74. Ângulo externo

Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

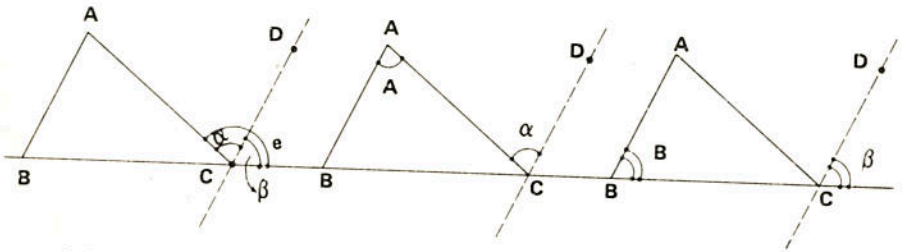
no

Hipótese — *Tese*

e é angulo externo adjacente a $\hat{C} \Longrightarrow \hat{e} = \hat{A} + \hat{B}$

Demonstração

Por C conduzimos a reta $\overleftrightarrow{CD}$ paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$ determinando os ângulos α e β caracterizados na figura



$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Longrightarrow \alpha \equiv \hat{A}$ (alternos)

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Longrightarrow \beta \equiv \hat{B}$ (correspondentes)

Somando as duas relações acima vem:

$$\underbrace{\alpha + \beta}_{\hat{e}} = \hat{A} + \hat{B}$$
$$\hat{e} = \hat{A} + \hat{B}$$

75. Soma dos ângulos de um triângulo

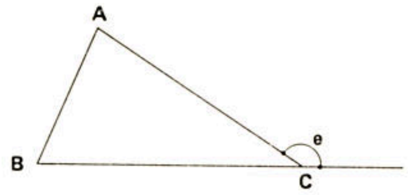
A soma dos ângulos de qualquer triângulo é igual a dois ângulos retos.

Hipótese — *Tese*

ΔABC é um triângulo $\Longrightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2$ retos

Demonstração

Sendo e o ângulo externo adjacente a C e aplicando o item anterior, vem:



$$\hat{e} + \hat{C} = 180°$$
$$\underbrace{\hat{A} + \hat{B}}_{=\hat{e}} + \hat{C} = 180°$$

$\hat{e}$ e $\hat{C}$ são suplementares $\Rightarrow \hat{e} + \hat{C} = 2$ retos
teorema anterior $\Rightarrow \hat{e} = \hat{A} + \hat{B}$
$\Bigg\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2$ retos.

76. Nota

Considerando as medidas dos ângulos, temos:

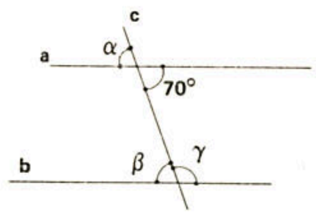
$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$$

que representaremos simplesmente por:

$$\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°.}$$

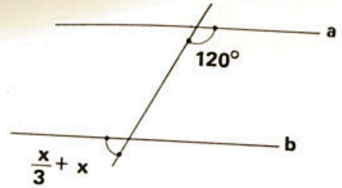
EXERCÍCIOS

I.88 Na figura, sendo $a \parallel b$, calcule $\alpha + \beta - \gamma$.

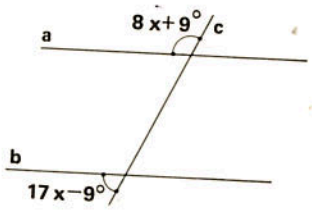


I.89 A soma dos quatro ângulos agudos formados por duas retas paralelas cortadas por uma reta transversal é igual a $80°$. Determinar o ângulo obtuso.

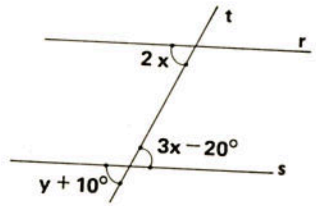
I.90 Sendo a paralela a b, calcule x.



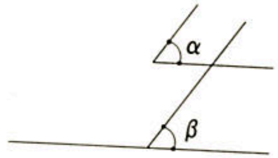
I.91 Na figura, sendo $a \parallel b$, calcule x.



