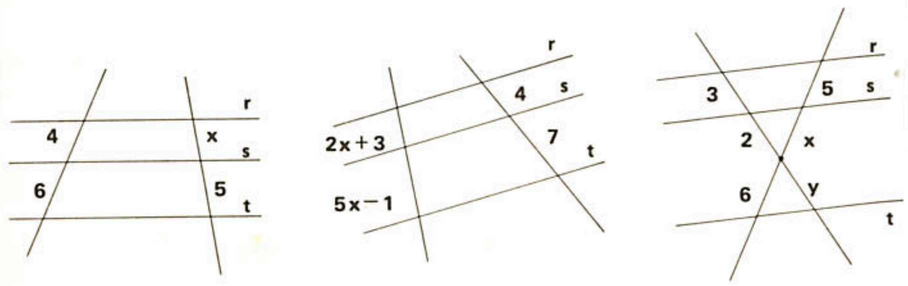
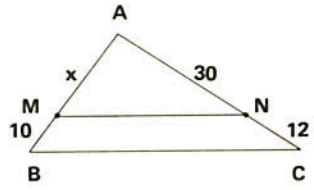
EXERCÍCIOS

I.318 Nas figuras, as retas r, s e t são paralelas. Determine os valores de x e y.

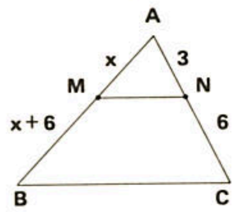
a) b) c)



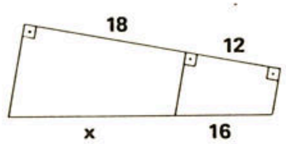
I.319 Na figura, $\overline{MN}$ é paralela à base BC do triângulo ABC. Calcule o valor de x.



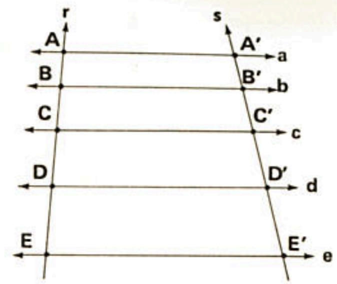
I.320 Na figura, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$. Calcule o valor de $\overline{AB}$.



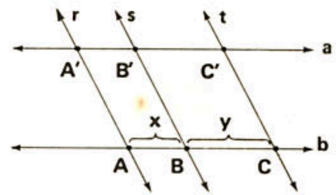
I.321 Na figura, calcule o valor de x.



I.322 Na figura ao lado, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ medem respectivamente $8\ cm$, $10\ cm$, $12\ cm$ e $15\ cm$. Calcular as medidas dos segmentos $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ e $\overline{D'E'}$, sabendo que $\overline{A'E'}$ mede $54\ cm$, e que as retas a, b, c, d, e são paralelas.



I.323 Na figura ao lado $r \parallel s \parallel t$. Determine as medidas x e y sabendo que são proporcionais a 2 e a 3, que o segmento $\overline{A'C'}$ mede $30\ cm$ e que as retas a e b são paralelas.



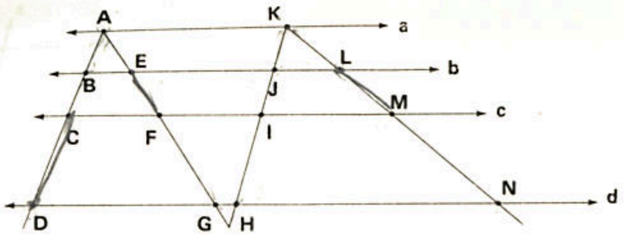
I.324 Um feixe de 4 paralelas determina sobre uma transversal três segmentos que medem $5\ cm$, $6\ cm$ e $9\ cm$, respectivamente. Determinar os comprimentos dos segmentos que este mesmo feixe determina sobre uma outra transversal, sabendo que o segmento compreendido entre a primeira e quarta paralelas mede $60\ cm$.

I.325 Um feixe de cinco paralelas determina sobre uma transversal quatro segmentos que medem respectivamente $5\ cm$, $8\ cm$, $11\ cm$ e $16\ cm$. Calcular os comprimentos dos segmentos que este mesmo feixe determina sobre uma outra transversal, sabendo que o segmento compreendido entre as paralelas extremas mede $60\ cm$.

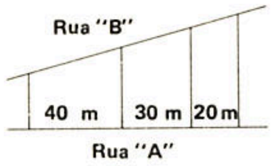
I.326 Um triângulo ABC tem os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medindo $24\ cm$ e $20\ cm$ respectivamente. Sobre o lado $\overline{AC}$, a $6\ cm$ do vértice C, tomamos um ponto M. Determinar a distância de um ponto N situado sobre o lado $\overline{BC}$, até o vértice C, de maneira que $\overline{MN}$ seja paralelo a $\overline{AB}$.

I.327 No triângulo ABC, o lado $\overline{AC}$ mede $32\ cm$ e o lado $\overline{BC}$, $36\ cm$. Por um ponto M situado sobre $\overline{AC}$, a $10\ cm$ do vértice C, traçamos a paralela ao lado $\overline{AB}$, a qual divide $\overline{BC}$ em dois segmentos $\overline{BN}$ e $\overline{CN}$. Determine a medida de $\overline{CN}$.

I.328 Na figura abaixo, onde $a \parallel b \parallel c \parallel d$, temos que: $\overline{AD} + \overline{AG} + \overline{HK} + \overline{KN} = 180\ cm$; $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{\overline{JK}}{\overline{AB}} = \dfrac{9}{5}$, $\dfrac{\overline{KL}}{\overline{AB}} = \dfrac{27}{10}$; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são proporcionais a 2, 3 e 4 respectivamente. Calcule as medidas dos segmentos $\overline{EF}$, $\overline{LM}$ e $\overline{CD}$.



I.329 (MAPOFEI-76). Três terrenos tem frente para a rua *"A"* e para a rua *"B"*, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua *"A"*. Qual a medida de frente para a rua *"B"* de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua é *180 m*.



II. TEOREMAS DAS BISSETRIZES

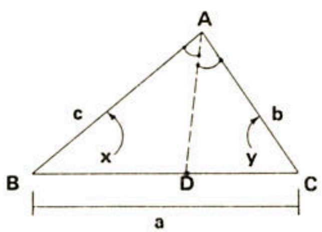
178. Teorema da bissetriz interna

Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos (aditivos) proporcionais aos lados adjacentes.

O enunciado acima deve ser entendido como segue.

Sendo ABC o triângulo de lados a, b e c, $\overline{AD}$ uma bissetriz interna (conforme a figura), $\overline{DB} = x$ e $\overline{DC} = y$, teremos:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

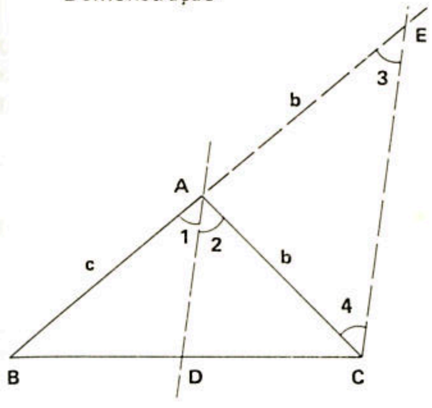


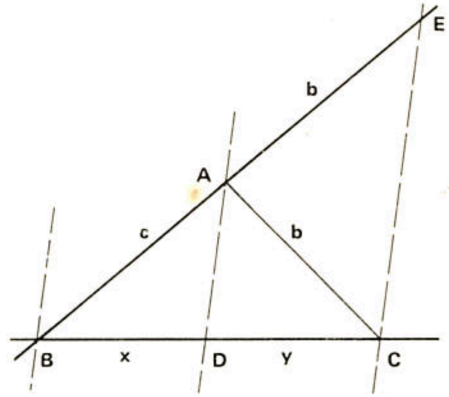
O lado $\overline{BC} = a$ é dividido em dois segmentos aditivos pois $\overline{DB} + \overline{DC} = \overline{BC}$, ou seja, $x + y = a$.

E com esta nomenclatura temos então:

Hipótese		*Tese*
$\overline{AD}$ bissetriz interna do ΔABC	$\Longrightarrow$	$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$

Demonstração





Conduzindo por C uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$ determinando um ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$ ($\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$).

Fazendo $B\hat{A}D = \hat{1}$, $D\hat{A}C = \hat{2}$, $A\hat{E}C = \hat{3}$, e $A\hat{C}E = \hat{4}$, temos:

$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Longrightarrow \hat{1} \equiv \hat{3}$ (correspondentes)
$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Longrightarrow \hat{2} \equiv \hat{4}$ (alternos internos)

Como por hipótese $\hat{1} \equiv \hat{2}$, vem que $\hat{3} \equiv \hat{4}$.

$\hat{3} \equiv \hat{4} \Longrightarrow \Delta ACE$ é isósceles de base $\overline{CE} \Longrightarrow \overline{AE} \equiv \overline{AC} \Longrightarrow \overline{AE} = b$.

