Demonstração

Tomemos o ponto D na semi-reta oposta à semi-reta $\overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{A'D} \equiv \overline{AC}$ (postulado do transporte de segmentos – item 17).

$(\overline{AB} \equiv \overline{A'B'},\ \hat{A} \equiv \hat{A}',\ \overline{AC} \equiv \overline{A'D}) \xrightarrow{LAL} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'D \Rightarrow \overline{BC} \equiv \overline{B'D}$ (4) e $\hat{C} \equiv \hat{D}$ (5)

(4) e (3) $\Longrightarrow \overline{B'C'} \equiv \overline{B'D} \Longrightarrow \Delta B'C'D$ é isósceles de base $\overline{C'D} \Longrightarrow \hat{C}' \equiv \hat{D}$ (6)

(5) e (6) $\Longrightarrow \hat{C} \equiv \hat{C}'$

Considerando agora os triângulos ABC e $A'B'C'$, temos:

$$(\overline{BC} \equiv \overline{B'C'},\ \hat{C} \equiv \hat{C}',\ \hat{A} \equiv \hat{A}') \xrightarrow{LAA_0} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

EXERCÍCIOS

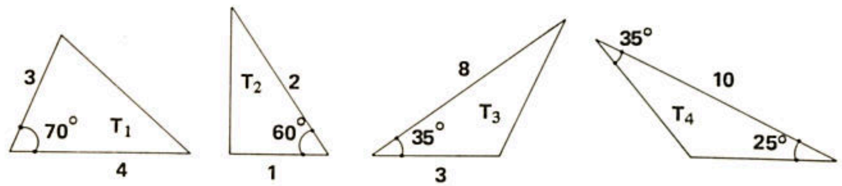
I.49 Classificar em verdadeiro (V) ou falso (F):

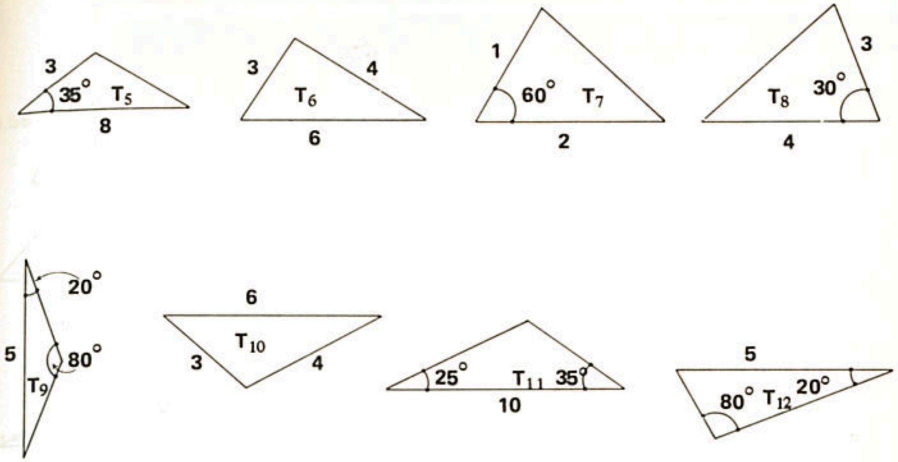
a) Todo triângulo isósceles é equilátero.
b) Todo triângulo equilátero é isósceles.
c) Um triângulo escaleno pode ser isósceles.
d) Todo triângulo isósceles é triângulo acutângulo.
e) Todo triângulo retângulo é triângulo escaleno.
f) Existe triângulo retângulo e isósceles.
g) Existe triângulo isósceles obtusângulo.
h) Existe triângulo retângulo equilátero.
i) Todo triângulo acutângulo ou é isósceles ou é equilátero.

I.50 Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Todos os triângulos isósceles são congruentes.
b) Todos os triângulos equiláteros são congruentes.
c) Todos os triângulos retângulos são congruentes.
d) Todos os triângulos retângulos isósceles são congruentes.
e) Todos os triângulos acutângulos são congruentes.