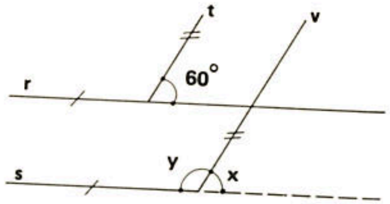
I.92 Na figura ao lado, sendo $r \parallel s$, calcule x e y.



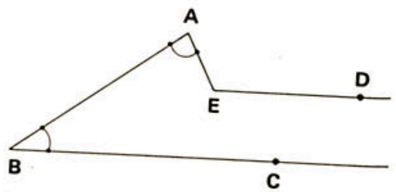
I.93 Na figura temos os ângulos α e β de lados respectivamente paralelos. Sendo $\alpha = 8x$ e $\beta = 2x + 30°$, determine o suplemento de β.



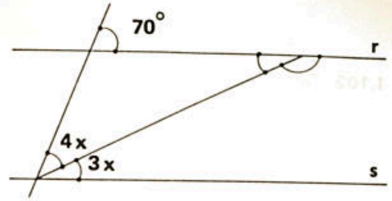
I.94 Calcule o valor de $x + y$, sendo $r \parallel s$ e $t \parallel v$.



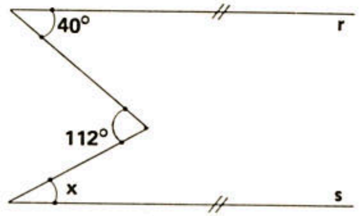
I.95 Na figura ao lado, $\overline{ED}$ é paralela a $\overline{BC}$. Sendo $B\hat{A}E$ igual a $80°$ e $A\hat{B}C$ igual a $35°$, calcule a medida de $A\hat{E}D$.



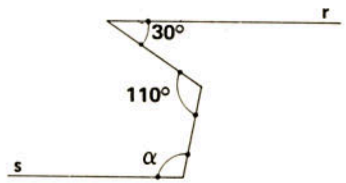
I.96 Determinar o valor de x, sendo $r \parallel s$.



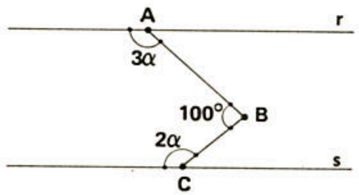
I.97 Calcule o valor de x, sendo $r \parallel s$.



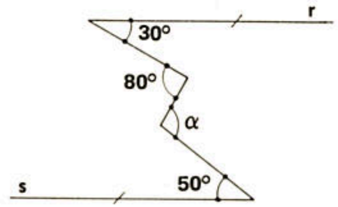
I.98 Se $r \parallel s$, calcule α.



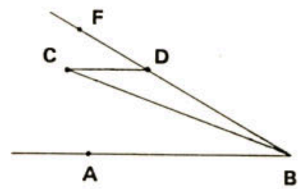
I.99 Na figura ao lado, as retas r e s são paralelas. Calcule α.



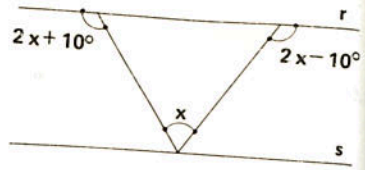
I.100 Na figura, calcule a medida do ângulo α, sendo $r \parallel s$.



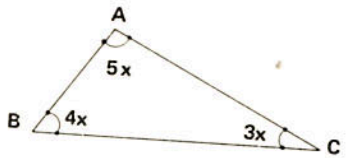
I.101 Na figura $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$. Sendo $C\hat{D}B = 150°$ e $A\hat{B}C = 25°$, calcule $C\hat{B}D$.



I.102 Determinar o valor de x, sendo $r \parallel s$.

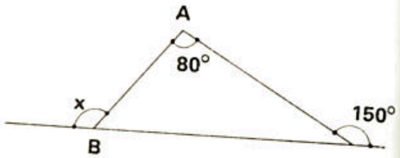


I.103 Calcule x no triângulo ABC da figura.