Considerando $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas (identificado por $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$) e aplicando o Teorema de Tales, vem:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{x}{c} = \frac{y}{b}.$$

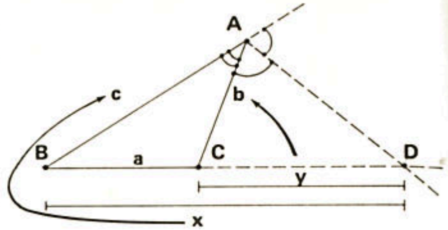
179. Teorema da bissetriz externa

Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos (subtrativos) proporcionais ao lados adjacentes.

O enunciado acima deve ser entendido como segue:

Sendo ABC o triângulo de lados a, b, c, $\overline{AD}$ a bissetriz externa com D na reta $\overleftrightarrow{BC}$ (conforme figura), $\overline{DB} = x$ e $\overline{DC} = y$, teremos:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$



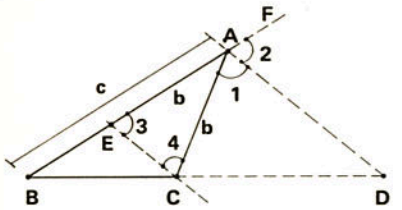
O lado $\overline{BC} = a$ é dividido externamente em segmentos subtrativos pois $\overline{DB} - \overline{DC} = \overline{BC}$, ou seja, $x - y = a$.

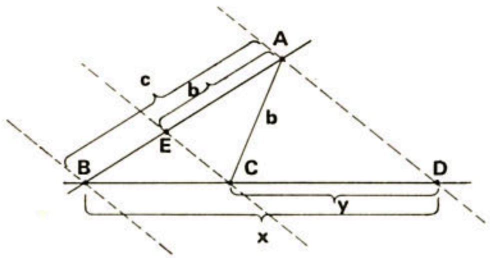
Com esta nomenclatura, temos:

Hipótese — *Tese*

$\overline{AD}$ bissetriz externa do $\Delta ABC \Longrightarrow \dfrac{x}{c} = \dfrac{y}{b}$

Demonstração





Conduzimos por C uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$ determinando um ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$ ($\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$).

Fazendo $C\hat{A}D = \hat{1}$, $D\hat{A}F = \hat{2}$, $A\hat{E}C = \hat{3}$ e $A\hat{C}E = \hat{4}$ temos:

$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Longrightarrow \hat{2} \equiv \hat{3}$ (correspondentes)

$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Longrightarrow \hat{1} \equiv \hat{4}$ (alternos internos).

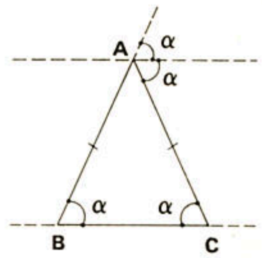
Como por hipótese $\hat{1} \equiv \hat{2}$, vem que $\hat{3} \equiv \hat{4}$.

$\hat{3} \equiv \hat{4} \Longrightarrow \Delta ACE$ é isósceles de base $\overline{CE} \Longrightarrow \overline{AE} \equiv \overline{AC} \Longrightarrow \overline{AE} = b$.

Considerando $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas (identificado por $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$) e aplicando o Teorema de Tales vem:

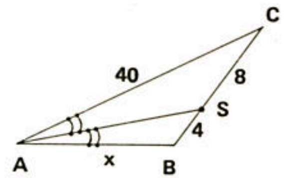
$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

Nota: Se o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$, então a bissetriz do ângulo externo em A é paralela à base $\overline{BC}$ e reciprocamente.

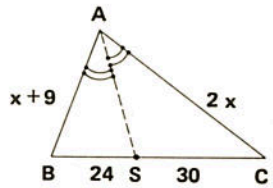


EXERCÍCIOS

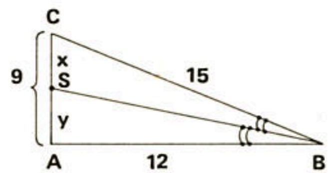
I.330 Na figura, $\overline{AS}$ é bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$. Calcule o valor de x.



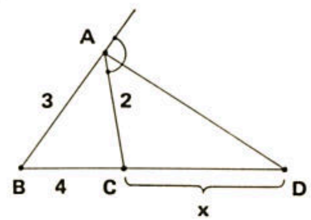
I.331 Na figura, $\overline{AS}$ é bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$. Calcule x.



I.332 Na figura, calcule os valores de x e y respectivamente, sendo $\overline{BS}$ a bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$.

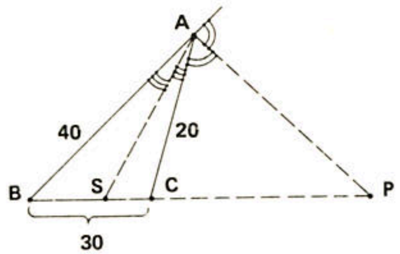


I.333 Na figura, $\overline{AD}$ é bissetriz externa do ângulo $\hat{A}$. Calcule x.



I.334 Os lados de um triângulo medem *5 cm, 6 cm* e *7 cm.* De quanto é preciso prolongar o lado menor para que ele encontre a bissetriz do ângulo externo oposto?

I.335 No triângulo *ABC* da figura abaixo, $\overline{AS}$ é bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ e $\overline{AP}$ é bissetriz externa. Calcule a medida do segmento $\overline{SP}$.



I.336 A bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ de um triângulo *ABC* divide o lado oposto em dois segmentos que medem *9 cm* e *16 cm.* Sabendo que $\overline{AB}$ mede *18 cm,* determine a medida de $\overline{AC}$.

I.337 (MAPOFEI-76). O perímetro de um triângulo *ABC* é *100 m.* A bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ divide o lado oposto $\overline{BC}$ em dois segmentos de *16 m* e *24 m.* Determinar os lados desse triângulo.

I.338 A bissetriz interna $\overline{AD}$ de um triângulo *ABC* divide o lado oposto em dois segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$ de medidas *24 cm* e *30 cm,* respectivamente. Sendo $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente iguais a $2x + 6$ e $3x$, determine o valor de x e as medidas de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

I.339 Determine a diferença (em módulo) dos segmentos determinados pela bissetriz interna do menor ângulo de um triângulo retângulo, cujos catetos medem *6 cm* e *8 cm* respectivamente.

I.340 A bissetriz externa $\overline{AS}$ de um triângulo *ABC* determina sobre o prolongamento do lado $\overline{BC}$ um segmento $\overline{CS}$ de medida y. Sendo os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente o triplo e o dobro do menor segmento determinado pela bissetriz interna $\overline{AP}$ sobre o lado $\overline{BC}$ que medem *20 cm,* determine o valor de y.

I.341 Os lados de um triângulo medem *8 cm, 10 cm* e *12 cm.* De quanto precisamos prolongar o menor lado para que ele encontre a bissetriz do ângulo externo oposto a este lado?

I.342 Consideremos um triângulo *ABC* de *15 cm* de perímetro. A bissetriz externa do ângulo $\hat{A}$ desse triângulo encontra o prolongamento do lado $\overline{BC}$ em um ponto *S.* Sabendo que a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ determina sobre $\overline{BC}$ dois segmentos $\overline{BP}$ e $\overline{PC}$ de medidas *3 cm* e *2 cm,* respectivamente, determine as medidas dos lados do triângulo e a medida do segmento $\overline{CS}$.

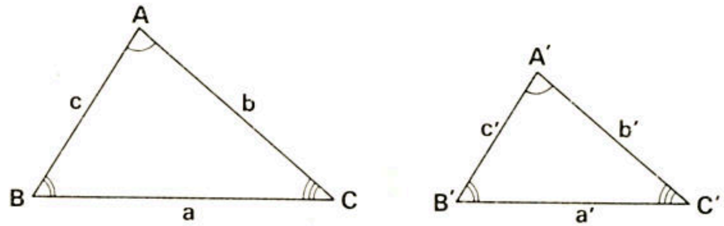
CAPÍTULO XIV

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E POTÊNCIA DE PONTO

I. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

180. Definição

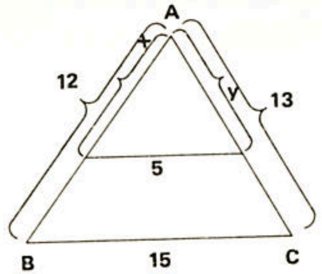
Dois triângulos são semelhantes, se e somente se, possuem os três ângulos *ordenadamente* congruentes e os lados *homólogos* proporcionais.



$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \iff \left(\begin{matrix} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{matrix} \quad e \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \right) \qquad \sim: \text{semelhante}$$

Dois lados homólogos (homo = mesmo, logos = lugar) são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

185. Exemplo



Um triângulo ABC tem os lados $\overline{AB} = 12\ cm$, $AC = 13\ cm$ e $\overline{BC} = 15\ cm$. A reta $\overleftrightarrow{DE}$ paralela ao lado $\overline{BC}$ do triângulo determina um triângulo ADE em que $\overline{DE} = 5\ cm$. Vamos calcular $\overline{AD} = x$ e $\overline{AE} = y$.

Basta aplicar o teorema fundamental:

$$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Longrightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC \Longrightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{13} = \frac{5}{15} \Longrightarrow \left(x = 4 \text{ e } y = \frac{13}{3}\right)$$

Logo, $\overline{AD} = 4\ cm$ e $\overline{AE} = \dfrac{13}{3}\ cm$.