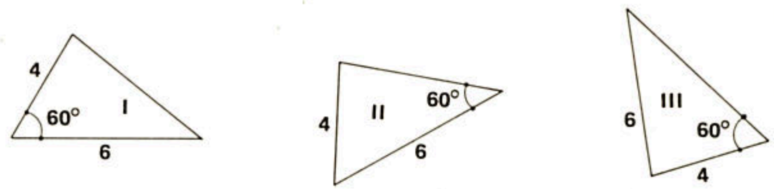
I.51 Considere os triângulos T_1, T_2, ... etc abaixo. Assinale os pares de triângulos congruentes e indique o caso de congruência.



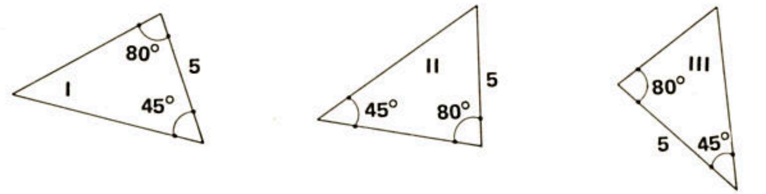


I.52 Nos casos a), b) e c) abaixos selecione os triângulos congruentes e indique o caso de congruência:

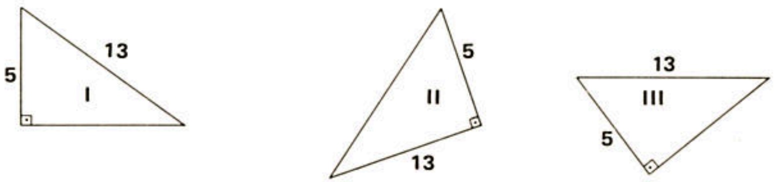
a)



b)



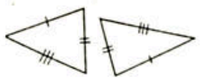
c)



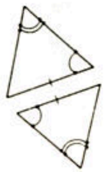
1.53 Os pares de triângulos abaixo são congruentes. Indique o caso de congruência:

a)

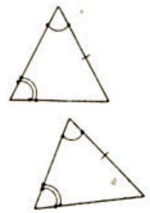
b)



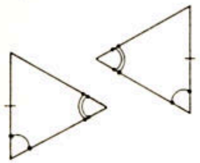
c)



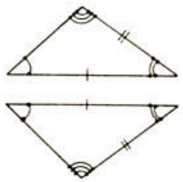
d)



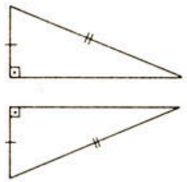
e)



f)

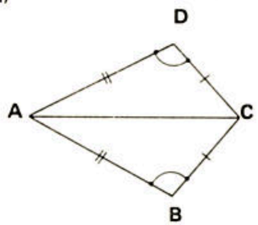


g)

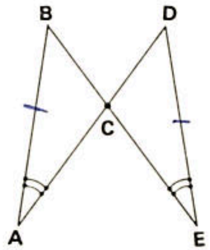


1.54 Indique nas figuras abaixo, os triângulos congruentes, citando o caso de congruência.

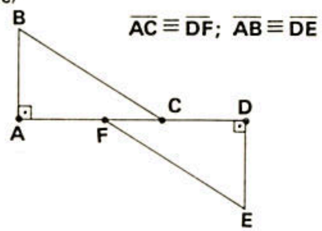
a)



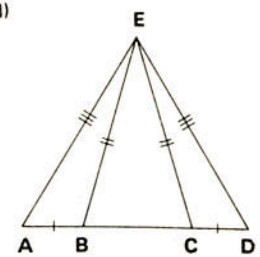
b)



c)

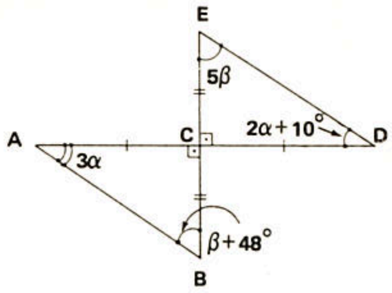


d)

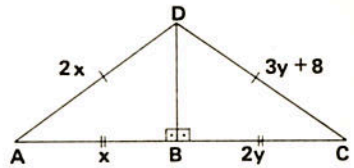


1.55 Por que ALL ou LLA não é caso de congruência entre triângulos?

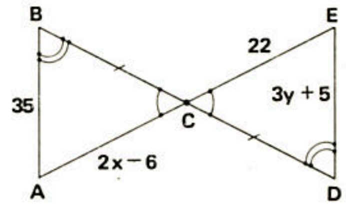
1.56 Na figura o triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *CDE*. Determine o valor de α e β.