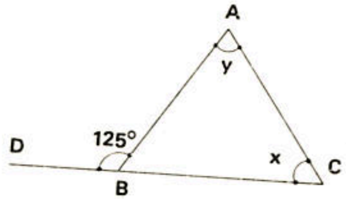


I.104 Os ângulos internos de um triângulo são proporcionais a 2, 3 e 4 respectivamente. Determine a medida do maior deles.

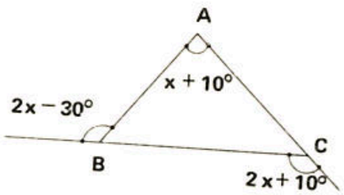
I.105 No triângulo ABC calcule x.



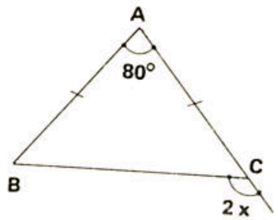
I.106 No triângulo ABC, calcule o valor de x e y, sendo $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$.



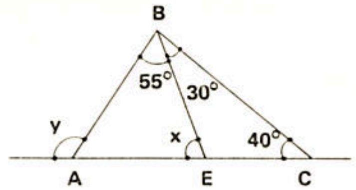
I.107 No triângulo ABC da figura calcule x.



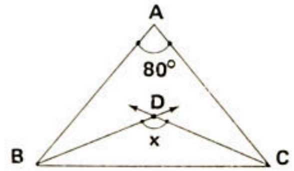
I.108 Na figura, o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$. Calcule o valor de x.



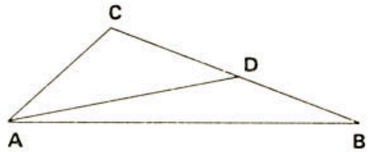
I.109 Calcule x e y indicados na figura ao lado.



I.110 A figura mostra um triângulo ABC, isósceles, de base $\overline{BC}$. Sendo $\overline{BD}$ bissetriz de $A\hat{B}C$ e $\overline{CD}$ bissetriz de ACB, calcule o valor de x.



I.111 O triângulo ACD da figura é isósceles de base $\overline{AD}$. Sendo $42°$ a medida do ângulo $B\hat{A}D$ e $20°$ a medida do ângulo $A\hat{B}C$, calcule a medida do ângulo $A\hat{C}D$.

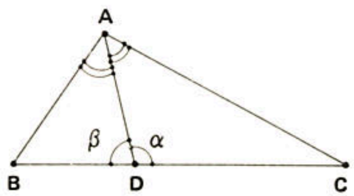


I.112 Um ângulo externo da base de um triângulo isósceles é os $\frac{5}{4}$ do ângulo do vértice. Calcular os ângulos desse triângulo.

I.113 Num triângulo isósceles ABC, o ângulo do vértice A vale $\frac{1}{10}$ da soma dos ângulos externos em B e C. Sendo $\overline{BC}$ a base do triângulo, determine o ângulo $\hat{A}$.

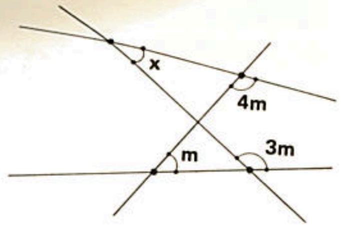
I.114 Num triângulo isósceles ABC de base $\overline{BC}$, o ângulo obtuso formado pelas bissetrizes dos ângulos da base excede o ângulo do vértice de $76°$. Determine o ângulo do vértice desse triângulo.

I.115 Prove que no triângulo ABC, da figura, vale a relação $\alpha - \beta = \hat{B} - \hat{C}$, sendo $\overline{AD}$ bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$.



I.116 Num triângulo isósceles ABC, o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos da base é o quíntuplo do ângulo do vértice. Determine a medida do ângulo do vértice.

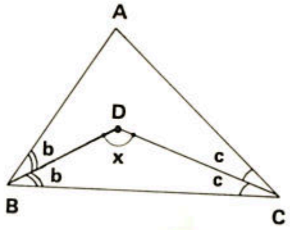
I.117 Na figura ao lado, calcule o valor de x em função de m.



I.118 Num triângulo ABC qualquer o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos internos em B e C é igual ao suplemento do complemento da metade do ângulo do vértice A.