EXERCÍCIOS

I.343 Os três lados de um triângulo ABC medem respectivamente $8\ cm$, $18\ cm$ e $16\ cm$. Determine os lados de um triângulo $A'B'C'$ semelhante a ABC, sabendo que a razão de semelhança do primeiro para o segundo é igual a 3.

I.344 Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. Sabendo-se que o lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC mede $20\ cm$ e que o seu homólogo $\overline{A'B'}$ do triângulo $A'B'C'$ mede $40\ cm$, determine o perímetro do triângulo ABC, sabendo que o perímetro do triângulo $A'B'C'$ é $200\ cm$.

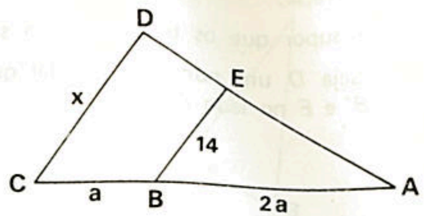
I.345 O perímetro de um triângulo é de $60\ m$, um dos lados tem $25\ m$. Qual o perímetro do triângulo semelhante cujo lado homólogo ao lado dado é de $15\ m$?

I.346 Os lados de um triângulo medem $8{,}4\ cm$, $15{,}6\ cm$ e $18\ cm$. Esse triângulo é semelhante a um triângulo, cujo perímetro mede $35\ cm$. Calcular o maior lado do segundo triângulo.

I.347 Num triângulo ABC os lados medem $\overline{AB} = 4\ cm$, $\overline{BC} = 5\ cm$ e $\overline{AC} = 6\ cm$. Calcule os lados de um triângulo semelhante a ABC, cujo perímetro mede $20\ cm$.

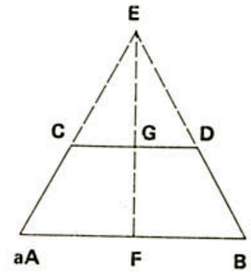
I.348 Um triângulo cujos lados medem $12\ m$, $18\ m$ e $20\ m$ é semelhante a outro cujo perímetro mede $30\ m$. Calcular a medida do menor dos lados do triângulo menor.

I.349 Na figura, $\overline{AB} = 2(\overline{BC})$, $\overline{AE} = 2(\overline{DE})$ e $\overline{BE} = 14$. Calcular $\overline{CD}$, sabendo que $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.



I.350 Prolongando-se os lados não paralelos de um trapézio obtemos um ponto E e os ECD e EAB. Determinar a relação entre as alturas dos dois triângulos sendo $12\ cm$ e $4\ cm$ as medidas das bases do trapézio.

I.351 (MAPOFEI-76). As bases de um trapézio $ABCD$ medem $50\ cm$ e $30\ cm$ e a altura $10\ cm$. Prolongando-se os lados não paralelos, eles se interceptam num ponto E. Determinar a altura $\overline{EF}$ do triângulo ABE e a altura $\overline{EG}$ do triângulo CDE (vide figura).



I.352 Num triângulo isósceles de $20\ cm$ de altura e $\dfrac{50}{3}\ cm$ de base está inscrito um retângulo de $8\ cm$ de altura. Calcular a medida da base do retângulo.

II. CASOS OU CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA

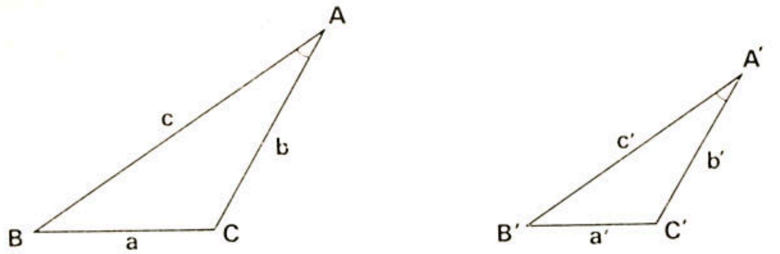
186. 1º caso

"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes".

Hipótese — *Tese*

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC,\ \Delta A'B'C' \\ \hat{A} \equiv \hat{A}',\ \hat{B} \equiv \hat{B}'\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

O esquema deste caso é o que segue



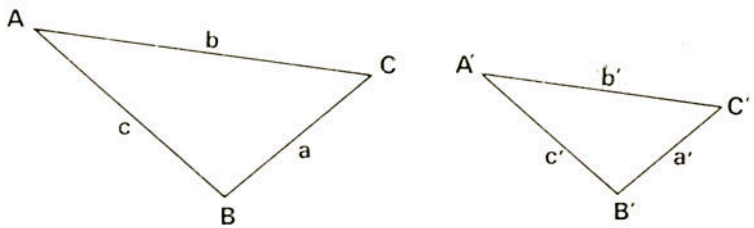
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'} = k \\ \hat{A} \equiv \hat{A}'\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Longrightarrow \left(\dfrac{a}{a'} = k,\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \hat{C} \equiv \hat{C}'\right)$$

189. 3º caso

"Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes".

A demonstração deste caso é análoga à do 1º caso, usando o caso de congruência *LLL* (em lugar do *ALA*) e o teorema fundamental.

O esquema deste caso é o que segue



$$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Longrightarrow (\hat{A} \equiv \hat{A}',\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \hat{C} \equiv \hat{C}')$$

190. Observações

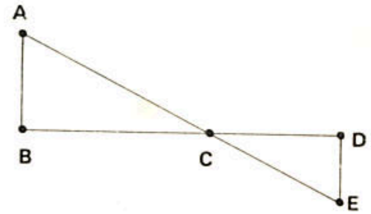
Com base nos casos de semelhança, pode-se ter os resultados seguintes.

Se a razão de semelhança de dois triângulos é k, então:

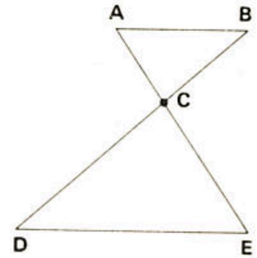
a razão entre lados homólogos é k;
a razão entre os perímetros é k;
a razão entre as alturas homólogas é k;
a razão entre as medianas homólogas é k;
a razão entre as bissetrizes internas homólogas é k;
a razão entre os raios dos círculos inscritos é k;
a razão entre os raios dos círculos circunscritos é k;
. . . .
. . . .
. . . .
a razão entre dois elementos lineares homólogos é k.

EXERCÍCIOS

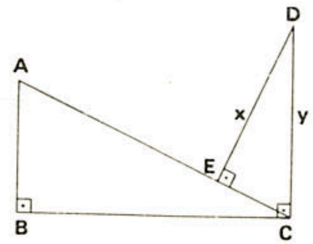
I.353 Se $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$, $\overline{AB} \perp \overline{BD}$, $\overline{ED} \perp \overline{BD}$, $\overline{DE} = 4$ cm, $\overline{CD} = 2$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm. Calcule a medida de $\overline{AB}$.



I.354 Na figura ao lado, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{DE}$.
1. Provar que os triângulos ABC e EDC são semelhantes.
2. Sendo $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{BC} = 7$ e $\overline{DE} = 10$, calcular $\overline{CD}$.

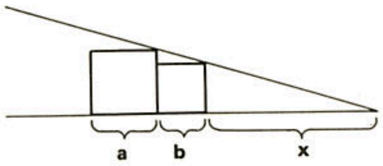


I.355 Na figura temos: $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 15$, $\overline{AC} = 17$ e $\overline{EC} = 4$. Determine $x = \overline{DE}$ e $y = \overline{CD}$.

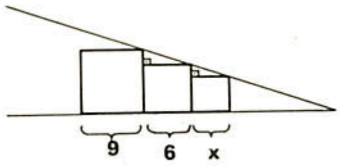


I.356 Pelos pontos A e B de uma reta traçam-se perpendiculares à reta. Sobre elas tomam-se os segmentos $\overline{AC} = 13\ cm$ e $\overline{BD} = 7\ cm$. No segmento $\overline{AB} = 25\ cm$ toma-se um ponto P tal que os ângulos $A\hat{P}C$ e $B\hat{P}D$ sejam congruentes. Calcular a medida de $\overline{AP}$.

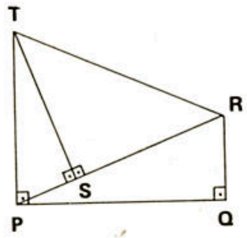
I.357 Na figura ao lado, consideremos os quadrados de lados a e b ($a > b$). Calcule o valor de x.



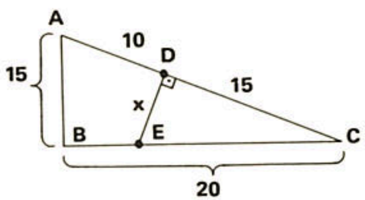
I.358 Na figura ao lado, consideremos os quadrados de lados x, 6 e 9. Determine o perímetro do quadrado de lado x.



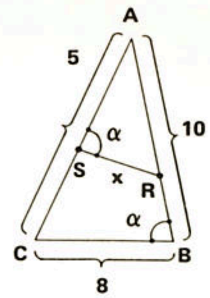
I.359 Na figura ao lado, $\overline{RQ}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$, $\overline{PQ}$ é perpendicular a $\overline{PT}$ e $\overline{TS}$ é perpendicular a $\overline{PR}$. Prove que: $(\overline{TS}) \cdot (\overline{RQ}) = (\overline{PS}) \cdot (\overline{PQ})$



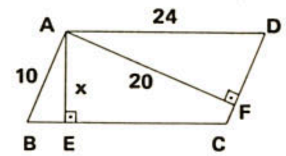
I.360 Considere o triângulo ABC, determine o valor de x.



