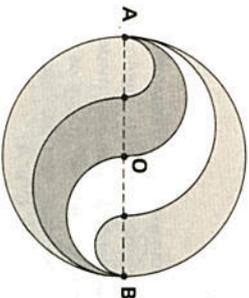
1628 Determinar a área sombreada, na figura sabendo-se que o lado do losango tem medida igual à sua diagonal menor e que ambos medem 10 cm . Os arcos descritos têm centros nos vértices do losango e raio igual à metade do lado do losango.



1629 Na figura ao lado, o apótema do hexágono regular mede $5\sqrt{3}\text{ cm}$. Determinar a área sombreada.

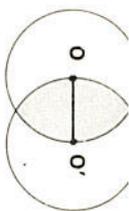


1630 Determinar a área da figura sombreada, ao lado sabendo que \widehat{AB} foi dividido em quatro segmentos congruentes, de medidas iguais a r .

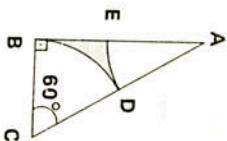


269-1

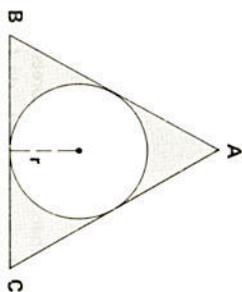
1.631 Determinar a área sombreada sabendo que o raio comum OO' dos círculos mede 26 cm .



1.635 Determinar a área sombreada na figura ao lado, sabendo que a hipotenusa do triângulo retângulo ABC mede 10 cm .

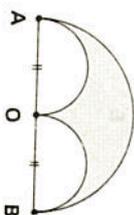


1.632 Determinar a área da figura sombreada ao lado, em função do raio r do círculo inscrito no triângulo equilátero ABC .



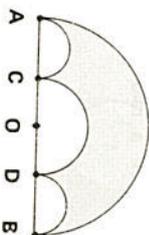
1.636 Nas figuras abaixo, determinar a área hachurada sendo \overline{AB} igual a 20 cm .

a)



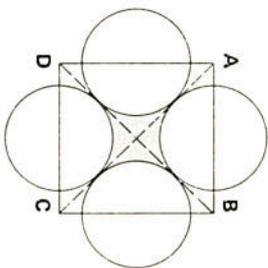
$$\overline{AO} \equiv \overline{OB}$$

b)

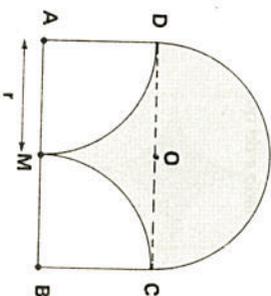


$$\overline{AC} \equiv \overline{CO} \equiv \overline{OD} \equiv \overline{DB}$$

1.633 Determinar a área sombreada ao lado, sabendo que os raios dos círculos são iguais e $ABCD$ é um quadrado de perímetro 16 cm .



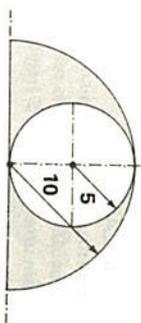
1.637 Na figura ao lado, \overline{AM} , \overline{MB} , \overline{BC} , \overline{AD} têm mesma medida. Determinar a área hachurada sabendo que o perímetro do retângulo $ABCD$ mede 42 cm .



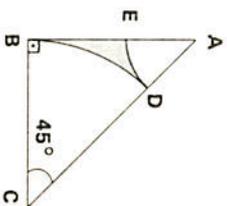
1.638 Determinar a área de um segmento circular de 60° de um círculo que contém um setor circular de $6\pi\text{ cm}^2$ de área, sendo $2\pi\text{ cm}$ o comprimento do arco desse setor.

1.639 Determinar a razão entre as áreas dos segmentos circulares em que fica dividido um círculo no qual se traça uma corda igual ao raio do círculo.

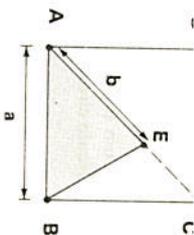
1.640 Calcular a área da parte sombreada.