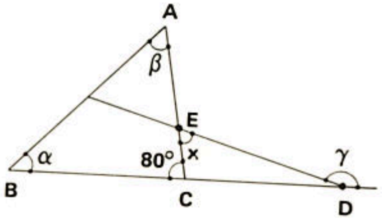
Solução

Com os elementos caracterizados na figura, temos:



$$\left.\begin{array}{l} \Delta DBC:\ x + b + c = 180^\circ \implies x = 180^\circ - (b + c) \\ \\ \Delta ABC:\ 2b + 2c + \hat{A} = 180^\circ \implies b + c = 90^\circ - \dfrac{\hat{A}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}).$$

I.119 Na figura, calcule o ângulo x, sendo α o triplo de β e γ o sêxtuplo de β.



I.120 Em um triângulo isósceles ABC, o ângulo do vértice A é igual à oitava parte do ângulo obtuso formado pelas bissetrizes dos ângulos da base do triângulo. Determine a medida do ângulo do vértice A.

I.121 Um ângulo externo do vértice de um triângulo isósceles mede 150°. Determine:

a) os ângulos do triângulo.
b) O ângulo obtuso formado pelas bissetrizes dos ângulos da base do triângulo.
c) Os ângulos formados pela bissetriz de um dos ângulos da base e pela bissetriz do ângulo do vértice.

I.122 Determine as medidas dos três ângulos de um triângulo sabendo que o segundo é os $\frac{3}{2}$ do primeiro e que o terceiro é a semi-soma dos dois primeiros.

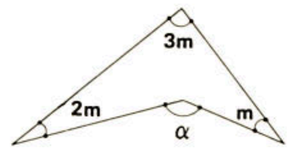
I.123 Os três ângulos de um triângulo são tais que o segundo mede 28° menos que o primeiro e o terceiro 10° mais que o primeiro. Determine os três ângulos do triângulo.

I.124 Em um triângulo isósceles o ângulo do vértice é a metade de cada um dos ângulos da base. Determinar os três ângulos do triângulo.

colaterais

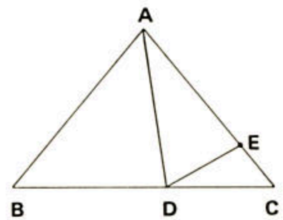
I.125 Determine o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos ~~alternos~~ internos de duas retas paralelas interceptadas por uma transversal qualquer.

I.126 Na figura, determine a medida do ângulo α em função de m.

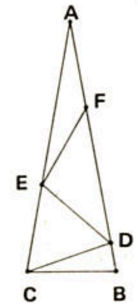


I.127 Num triângulo ABC qualquer o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos externos em B e C é igual ao complemento da metade do ângulo do vértice A do triângulo.

I.128 Na figura, sendo $\overline{AB}$ congruente a $\overline{AC}$, $\overline{AE}$ congruente a $\overline{AD}$, calcule a medida do ângulo $C\hat{D}E$, dado $B\hat{A}D = 48^\circ$.



I.129 Determinar a medida do ângulo do vértice A do triângulo isósceles ABC, sabendo que os segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$ são congruentes.



Demonstração

Se $\overline{PD} < \overline{PC}$ por congruência de triângulos (para $\overline{PD} \equiv \overline{PC}$) ou pelo caso anterior (para $\overline{PD} < \overline{PC}$) teríamos $P\hat{D}P' > P\hat{C}P'$, o que é um absurdo contra a hipótese.

Logo,

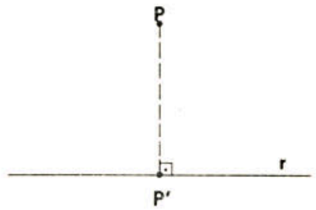
$$\overline{PD} > \overline{PC}.$$

89. Distância entre um ponto e uma reta

A distância de um ponto à uma reta é a distância deste ponto à projeção dele sobre a reta.

distância entre P e r é a distância entre P e P' onde P' é a projeção de P sobre r.