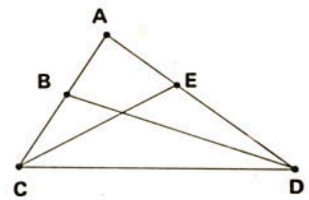
I.361 Na figura ao lado, determine o valor de x.



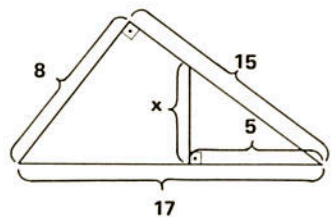
I.362 Calcule o valor de x, sabendo que a figura ao lado é um paralelogramo.

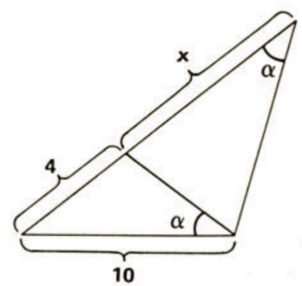


I.363 Na figura, as medidas são $\overline{AB} = 8\ cm$, $\overline{BC} = 3\ cm$, $\overline{AE} = 5\ cm$. Calcule $x = \overline{DE}$ sabendo que $A\hat{C}E \equiv A\hat{D}B$.

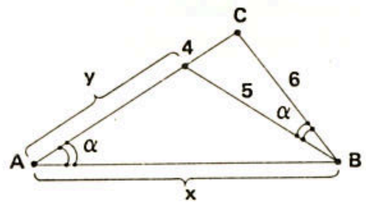


I.364 Nas figuras determinar x.



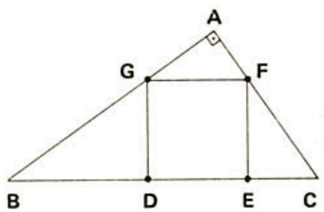


I.365 No triângulo ABC, dado abaixo, calcule os valores de x e y.

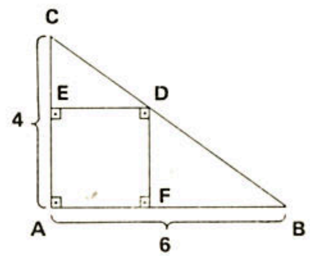


I.366 Consideremos um triângulo ABC de lado $\overline{BC} = 10\ cm$. Seja um segmento $\overline{CD}$ interno ao triângulo tal que D seja um ponto do lado $\overline{AB}$. Sabendo que $\overline{BD} = 4\ cm$, e os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}D$ são congruentes, determine a medida de $\overline{AD}$.

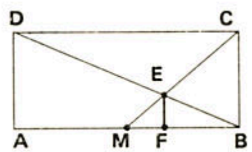
I.367 Na figura ao lado, o quadrado $DEFG$ está inscrito no triângulo ABC. Sendo $\overline{BD} = 8\ cm$ e $\overline{CE} = 2\ cm$, calcule o perímetro do quadrado.



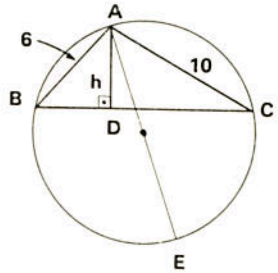
I.368 Determinar a medida do lado do quadrado da figura abaixo.



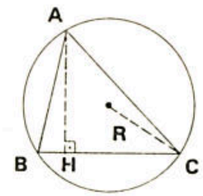
I.369 Num retângulo $ABCD$, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem $20\ cm$ e $12\ cm$, respectivamente. Sabendo-se que M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$, calcular $\overline{EF}$, distância do ponto E ao lado $\overline{AB}$, sendo E a intersecção da diagonal $\overline{BD}$ com o segmento $\overline{CM}$.



I.370 Considere a circunferência circunscrita a um triângulo ABC. Seja $\overline{AE}$ um diâmetro desta circunferência e $\overline{AD}$ altura do triângulo. Sendo $\overline{AB} = 6\ cm$, $\overline{AC} = 10\ cm$ e $\overline{AE} = 30\ cm$, calcular a altura $\overline{AD}$.



I.371 Calcular R, raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC da figura, sendo: $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{AH} = 3$.



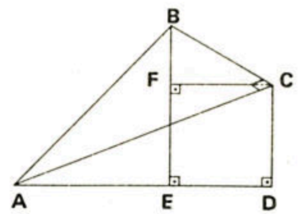
I.372 Qual é a razão entre o perímetro de um triângulo equilátero com algura igual ao raio de um círculo para o perímetro do triângulo equilátero inscrito nesse círculo?

I.373 Dois círculos de raios R e r são tangentes exteriormente no ponto A. Sendo C e D os pontos de tangência de uma reta r externa, com os dois círculos, determine a altura do triângulo ACD relativa ao lado $\overline{CD}$.

I.374 Na figura ao lado, prove que o triângulo BFC é semelhante ao triângulo ADC e que

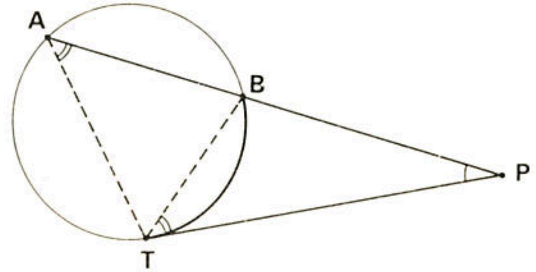
a) $\overline{BF} = \dfrac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC}}$

b) $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \cdot \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} + \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \cdot \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$



195. Generalização do 2º caso

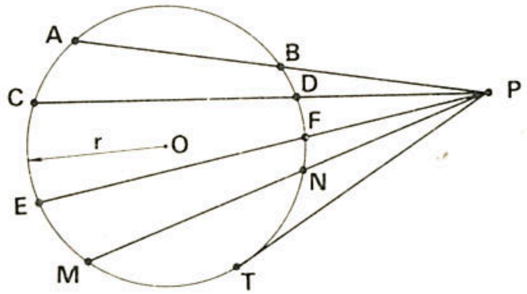
Consideremos o segmento secante $\overline{PA}$, sua parte exterior $\overline{PB}$ e um segmento $\overline{PT}$ tangente a λ.



Analisando os triângulos PAT e PTB vem:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{P} \text{ comum} \\ \hat{A} = \hat{T} = \dfrac{\widehat{TB}}{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta PAT \sim \Delta PTB \Longrightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PB}} \Longrightarrow (\overline{PA}) \times (\overline{PB}) = (\overline{PT})^2$$

Com o resultado acima, e procedendo de modo análogo ao feito no 1º caso, temos:

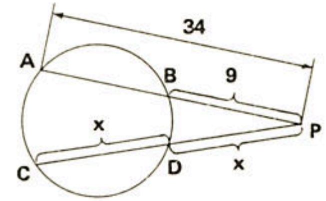


$$(\overline{PA}) \times (\overline{PB}) = (\overline{PC}) \times (\overline{PD}) = (\overline{PE}) \times (\overline{PF}) = \ldots =$$
$$= (\overline{PM}) \times (\overline{PN}) = (\overline{PT})^2 =$$
$$= \text{Potência do ponto } P \text{ em relação à circunferência } \lambda(O, r).$$

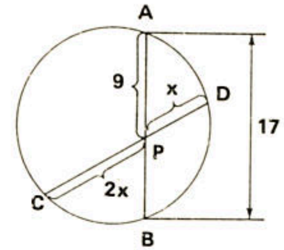
EXERCÍCIOS

Determine o valor de x nas figuras abaixo

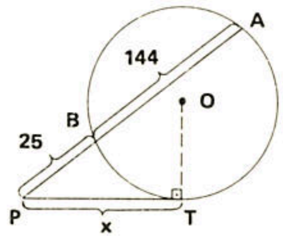
I.375 a)



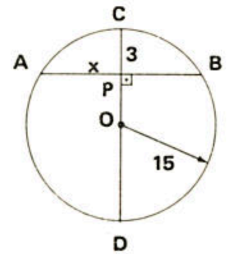
I.376 b)



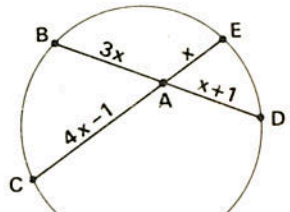
I.377 c)



I.378 d)



I.379 Na figura, calcular as medidas das cordas $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$.