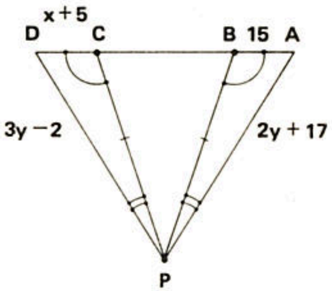
1.57 Na figura ao lado, o triângulo *ABD* é congruente ao triângulo *CBD*. Calcular *x* e *y*.



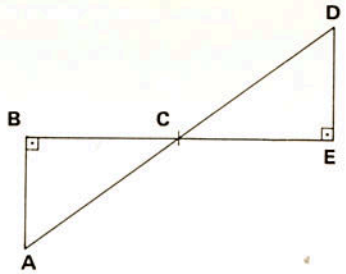
1.58 Na figura, o triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *CDE*. Determine o valor de *x* e *y* e a razão entre os perímetros desses triângulos.



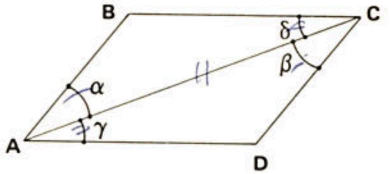
1.59 Na figura, o triângulo *PCD* é congruente ao triângulo *PBA*. Determine o valor de *x* e *y* e a razão entre os perímetros dos triângulos *PCA* e *PBD*.



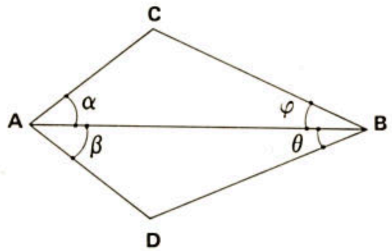
I.60 Na figura ao lado, sabendo-se que C é ponto médio de BE, provar que os triângulos ABC e DEC são congruentes.



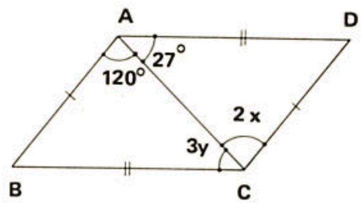
I.61 Na figura ao lado, sabendo-se que $\alpha \equiv \beta$ e $\gamma \equiv \delta$, provar que os triângulos ABC e CDA são congruentes.



I.62 Se $\alpha \equiv \beta$ e $\varphi \equiv \theta$, demonstre que o triângulo ABC é congruente ao triângulo ABD.

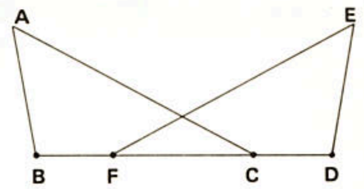


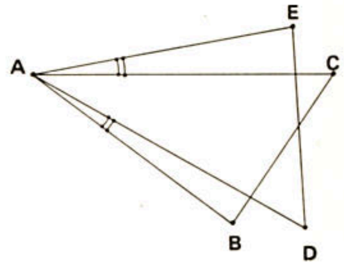
I.63 Na figura ao lado, os triângulos ABC e CDA são congruentes. Calcular x e y.



I.64 Num triângulo isósceles o semi perímetro vale $7,5\ m$. Calcular os lados desse triângulo, sabendo-se que a soma dos lados congruentes é o quádruplo da base.