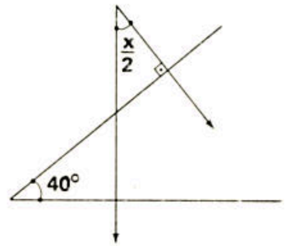
$$d_{P,r} = d_{P,P'}$$



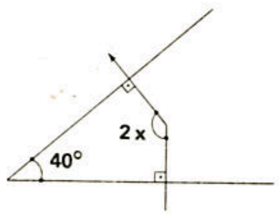
Se o ponto pertence à reta a distância entre eles é *nula*.

EXERCÍCIOS

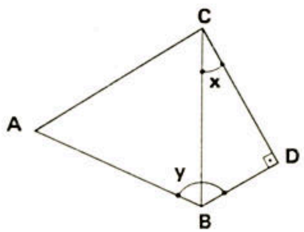
I.130 Na figura, calcule o valor de x.



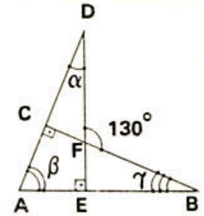
I.131 Na figura, calcule o valor de x.



I.132 Na figura, o triângulo ABC é equilátero e o triângulo CDB é isósceles. Calcule o valor de $2x + y$.



I.133 Na figura, determine a medida de α, β e γ.



I.134 Ângulos de lados respectivamente paralelos e Ângulos de lados respectivamente perpendiculares.

1ª Parte

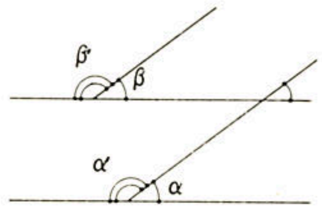
Dois ângulos de lados respectivamente paralelos são congruentes ou suplementares.

Solução

Considerando os ângulos de medidas α e α' adjacentes suplementares e β e β' adjacentes suplementares (vide figura).

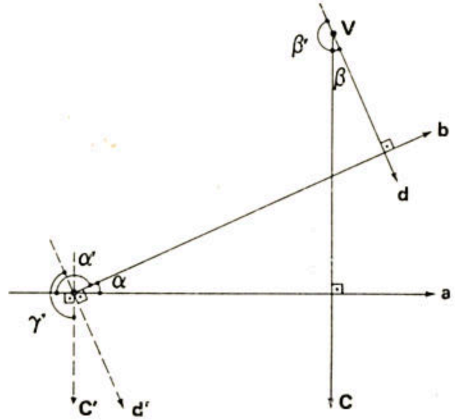
Pelo paralelismo, temos:

$$\alpha = \alpha'$$
$$\beta = \beta'$$
$$\alpha + \beta' = 180°$$
$$\alpha' + \beta = 180°$$



2ª Parte

Dois ângulos de lados respectivamente perpendiculares são congruentes ou suplementares.



Sejam os ângulos $a\hat{O}b$ e $c\hat{V}d$ com $Oa \perp Vc$, $Ob \perp Vd$ com as medidas α e β sendo α' e β' as medidas dos respectivas adjacentes suplementares conforme indica a figura.

Se por O conduzirmos $Oc' \perp Vc$ e $Od' \perp Vd$ surgem os ângulos $c'\hat{O}d'$ de medidas γ e seu adjacente suplementar de medida γ'.

Pela 1ª parte:

$$\gamma = \beta, \quad \gamma' = \beta', \quad \gamma + \beta = 180°, \quad \gamma' + \beta = 180°$$

Notando que $a\hat{O}c'$ e $b\hat{O}d'$ são retos vem:

$$\left.\begin{array}{l} a\hat{O}d' = 90° - \alpha \\ a\hat{O}d' = 90° - \gamma \implies a\hat{O}d' = 90° - \beta \end{array}\right\} \implies \alpha = \beta$$

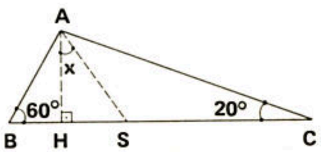
Então temos:

$$\alpha = \beta, \quad \alpha' = \beta', \quad \alpha + \beta' = 180°, \quad \alpha' + \beta = 180°$$

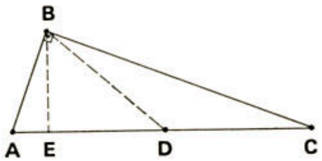
I.135 Determine a medida do menor ângulo formado pelas bissetrizes externas relativas aos vértices B e C de um triângulo ABC, sabendo que o ângulo $\hat{A}$ mede $76°$.