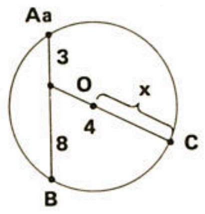
Solução

$(\overline{AB}) \times (\overline{AD}) = (\overline{AC}) \times (\overline{AE})$
$3x(x + 1) = (4x - 1)x$
$x = 0$ (não serve) ou $x = 4$
$\overline{BD} = 3x + x + 1 = 17$; $\overline{CE} = 4x - 1 + x = 19$

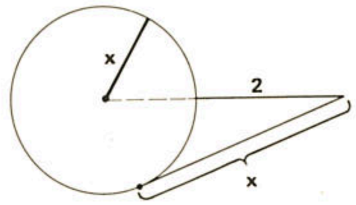
I.380 Duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ interceptam-se num ponto P interno a uma circunferência. Determinar a medida do segmento $\overline{BP}$ sabendo que os segmentos $\overline{CP}$, $\overline{DP}$ e a corda $\overline{AB}$ medem respectivamente *1 cm, 6 cm* e *5 cm.*

I.381 Determine o valor de x nas figuras abaixo:

a)

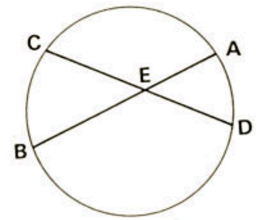


b)

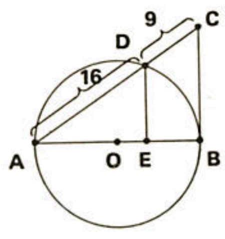


I.382 Num círculo duas cordas se cortam. O produto dos dois segmentos da primeira corda é *25 cm²*. Sabe-se que na segunda corda o menor segmento vale $\frac{1}{4}$ do maior. Determine a medida do maior segmento dessa segunda corda.

I.383 Na figura sendo $\overline{ED}$: $\overline{EC}$ = *2 : 3*, $\overline{AE}$ = = *6* e $\overline{EB}$ = *16*, calcular o comprimento de $\overline{CD}$.



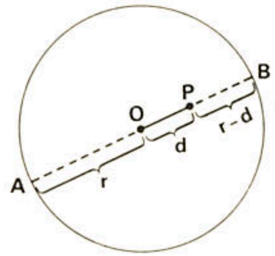
I.384 Determine a medida do segmento $\overline{DE}$ da figura, sabendo que $\overline{AB}$ é o diâmetro da circunferência, B o ponto de tangência do segmento $\overline{BC}$ à circunferência e $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$.

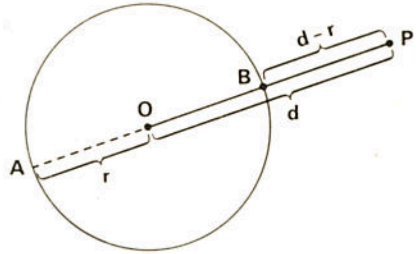


I.385 $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são duas cordas de medidas iguais, pertencentes a um círculo. Uma corda $\overline{AD}$ intercepta a corda $\overline{BC}$ num ponto P. Prove que os triângulos ABD e ABP são semelhantes.

I.386 Calcular a potência de um ponto P em relação a uma circunferência de centro O e raio r, em funçao da distância d entre O e P e do raio r.

Solução

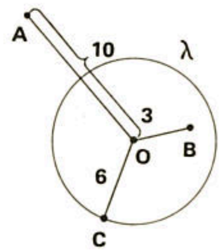




Conforme vimos nos itens 194 e 195 , qualquer corda (ou segmento secante) serve para nos dar a potência x de P em relação à circunferência.

No 1º caso: $x = (\overline{PA}) \times (\overline{PB}) = (d + r) \times (r - d) = r^2 - d^2$
No 2º caso: $x = (\overline{PA}) \times (\overline{PB}) = (d + r) \times (d - r) = d^2 - r^2$
Nos dois casos $x = |d^2 - r^2|$.

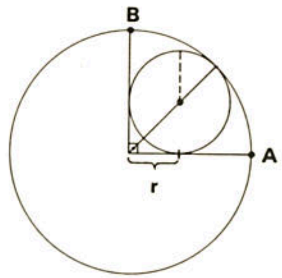
I.387 Na figura abaixo, calcule *pot A + pot B + pot C.*



Obs: pot A = potência de A em relação à λ.

I.388 Por um ponto P distante *18 cm* de uma circunferência, traça-se uma secante que determina na circunferência uma corda $\overline{AB}$ de medida *10 cm*. Calcular o comprimento da tangente a essa circunferência traçada do ponto P, sabendo que $\overline{AB}$ passa pelo centro da circunferência.

I.389 Determine o raio do círculo menor inscrito num quadrante do círculo maior, da figura abaixo, sendo **2R** o diâmetro do círculo maior.



Demonstração

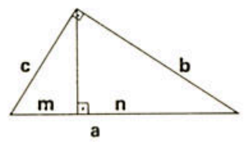
Para provar esta relação basta somar membro a membro (1) e (2), como segue:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = a \cdot n \\ c^2 = a \cdot m \end{array}\right\} +$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n$$

$$b^2 + c^2 = a\underbrace{(m + n)}_{a} \Longrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

d) **Observações**



1ª) As três primeiras relações métricas

$$b^2 = a \cdot n \quad (1)$$
$$c^2 = a \cdot m \quad (2)$$
$$h^2 = m \cdot n \quad (3)$$

são as mais importantes.

Delas decorrem todas as outras. Por exemplo, fazendo (1) $\times$ (2) membro a membro e usando a (3) temos:

$$b^2 \cdot c^2 = an \cdot am \Longrightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot \underbrace{mn}_{(3)} \Longrightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot h^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow b \cdot c = a \cdot h$$

2ª) Num triângulo retângulo, a soma dos inversos dos quadrados dos catetos é igual ao inverso do quadrado da altura relativa à hipotenusa.

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

De fato:

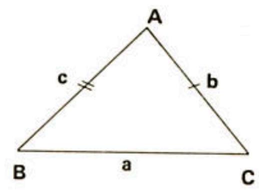
$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{b^2 \cdot c^2} = \frac{a^2}{\underbrace{b^2 \cdot c^2}_{(4)}} = \frac{a^2}{a^2 \cdot h^2} = \frac{1}{h^2}$$

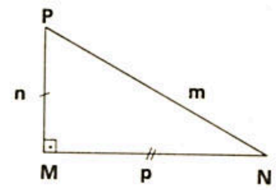
3ª) **Recíproco do Teorema de Pitágoras**

Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.

Hipótese	*Tese*
ΔABC em, que $a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow$	ΔABC é retângulo

Demonstração





Construindo o triângulo *MNP*, retângulo em *M* e cujos catetos $\overline{MN}$ e $\overline{MP}$ sejam respectivamente congruentes a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ temos:

ΔMNP retângulo em $M \Longrightarrow m^2 = n^2 + p^2$

Como $n = b$ e $p = c$ vem $m^2 = b^2 + c^2$

Logo, $m^2 = a^2$ ou seja $m = a$.

Então, pelo caso *LLL*, $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ e como ΔMNP é retângulo em *M*, o ΔABC é retângulo em *A*.

EXERCÍCIOS

I.390 Calcular a altura e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa, no triângulo retân-

I.390 Calcular a altura e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa, no triângulo retângulo de catetos *12 cm* e *16 cm*.

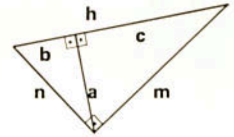
I.391 Calcular a hipotenusa, a altura relativa à hipotenusa, e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos *3* e *4*.

I.392 Dado um triângulo equilátero de lado *a*, calcular sua altura.

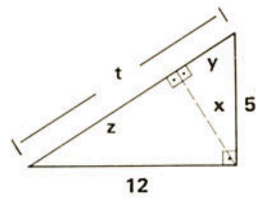
I.393 Uma escada de *2,5 m* de altura está apoiada em uma parede, e seu pédista *3,5 m* da parede. Determine a altura que a escada atinge na parede, nestas condições.

I.394 A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede *12 m*. Se a hipotenusa mede *25 m*, calcular os catetos.

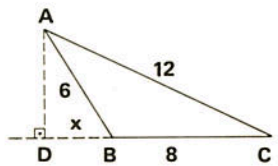
I.395 Escrever *10* relações métricas com os elementos indicados na figura.



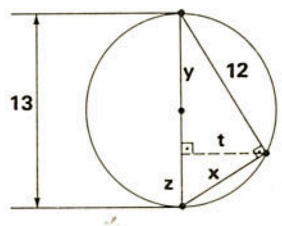
I.396 Na figura determinar os elementos x, y, z e t.



I.397 Na figura ao lado, calcular o valor de x.



I.398 Calcular os elementos y, z, t e x na figura ao lado.



I.399 Um triângulo ABC, retângulo em A, a altura relativa à hipotenusa mede *1,2 cm* e a hipotenusa mede *2,5 cm*. Sendo m e n, respectivamente, as projeções do maior e do menor cateto sobre a hipotenusa, calcule $\frac{m}{n}$.

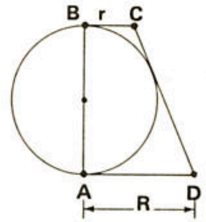
I.400 Dois ciclistas partem de uma mesma cidade em direção reta; um em direção Leste e outro em direção Norte. Determinar a distância que os separa depois de duas horas sabendo que a velocidade dos ciclistas são de *30 km/h* e *45 km/h* respectivamente.

I.401 As bases de um trapézio isósceles medem *12 m* e *20 m*, respectivamente. A soma dos lados não paralelos é igual a *10 m*. Quanto mede a altura?

I.402 As bases de um trapézio isósceles $ABCD$ medem *7* e *19* e os lados não paralelos *10*. Calcule a altura desse trapézio.