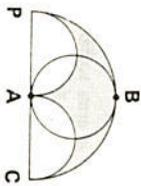
1.634 Determinar a área e o perímetro da figura BED , inscrita no triângulo retângulo ABC , sabendo que \overline{AC} mede 10 cm , o ângulo \hat{C} mede 45° e que os arcos \overline{BD} e \overline{ED} tem seus centros, respectivamente, nos pontos C e A .



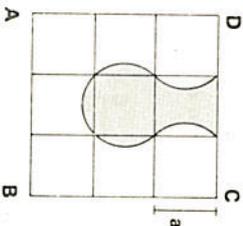
- 1.651 Na figura, $ABCD$ é um quadrado de lado a e $AE = b$. Determine a área do triângulo AEB , sabendo que \overline{CE} é congruente a \overline{BC} .



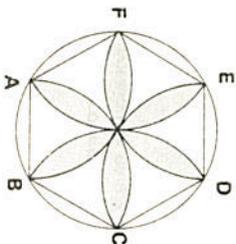
- 1.652 Na figura, o segmento \overline{AP} é congruente ao segmento \overline{AC} e a distância \overline{AB} mede r . Calcule a área sombreada em função de r .



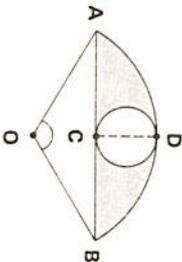
- 1.653 Na figura, $ABCD$ é um quadrado. Determine a área sombreada em função de a , sendo a a medida de um segmento tomado sobre o lado do quadrado, a $\frac{1}{3}$ do vértice C .



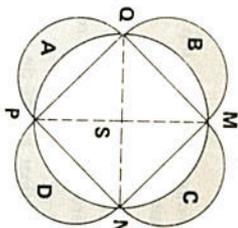
- 1.654 Seja $ABCDEF$ um hexágono regular inscrito num círculo cujo raio mede 1 cm . Calcule a área sombreada.



- 1.655 Na figura ao lado, C é o ponto médio de \overline{AB} que mede 8 cm . Determine a área sombreada sabendo que o ângulo $\angle BOA$ mede 120° .



- 1.656 Sejam A, B, C e D as áreas sombreadas da figura, prove que $S = A + B + C + D$, onde S é a área do quadrado $MNPQ$.



- 1.657 Qual a razão entre o raio de um círculo circunscrito e o raio de um círculo inscrito em um triângulo ABC de lados a, b, c e perímetro $2p$?
- 1.658 Determinar o raio do círculo circunscrito e os lados congruentes de um triângulo isósceles ABC , cuja base \overline{BC} mede 18 cm sendo 6 cm a medida do raio do círculo inscrito nesse triângulo.
- 1.659 (ITA-65). Dado um triângulo equilátero e sabendo-se que existe outro triângulo inscrito com os lados respectivamente perpendiculares aos do primeiro, calcular a relação entre as áreas dos dois triângulos.
- 1.660 O produto da medida de cada lado do triângulo pela medida da altura do vértice oposto é constante. Demonstrar.
- 1.661 Calcular a área de um retângulo, sabendo que cada diagonal mede 10 cm e formam um ângulo de 60° .
- 1.662 Determinar a área de um quadrado cujo perímetro é igual ao perímetro de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio $\frac{r}{2}$.
- 1.663 Um losango e um quadrado têm o mesmo perímetro. Determinar a razão da área do losango para a área do quadrado sabendo que o ângulo agudo formado por dois lados do losango mede 60° .
- 1.664 Paulo e Carlos possuem tabletes de chocolate de forma, respectivamente, quadrada e retangular. O tablete de Paulo tem 12 cm de perímetro e o tablete de Carlos tem a base igual ao triplo da altura e perímetro igual a 12 cm . Sabendo que os tabletes possuem mesma espessura e que Paulo propôs a troca com Carlos, verifique se é vantagem a Carlos aceitar a troca.
- 1.665 Dois lados homólogos de dois pentágonos semelhantes medem 6 cm e 8 cm respectivamente. Determinar o lado do terceiro pentágono semelhante aos dois primeiros sabendo que sua área é igual a soma das áreas dos dois primeiros pentágonos.
- 1.666 Determinar a área de um quadrado, sabendo que seu lado é segmento áureo do lado do quadrado inscrito, num círculo de raio 10 cm .