I.136 Determine os ângulos agudos de um triângulo retângulo, sabendo que a mediana e a bissetriz relativas à hipotenusa formam um ângulo de $35°$.

I.137 No triângulo ABC da figura ao lado, $\hat{B} = 60°$ e $\hat{C} = 20°$. Qual o valor do ângulo $H\hat{A}S$ formado pela altura $\overline{AH}$ e a bissetriz $\overline{AS}$?

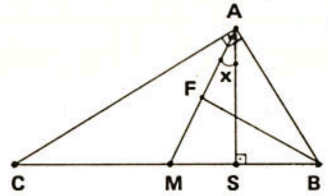


I.138 Na figura, $\overline{BD}$ é mediana do triângulo retângulo ABC ($\hat{B} = 90°$) e $\overline{BE} \perp \overline{AC}$. Se $\hat{A} = 70°$ calcule a medida de $E\hat{B}D$.

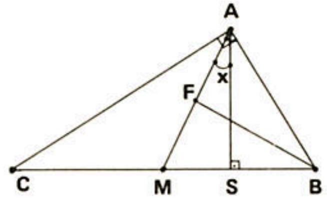


I.139 Em um triângulo retângulo qualquer, o ângulo formado pela altura e mediana relativa à hipotenusa é igual ao módulo da diferença dos ângulos adjacentes à hipotenusa.

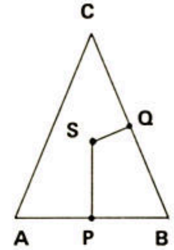
I.140 No triângulo retângulo ABC da figura a mediana $\overline{AM}$ forma com a bissetriz $\overline{BF}$ os ângulos adjacentes $B\hat{F}A$ e $B\hat{F}M$. Exprimir $B\hat{F}M$ em função de $\hat{B}$.



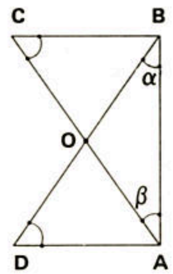
I.141 Num triângulo retângulo ABC a altura $\overline{AS}$ forma com a mediana $\overline{AM}$ um ângulo de $22°$. Calcule B e C.



I.142 Num triângulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$ o ângulo $\hat{B}$ é igual a $\frac{2}{3}$ do ângulo $\hat{S}$, formado pelas mediatrizes $\overline{QS}$ e $\overline{PS}$. Calcular os ângulos desse triângulo.



I.142 Se $\overline{DA} \perp \overline{AB}$, $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ e $\alpha \equiv \beta$, demonstre que $\Delta ABD \equiv \Delta ABC$.



I.144 Num triângulo retângulo BAC a altura e a mediana relativas à hipotenusa $\overline{BC}$ formam um ângulo de medida α. Determine a diferença, em módulo, dos ângulos agudos desse triângulo.

I.145 As bissetrizes internas dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC formam um ângulo de $116°$. Determine a medida do menor ângulo formado pelas alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ desse triângulo.

I.146 Prove que a altura relativa a qualquer lado de um triângulo é menor que a média aritmética dos lados adjacentes.

I.147 Demonstre que a soma das três alturas de um triângulo acutângulo é menor que o perímetro e maior que o semi-perímetro desse triângulo.

I.148 Considere um triângulo e um ponto interior a esse triângulo. Prove que a soma das distâncias do ponto interior aos vértices do triângulo é menor que o perímetro do triângulo.

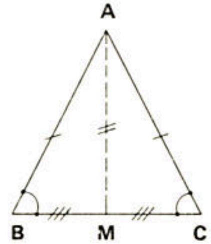
I.149 Demonstre que em todo triângulo isósceles, sempre temos duas alturas congruentes.