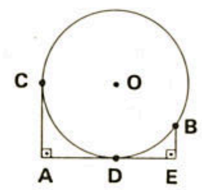
I.403 Em um trapézio retângulo a soma das bases é de *16 cm* sendo uma delas os $\frac{3}{5}$ da outra. Determinar as bases sabendo que o lado oblíquo mede *5 cm*.

I.404 Na figura, calcule a altura do trapézio retângulo $ABCD$.



I.405 Considere um quadrado Q de lado a e cinco círculos de mesmo raio r interiores a Q, dos quais um é concêntrico com Q e tangente exteriormente aos quatro outros, e cada um destes tangencia dois lados consecutivos de Q. Determine a medida de r em função da medida a do lado quadrado.

I.406 Na figura, determine o raio da circunferência sabendo que $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ tangenciam a circunferência nos pontos C e D respectivamente, e que $\overline{BE} = 12\ cm$, e $\overline{AE} = 54\ cm$.



I.407 Dois teleféricos T_1 e T_2 partem de uma estação E situada num plano horizontal, em direção aos picos P_1 e P_2 de duas montanhas. Determinar a distância entre P_1 e P_2 sabendo que os teleféricos percorreram *2900 m* e *1500 m* respectivamente e que a primeira montanha tem *900 m* de altura e a segunda *2000 m*.

I.408 Sabendo que a soma dos quadrados dos catetos com o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a *200 m*, determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

I.409 Calcular o perímetro do triângulo isósceles de *16 cm* de base e *6 cm* de altura.

I.410 Determine o raio de um círculo inscrito em um triângulo retângulo, cujos lados estão em progressão aritmética de razão r.

I.411 (EPUSP-66) Do mesmo lado de uma reta são traçados três círculos tangentes à reta e tangente entre si dois a dois. Sabendo que dois deles têm raio igual a 16, calcular o raio do terceiro.

I.412 Um octógono regular é formado cortando-se triângulos retângulos isósceles nos vértices de um quadrado. Se o lado do quadrado mede 1, quanto medem os catetos do triângulo retirado?

I.413 Determine a altura de um trapézio de bases $24\ cm$ e $10\ cm$, sabendo que os lados não paralelos medem respectivamente $15\ cm$ e $13\ cm$.

I.414 A base maior e um dos lados iguais de um trapézio isósceles circunscrítivel a um círculo são respectivamente iguais a $18\ cm$ e $13\ cm$. Determine a medida da altura do trapézio.

I.415 Uma corda comum a dois círculos secantes mede $16\ cm$. Sendo $10\ cm$ e $17\ cm$ as medidas dos raios dos círculos, determine a distância entre seus centros.

I.416 Seja um ponto P, externo a uma circunferência. A menor distância desse ponto à circunferência vale $6\ cm$ e a maior distância desse ponto à circunferência vale $24\ cm$. Determinar o comprimento do segmento tangente à circunferência, por esse ponto.

I.417 Dois círculos de diâmetros $12\ cm$ e $20\ cm$ são tangentes externamente. Determine o comprimento do segmento $\overline{PQ}$, tangente comum aos dois círculos.

I.418 Um trapézio circunscritível tem bases medindo $8\ cm$ e $16\ cm$. Calcular a altura do trapézio.

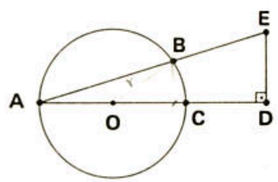
I.419 O segmento $\overline{AB}$ tem suas extremidades A e B como pontos de tangência às circunferências de centros O_1 e O_2. Sendo $15\ cm$ e $3\ cm$ os raios dessas circunferências, respectivamente e $24\ cm$ a distância entre seus centros, determine o segmento $\overline{AB}$.

I.420 Determinar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo sendo $24\ m$ o seu perímetro e $\dfrac{24}{5}\ m$ a medida da altura relativa à hipotenusa.

I.421 Determinar o raio de um círculo inscrito num setor circular de 60° e $6\ dm$ de raio.

I.422 Prove que o diâmetro de um círculo inscrito em um trapézio isósceles é média geométrica entre as bases do trapézio.

I.423 Calcule a medida do raio do círculo, na figura ao lado, sabendo que $\overline{AD} = 12\ cm$, $\overline{AE} = 15\ cm$ e $\overline{AB} = 8\ cm$.

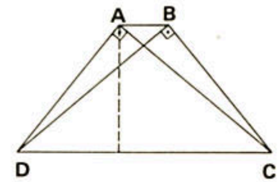


I.424 Num triângulo isósceles de altura 8, inscreve-se uma circunferência de raio 3. Calcular a medida da base do triângulo.

I.425 Calcular a medida do segmento $\overline{AB}$ do triângulo isósceles BCV, circunscrito a uma circunferência de raio unitário, sabendo-se que o diâmetro da circunferência é igual ao segmento maior da secção áurea da altura do tirângulo BCV.

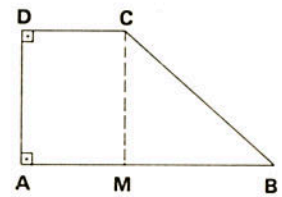
I.426 Sobre a hipotenusa $\overline{AB}$ de um triângulo retângulo ABC é construído um segundo triângulo retângulo ABD, com hipotenusa $\overline{AB}$. Se $\overline{BC} = 1$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AD} = 2$, calcular $\overline{BD}$.

I.427 No trapézio $ABCD$ ao lado, a diagonal $\overline{AC}$ é perpendicular ao lado oblíquo $\overline{AD}$ e a diagonal $\overline{DB}$ é perpendicular ao lado oblíquo $\overline{BC}$. Sendo $\overline{CD} = 25\ cm$ e $\overline{AD} = 15\ cm$, determine a medida da altura do trapézio.

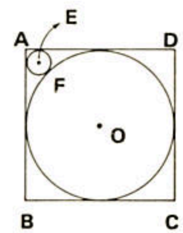


I.428 Considere-se uma semi-circunferência de diâmetro $AOB = 2r$. Construímos internamente duas novas semi-circunferências com diâmetros $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ e uma circunferência tangente a essas três semi-circunferências. Calcule a medida do raio dessa circunferência.

I.429 Determinar a medida da diagonal $\overline{AC}$ do trapézio retângulo da figura ao lado, sabendo que as bases medem respectivamente $4\ cm$ e $9\ cm$, e que o lado $\overline{BC}$ mede $\sqrt{34}\ cm$.



I.430 Consideremos dois círculos interiores como na figura ao lado. Sendo E o centro do círculo menor, F o ponto de tangencia entre os dois círculos e a o lado do quadrado, determine o raio do círculo menor em função de a.



I.431 Determinar a altura relativa à base de um triângulo isósceles em função da base a e do raio do círculo inscrito r.

I.432 Calcular a medida dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo, sabendo-se que eles estão em progressão aritmética de razão igual a *1 m*.

I.433 Num triângulo isósceles ABC, M é um ponto qualquer da base $\overline{BC}$. Demonstrar que:

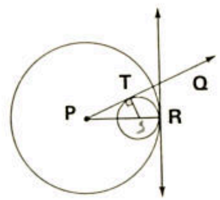
$$\overline{AB}^2 - \overline{AM}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MC}$$

I.434 Determinar o perímetro de um triângulo isósceles em função da projeção a da altura relativa à base do triângulo sobre um dos lados congruentes, e em função dessa altura h.

I.435 Em um quadrado $ABCD$ tomamos um ponto E, sobre o lado $\overline{AD}$, tal que $\overline{AE} = \frac{1}{4}\overline{AD}$, e um ponto O, médio de $\overline{AB}$. Sendo $\overline{OP}$ perpendicular a $\overline{CE}$, onde P é o pé da perpendicular tomado sobre $\overline{CE}$, prove que:

$$\overline{OP}^2 = \overline{EP} \cdot \overline{CP}$$

I.436 Sejam dois círculos tangentes entre si, internamente, como na figura ao lado. Sendo $\overline{PQ} = 8\ cm$ e $\overline{ST} = 3\ cm$, calcule a medida de $\overline{RQ}$.



I.437 Num círculo de centro O e raio R considera-se uma corda $\overline{AB} = \frac{R}{2}$. Calcule a medida do raio do círculo inscrito no setor circular OAB.

I.438 Sobre os lados de um quadrado, desenhamos externamente, quatro triângulos isósceles equivalentes com alturas iguais a *3 cm*. Determine o perímetro do quadrado, sabendo que os vértices dos quatro triângulos pertencem a um mesmo círculo.

I.439 Dois quadrados $ABCD$ e $CDEF$ têm em comum o lado $\overline{CD}$. Traçamos as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{EC}$. Sendo $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ e $\overline{EP} = \frac{1}{2}\overline{CE}$, determine o segmento $\overline{PM}$, em função do lado a dos quadrados.

I.440 Consideremos um triângulo ABC, retângulo em A, a bissetriz $\overline{AD}$ interna e $\overline{AE}$ externa ao triângulo. Prove que:

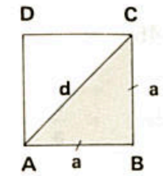
$$\frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{CD} - \frac{\sqrt{AD^2 + AE^2}}{BD} = 2$$

I.441 Seja um semi-círculo de diâmetro $\overline{AB} = 2r$, e as tangentes $\overline{AX}$ e $\overline{BY}$ ao semi-círculo. A tangente em um ponto C, qualquer, da semi-circunferência encontra $\overline{AX}$ em D e $\overline{BY}$ em E. Demonstrar que:

$$\overline{CD} \cdot \overline{CE} = r^2.$$

II. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

199. Diagonal do quadrado

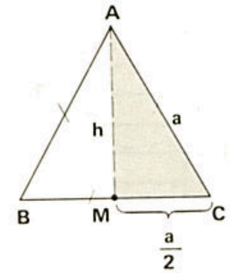


Dado um quadrado de lado a, calcular sua diagonal d.