I.65 Na figura ao lado, sendo $\overline{BF} \equiv \overline{CD}$, $m(A\hat{B}C) = m(F\hat{D}E)$, $m(B\hat{A}C) = m(D\hat{E}F)$, prove que $\overline{AC} \equiv \overline{EF}$.





I.66 Na figura abaixo, sendo $\overline{AB} \equiv \overline{AE}$, $m(B\hat{A}D) = m(C\hat{A}E)$, $m(A\hat{B}C) = 90°$ e $m(A\hat{E}D) = 90°$, prove que $\overline{BC} \equiv \overline{DE}$.

I.67 Sejam quatro pontos A, B, C, D dispostos sobre uma mesma reta r, nessa ordem e tal que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sejam congruentes. Demonstre que os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ tem o mesmo ponto médio.

I.68 Sejam quatro pontos A, B, C, D dispostos sobre uma mesma reta, nessa ordem e tal que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ sejam congruentes. Demonstre que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes e que os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ tem o mesmo ponto médio.

I.69 Sejam M e N os pontos médios respectivamente dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, contidos numa mesma reta, sendo $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$. Demonstre que $\overline{MN}$ é congruente a $\overline{AB}$.

I.70 Dados três pontos A, B, C sobre uma mesma reta, consideremos M e N os pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Demonstre que $\overline{MN}$ é igual à semi-soma ou à semi-diferença dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

I.71 Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta, e M o seu ponto médio. Consideremos um ponto P entre os pontos M e B. Demonstre que $\overline{PM}$ é dado pela semi-diferença positiva entre $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$.

I.72 Consideremos sobre uma reta r um segmento fixo $\overline{AB}$ e um ponto móvel P. Seja M o ponto médio de $\overline{AP}$ e N o ponto médio de $\overline{BP}$. O que podemos dizer a respeito do segmento $\overline{MN}$?

I.73 Dois ângulos adjacentes somam $136°$. Qual a medida do ângulo formado pelas suas bissetrizes?

I.74 As bissetrizes de dois ângulos consecutivos formam um ângulo de $52°$. Se um deles mede $40°$, qual é a medida do outro?

I.75 Demonstre que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são semi-retas opostas.

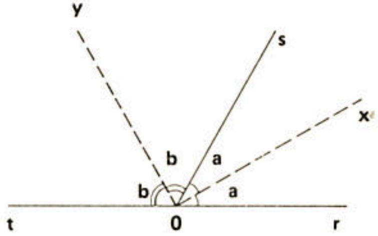
I.76 Demonstre que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares formam ângulo reto.

Solução

Hipótese

$\left.\begin{array}{l} r\hat{O}s \text{ e } s\hat{O}t \text{ adjacentes e suplementares} \\ Ox \text{ e } Oy \text{ respectivas bissetrizes.} \end{array}\right\} \Longrightarrow x\hat{O}y \text{ é reto}$

Tese



Demonstração

Sejam a a medida de $r\hat{O}x$ e $x\hat{O}s$ e b a medida de $s\hat{O}y$ e $y\hat{O}t$.

$a + a + b + b = 180^\circ \Longrightarrow 2a + 2b = 180^\circ \Longrightarrow a + b = 90^\circ \Longrightarrow x\hat{O}y$ é reto.

I.77 Demonstre que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e complementares formam um ângulo de *45°*.

I.78 Demonstre que a mediana relativa à base de um triângulo isósceles é também bissetriz.

I.79 Prove que a bissetriz relativa à base de um triângulo isósceles é também mediana.

III. DESIGUALDADES NOS TRIÂNGULOS

60. Ao maior lado opõe-se o maior ângulo

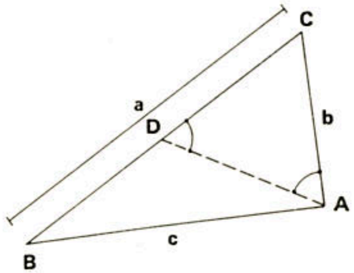
Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o *maior* deles está oposto ao *maior* lado.