I.150 Sendo ABC um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ e M um ponto da base, provar que:

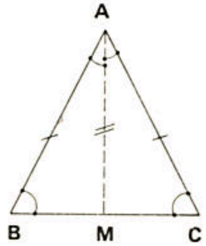
1º) Se $\overline{AM}$ é mediana, então $\overline{AM}$ é bissetriz e altura.
2º) Se $\overline{AM}$ é bissetriz, então $\overline{AM}$ é mediana e altura.
3º) Se $\overline{AM}$ é altura, então $\overline{AM}$ é mediana e bissetriz.

Solução

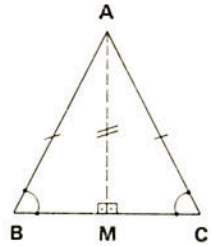
Considerando que num triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes e a condição de cada hipótese, temos:



1º) $\overline{AM}$ é mediana
Pelo caso LLL ou pelo caso LAL
$\Delta ABM = \Delta ACM$
e daí sai que
AM é bissetriz e $\overline{AM}$ é altura



2º) $\overline{AM}$ é bissetriz
Pelo caso LAL ou pelo caso ALA,
$\Delta ABM = \Delta ACM$
e daí sai que
$\overline{AM}$ é mediana e $\overline{AM}$ é altura



3º) $\overline{AM}$ é altura
Pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos ou pelo caso LAA_o
$\Delta ABM = \Delta ACM$
e daí sai que
$\overline{AM}$ é mediana e $\overline{AM}$ é bissetriz.

I.151 Prove que as bissetrizes dos ângulos agudos de um triângulo retângulo formam um ângulo que independe dos valores desses ângulos agudos.

I.152 Considere o triângulo ABC onde $\overline{AB} = \overline{AC} = 5\ cm$ e $\overline{BC} = 7\ cm$. Sobre o lado $\overline{BC}$ tomamos um ponto D tal que $\overline{BD} = 3\ cm$ e pelo ponto D traçamos $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$ respectivamente paralelos a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$. Calcular o perímetro de $AEDF$.

I.153 Toda reta que passa pelo ponto médio de um segmento é eqüidistante das extremidades do segmento.

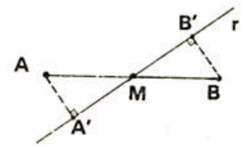
Solução

Hipótese		*Tese*
$\overline{AM} \equiv \overline{MB},\ M \in r$	$\Longrightarrow$	$d_{r,A} = d_{r,B}$

Demonstração

1º) $r \supset \overline{AB}$
$AB \subset r \Longrightarrow d_{r,A} = d_{r,B} =$ distância nula.

2º) $r \not\supset \overline{AB}$ e r não é perpendicular a $\overline{AB}$.
Conduzindo os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ perpendiculares a r com $A', B' \in r$ e observando os triângulos $AA'M$ e $BB'M$, temos:



$\hat{A}' \equiv \hat{B}'$ (reto), $A\hat{M}A' \equiv B\hat{M}B$ (opostos pelo vértice) $\Longrightarrow \hat{A} \equiv \hat{B}$
$(A\hat{M}A' \equiv B\hat{M}B',\ \overline{AM} \equiv \overline{BM},\ \hat{A} \equiv \hat{B}) \Longrightarrow \Delta AA'M \equiv \Delta BB'M \Longrightarrow \overline{AA'} \equiv \overline{BB'} \Rightarrow$
$\Longrightarrow d_{r,A} = d_{r,B}$.

3º) $r \perp \overline{AB}$ por M (r é *mediatriz* de $\overline{AB}$).
Neste caso $A' = B' = M$ e então $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$, ou seja $d_{r,A} = d_{r,B}$.

Nota

Em geral, uma reta que passa pelo ponto médio de um segmento é eqüidistante dos extremos, mas os pontos da reta *não são* eqüidistantes dos extremos.

Em particular, a mediatriz de um segmento é eqüidistante dos extremos e seus pontos *também* são eqüidistantes dos extremos. Para provar esta parte final basta usar o exercício I.150.

I.154 Toda reta eqüidistante dos extremos de um segmento passa pelo ponto médio dele?

I.155 Dados dois pontos A e B distintos e um ponto P fora da reta AB. Como se obtém, no plano os pontos A, B e P, duas retas eqüidistantes de A e B passando por P?