Sendo $ABCD$ o quadrado de lado a, aplicando o teorema de Pitágoras no ΔABC, temos:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Longrightarrow d^2 = 2a^2 \Longrightarrow \boxed{d = a\sqrt{2}}$$

200. Altura do triângulo equilátero

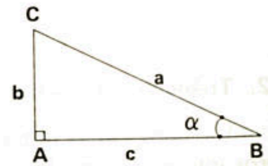


Dado um triângulo equilátero de lado a, calcular sua altura h.

Sendo ABC um triângulo equilátero de lado a, M o ponto médio de $\overline{BC}$, calculamos $\overline{AM} = h$ aplicando o teorema de Pitágoras no ΔAMC.

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Longrightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Longrightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

201. Seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°



Sendo α a medida de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, pondo-se

$$\text{seno de } \alpha = \text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa a}} = \frac{b}{a},$$

$$\text{cosseno de } \alpha = \cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

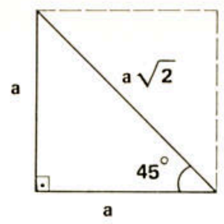
$$\text{tangente de } \alpha = \text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

e usando os resultados anteriores, temos:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

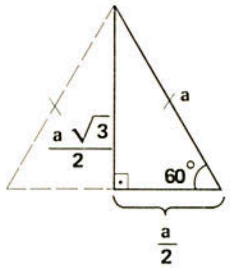
$$\text{tg } 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$



$$\text{sen } 60^\circ = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

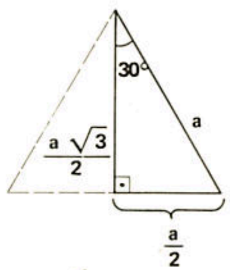
$$\text{tg } 60^\circ = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$



$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

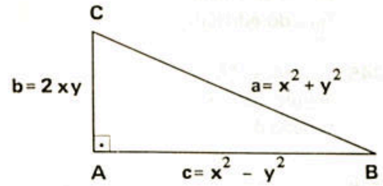


202. Triângulos Pitagóricos

Veremos como obter triângulos retângulos cujos lados são medidos por números inteiros, triângulos estes chamados Pitagóricos.

Calculemos a hipotenusa a de um triângulo retângulo com um cateto $b = 2xy$ e outro $c = x^2 - y^2$.

$$a^2 = (2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \Longrightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \Longrightarrow a^2 = (x^2 + y^2)^2 \Longrightarrow a = x^2 + y^2$$



Então temos:

Tomando x e y inteiros, primos entre si, um deles sendo par e x maior que y, vem a tabela.

		Cateto	Cateto	Hipotenusa
x	y	$2xy$	$x^2 - y^2$	$x^2 + y^2$
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61
7	2	28	45	53
7	4	56	33	65
7	6	84	13	85
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

EXERCÍCIOS

I.442 Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é o dobro do produto dos catetos. Calcular um dos ângulos agudos do triângulo.

I.443 Pelo vértice B de um quadrado $ABCD$ de lado a, toma-se no interior do quadrado um segmento $\overline{BS}$ que forma um ângulo igual a 30° com $\overline{BA}$. Determinar $\overline{AS}$ e $\overline{BS}$.

I.444 Um observador vê um edifício, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60°. Se ele se afastar do edifício mais $30\ m$ passará a vê-lo sob ângulo de 45°. Calcular a altura do edifício.

I.445 Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC medem respectivamente a e $2a$, sendo 45° o ângulo formado por eles. Calcular a medida da altura $\overline{BD}$ e o lado $\overline{BC}$ do triângulo, em função de a.

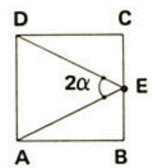
I.446 (F-AUUSP-67). As bases de um trapézio retângulo são b e $2b$ e um dos ângulos mede 60°. Calcular a altura.

I.447 Um dos ângulos agudos de um trapézio isósceles mede 60°. Sendo os lados não paralelos congruentes à base menor do trapézio e m a medida da base maior, determine o perímetro do trapézio em função de m.

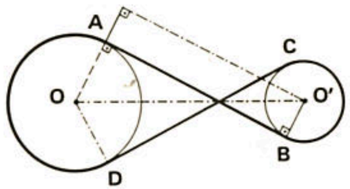
I.448 Determinar o ângulo que a diagonal de um trapézio isósceles forma com a altura do trapézio, sabendo que a altura do trapézio é igual a sua base média multiplicada por $\sqrt{3}$.

I.449 A base maior de um trapézio isósceles mede $100\ cm$ e a base menor $60\ cm$. Sendo 60° a medida de cada um de seus ângulos agudos, determine a altura e o perímetro do trapézio.

I.450 Determine $tg\ \alpha$ sabendo que E é ponto médio do lado $\overline{BC}$ do quadrado $ABCD$.



I.451 Na figura ao lado, determinar o comprimento da corrente que envolve as duas rodas, sabendo que o raio da roda menor mede $2\ cm$ e o raio da roda maior $4\ cm$ e a distância entre os centros das duas rodas mede $12\ cm$.
(Veja como calcular os arcos $\overset{\frown}{AD}$ e $\overset{\frown}{BC}$ no item 230).



I.452 Seja $\overline{AB} = 3r$, tangente em A a uma circunferência de centro O e raio r. Traça-se por B a tangente $\overline{BC}$, que tem C por ponto de contato. Calcular a distância de C à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

I.453 Consideremos um triângulo retângulo ABC onde a medida de um ângulo agudo é α. Determinar a medida do raio da circunferência inscrita em função de α e da hipotenusa a.

CAPÍTULO XVI

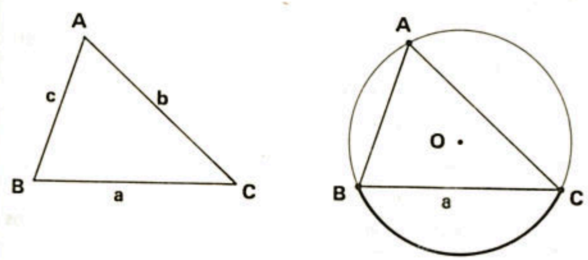
TRIÂNGULOS QUAISQUER

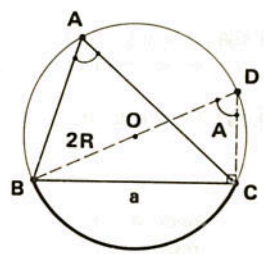
203. Teorema dos senos

Os lados de um triângulo são proporcionais aos *senos* dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Demonstração

Dado um ΔABC, consideremos a circunferência circunscrita. Seja O o centro dela e R o seu raio:





Traçando o diâmetro $\overline{BD}$, temos:

$$\hat{D} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \quad \text{e como} \quad \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} \quad \text{vem que} \quad \hat{D} \equiv \hat{A}.$$

No ΔDCB retângulo em C vem:

$$\text{sen } D = \frac{a}{2R} \implies \text{sen } A = \frac{a}{2R} \implies \frac{a}{\text{sen } A} = 2R$$

Seja um polígono regular de n lados de medidas iguais a ℓ e de apótema de medida m.

Podemos decompor esse polígono em n triângulos de base ℓ e altura m.

Então

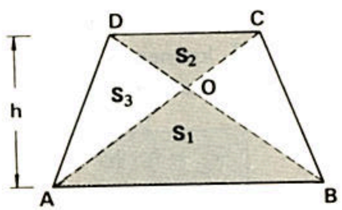
$$\left.\begin{array}{l} A_{pol} = n \cdot A_T \\ A_T = \dfrac{\ell \cdot m}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow A_{pol} = \frac{\overbrace{n \cdot \ell}^{2p} \cdot m}{2}$$

Sendo $n \cdot \ell = 2p$ (perímetro), vem:

$$A_{pol} = \frac{2 \cdot p \cdot m}{2} \Longrightarrow \boxed{A_{pol} = p \cdot m}$$

EXERCÍCIOS

I.560 Dá-se um trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ com $a > b$ e de altura h. Demonstrar que a diferença entre as áreas dos triângulos que têm por bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ respectivamente e por vértice oposto a intersecção das diagonais é $\dfrac{(a-b) \cdot h}{2}$.



Solução

Tese: $S_1 - S_2 = \dfrac{(a-b)h}{2}$

Basta considerar o ΔOAD de área S_3

$$\left.\begin{array}{l} \text{Área } \Delta ABD = S_1 + S_3 = \dfrac{ah}{2} \\ \text{Área } \Delta ACD = S_2 + S_3 = \dfrac{bh}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow S_1 - S_2 = \frac{ah}{2} - \frac{bh}{2} = \frac{(a-b)h}{2}$$

I.561 Determinar a área de um retângulo em função de sua diagonal d sabendo que a diagonal é o triplo de sua altura.