Hipótese *Tese*

$\overline{BC} > \overline{AC} \Longrightarrow B\hat{A}C > A\hat{B}C$

ou

$a > b \Longrightarrow \hat{A} > \hat{B}$



Demonstração

Consideremos D em $\overline{BC}$ tal que $\overline{CD} \equiv \overline{CA}$.

$\left.\begin{array}{l} \overline{BC} > \overline{AC} \Longrightarrow D \text{ é interno a } C\hat{A}B \Longrightarrow C\hat{A}B > C\hat{A}D \\ \Delta CAD \text{ isósceles de base } \overline{AD} \Longrightarrow C\hat{A}D \equiv C\hat{D}A \end{array}\right\} \Longrightarrow C\hat{A}B > C\hat{D}A \quad (1)$

$C\hat{D}A$ é ângulo externo no $\Delta ABD \Longrightarrow C\hat{D}A > A\hat{B}D = A\hat{B}C \quad (2)$

De (1) e (2) vem:

$C\hat{A}B > A\hat{B}C$ ou seja $\hat{A} > \hat{B}$.

61. Ao maior ângulo opõe-se o maior lado

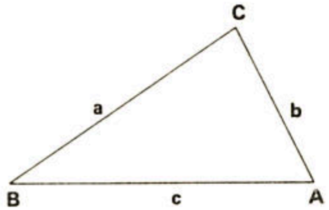
Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o *maior* deles está oposto ao *maior* lado.

Hipótese *Tese*

$B\hat{A}C > A\hat{B}C \Longrightarrow \overline{BC} > \overline{AC}$

ou

$\hat{A} > \hat{B} \Longrightarrow a > b$



Demonstração

Há três possibilidades para $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$:

1ª) $\overline{BC} < \overline{AC}$ ou 2ª) $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$ ou 3ª) $\overline{BC} > \overline{AC}$

1ª) Se $\overline{BC} < \overline{AC}$, então, pelo teorema anterior, $\hat{A} < \hat{B}$ o que é contra a hipótese.

2ª) Se $\overline{BC} \equiv \overline{AC}$, então, pelo teorema do triângulo isósceles, $\hat{A} \equiv \hat{B}$, o que é contra a hipótese.

Logo, por exclusão tem-se que:

$\overline{BC} > \overline{AC}$.

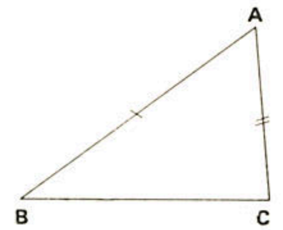
$$\overline{B'E} + \overline{EC'} > \overline{B'C'} \quad (9)$$

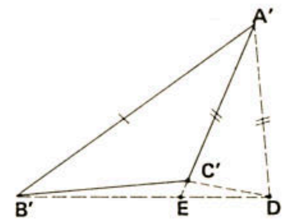
Somando, membro a membro, (8) e (9) vem:

$$\overline{B'E} + \overline{ED} > \overline{B'C'}, \text{ ou seja, } \overline{B'D} > \overline{B'C'}$$

Com (6) resulta que $\overline{BC} > \overline{B'C'}$.

2º caso: C' está entre A e E.





Teorema do ângulo externo no $\Delta A'C'D \Longrightarrow$

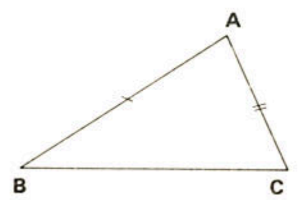
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow E\hat{C}'D > A'\hat{D}C' \xrightarrow{(7)} E\hat{C}'D > A'\hat{C}'D \\ \text{Teorema do ângulo externo no } \Delta C'DE \Rightarrow A'\hat{C}'D > C'\hat{D}E \end{array}\right\} \Rightarrow E\hat{C}'D > C'\hat{D}E \Rightarrow$$

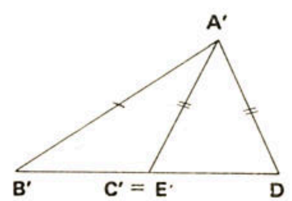
$$\Longrightarrow \overline{ED} > \overline{EC'}$$

A última desigualdade corresponde à (8) do 1º caso. As demais passagens são as mesmas lá usadas. Donde se conclui que, também neste caso

$$\overline{BC} > \overline{B'C'}$$

3º caso: O ponto E coincide com C'.





Neste caso, C' está entre B' e D e temos:

$$\overline{BD} > \overline{B'C'} \xrightarrow{(6)} \overline{BC} > \overline{B'C'}$$

b) Se dois lados de um triângulo são ordenadamente congruentes a dois lados de um segundo triângulo e se o lado restante é maior no primeiro triângulo que no segundo, então o ângulo oposto a este lado no primeiro triângulo é maior que o ângulo oposto ao lado restante no segundo.

ou seja:

Dados os triângulos ABC e $A'B'C'$ com $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, se $\overline{BC} > \overline{B'C'}$, então $\hat{A} > \hat{A}'$

ou ainda

Hipótese	*Tese*
$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, $\overline{BC} > \overline{B'C'} \Longrightarrow$	$\hat{A} > \hat{A}'$

Demonstração

Há três possibilidades para os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$:

1ª) $\hat{A} < \hat{A}'$ 2ª) $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ 3ª) $\hat{A} > \hat{A}'$

1ª) Se $\hat{A} < \hat{A}'$ pelo teorema anterior $\overline{BC} < \overline{B'C'}$ o que é contra a hipótese.

2ª) Se $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ pelo caso LAL os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes e então $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ o que é contra a hipótese.

Logo, por exclusão tem-se que:

$$\hat{A} > \hat{A}'.$$

EXERCÍCIOS

I.80 Com segmentos de *8 cm, 5 cm* e *18 cm* pode-se construir um triângulo? Porque?

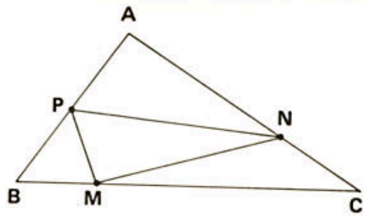
I.81 Dois lados, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ de um triângulo ABC medem respectivamente *8 cm* e *21 cm*. Quanto poderá medir o terceiro lado, sabendo que é múltiplo de *6*?

I.82 Determine o intervalo de variação de x sabendo que os lados de um triângulo são expressos por $x + 10$, $2x + 4$ e $20 - 2x$.

I.83 Se dois lados de um triângulo isósceles medem *38 cm* e *14 cm*, qual poderá ser a medida do terceiro lado?

I.84 O lado $\overline{AB}$ de um triângulo ABC é expresso por um número inteiro. Determine o seu valor máximo sabendo que os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medem respectivamente *27 cm* e *16 cm* e que $\hat{C} < \hat{A} < \hat{B}$.

I.85 Demonstre que o perímetro do triângulo *MNP* é menor que o perímetro do triângulo *ABC* da figura ao lado.



I.86 Se m_a é a mediana relativa ao lado a de um triângulo de lados a, b e c então:

$$\left|\frac{b - c}{2}\right| < m_a < \frac{b + c}{2}$$

I.87 Prove que a soma das medianas de um triângulo é menor que o perímetro e maior que o semi-perímetro.

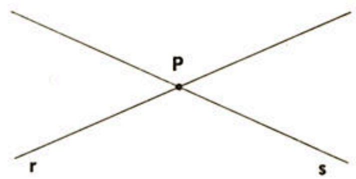
CAPÍTULO V

PARALELISMO

65. Retas concorrentes – definição

Duas retas são *concorrentes* se, e somente se, elas têm um único ponto comum

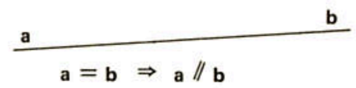
$$r \cap s = \{P\}$$



66. Retas paralelas – definição

Duas retas são paralelas (símbolo: //) se, e somente se,

são coincidente (iguais)



ou

são coplanares e não têm nenhum ponto comum

$$(a \subset \alpha,\ b \subset \alpha,\ a \cap b = \emptyset) \Rightarrow a \parallel b$$