I.562 Determinar a área de um quadrado em função da sua diagonal d.

I.563 A área de um retângulo é $40\ cm^2$ e sua base excede de $6\ cm$ sua altura. Determinar a altura do retângulo.

I.564 Um retângulo tem $24\ cm^2$ de área e $20\ cm$ de perímetro. Determinar suas dimensões.

I.565 A base de um retângulo é o dobro de sua altura. Determinar suas dimensões sendo $72\ cm^2$ sua área.

I.566 As bases de um trapézio isósceles medem respectivamente $4\ cm$ e $12\ cm$. Determinar a área desse trapézio sabendo que o semi-perímetro do trapézio é igual a $13\ cm$.

I.567 Uma das bases de um trapézio excede a outra de $4\ cm$. Determinar as medidas dessas bases sendo $40\ cm^2$ a área do trapézio e $5\ cm$ a altura.

I.568 As diagonais de um losango estão entre si como $\dfrac{2}{7}$. Determinar a área desse losango sabendo que a soma de suas diagonais é igual ao perímetro de um quadrado de $81\ cm^2$ de área.

I.569 Suponhamos que se percorra um triângulo num sentido determinado e que se prolongue, nesse sentido, cada lado de um comprimento igual ao próprio lado que se prolonga. Demonstrar que a área do triângulo que tem por vértices as extremidades dos prolongamentos é igual a sete vezes a área do triângulo dado.

I.570 O perímetro de um losango é de $60\ cm$. Calcule a medida de sua área, sabendo que a sua diagonal maior vale o triplo da menor.

I.571 Determinar a área de um losango sendo $120\ cm$ o seu perímetro e $36\ cm$ a medida da sua diagonal menor.

I.572 Com uma corda de $40\ m$ de comprimento construímos um quadrado e depois um trapézio isósceles cuja base maior é o dobro da menor e cujos lados oblíquos têm medidas iguais a base menor. Determinar a razão entre a área do quadrado e a área do trapézio.

I.573 Determinar o lado de um quadrado, sabendo-se que se aumentarmos seu lado de $2\ cm$ sua área aumenta de $36\ cm^2$.

I.574 Determinar a área de um quadrado cujo perímetro é igual ao perímetro de um retângulo cuja base excede de $3\ cm$ a altura, sendo $66\ cm$ a soma do dobro da base com o triplo da altura.

I.575 Um quadrado e um losango têm o mesmo perímetro. Determinar a razão entre a área do quadrado e do losango sabendo que as diagonais do losango estão entre si como $\dfrac{3}{5}$ e que a diferença entre elas é igual a $40\ cm$.

I.576 Um triângulo equilátero, um quadrado e um hexágono regular têm o mesmo perímetro, que é $120\ cm$. Determinar a razão entre a soma das áreas do triângulo equilátero e do quadrado para a área do hexágono regular.

I.577 (MAPOFEI-74). "As diagonais de um paralelogramo medem $10\ m$ e $20\ m$ e formam um ângulo de $60°$. Achar a área do paralelogramo".

I.578 Determinar a área de um retângulo cuja base e altura são respectivamente o lado e o apótema de um pentágono inscrito em uma circunferência de raio r.

I.579 Determinar a área de um hexágono regular sabendo que seu apótema mede $2\sqrt{3}$ cm.

I.580 Determinar a área de um quadrado cujo lado é igual ao lado de um octógono regular inscrito em um círculo de raio r.

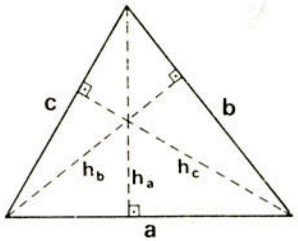
I.581 Determine a razão entre as áreas dos círculos inscrito e circunscrito a um hexágono regular.

III. EXPRESSÕES DA ÁREA DO TRIÂNGULO

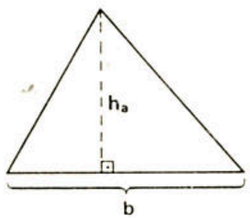
251. Em função dos lados e respectivas alturas

Em vista do item 247

$$S = \frac{1}{2} ah_a, \; S = \frac{1}{2} bh_b, \; S = \frac{1}{2} ch_c$$



252. Área do triângulo em função dos lados

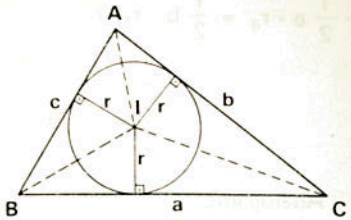


Dados: a, b, c e com $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ em vista do item 208, temos:

$$S = \frac{1}{2} ah_a$$

$$\left.\begin{array}{l} S = \dfrac{1}{2} ah_a \; \dots\dots\dots\dots \\ h_a = \dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

253. Área do triângulo em função dos lados e do raio r da circunferência inscrita



$$S = S_{ABC} = S_{IBC} + S_{IAC} + S_{IAB} =$$

$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S = pr}$$

254. Área do triângulo em função dos lados e do raio R da circunferência circunscrita

$$S = S_{ABC} = \frac{1}{2} ah_a \qquad (1)$$

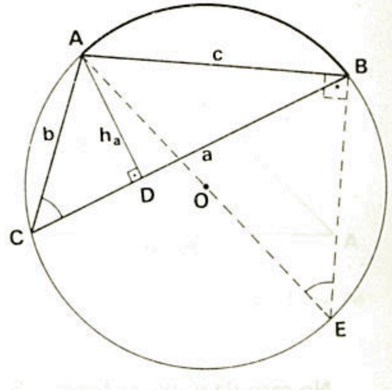
Para o cálculo de h_a (dados R, a, b e c), construímos o ΔABE com $AE = 2R$.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{D} = \hat{B} \text{ (reto)} \\ \hat{C} = \hat{E} = \dfrac{\widehat{AB}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ADC \sim \Delta ABE \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{h_a}{c} = \frac{b}{2R} \Longrightarrow h_a = \frac{bc}{2R}$$

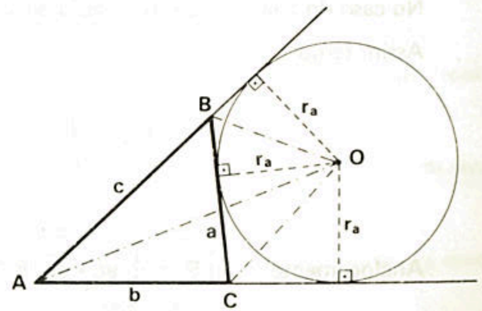
Substituindo em (1) vem:

$$\boxed{S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}}$$



255. Área do triângulo em função do raio de qualquer das circunferências ex-inscritas. (Por exemplo: ex-inscrita tangente ao lado a, de raio r_a).

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABOC} = \overset{S}{S_{ABC}} + \overset{\frac{1}{2} ar_a}{S_{OBC}} \\ S_{ABOC} = \underset{\frac{1}{2} br_a}{S_{OAC}} + \underset{\frac{1}{2} cr_a}{S_{OAB}} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$



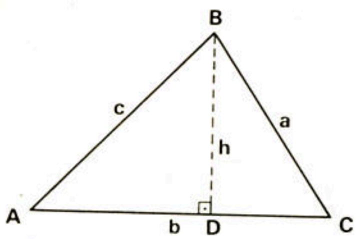
$$S + \frac{1}{2} a \cdot r_a = \frac{1}{2} b \cdot r_a + \frac{1}{2} c \cdot r_a \implies S = \frac{1}{2} \underbrace{(-a + b + c)}\, r_a = \frac{1}{2}\, 2\underbrace{(p - a)}\, r_a$$

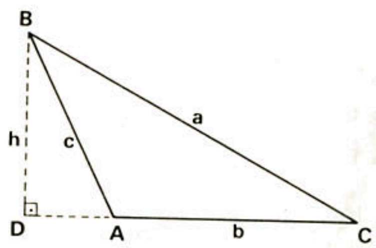
$$\implies \boxed{S = (p - a) \cdot r_a}$$

Analogamente, temos:

$$\boxed{S = (p - b)r_b} \qquad \boxed{S = (p - c)r_c}$$

256. Área do triângulo em função de dois lados e do seno do ângulo compreendido





$$\left.\begin{array}{l} \text{No caso da primeira figura: } S = \frac{1}{2} bh \\ \text{mas no } \Delta ADB\text{: } h = c \cdot \text{sen A} \end{array}\right\} \implies S = \frac{1}{2} bc \cdot \text{sen A}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{No caso da segunda figura: } S = \frac{1}{2} bh \\ \text{mas no } \Delta ADB\text{: } h = c \cdot \text{sen}\,(180^\circ - \hat{A}) = c \cdot \text{sen A} \end{array}\right\} \implies S = \frac{1}{2} bc \cdot \text{sen A}$$

No caso do triângulo ser retângulo em *A* é imediato.

Assim temos:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} bc \cdot \text{sen A}}$$

Analogamente: $\boxed{S = \frac{1}{2} ac \cdot \text{sen B}}$ $\boxed{S = \frac{1}{2} ab \cdot \text{sen C}}$

257. Notas

1ª) Usando a expressão da área do triângulo

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \text{sen C}$$

e a expressão do Teorema dos senos (Lei dos senos)

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}} = 2R, \text{ de onde sai: } \text{sen C} = \frac{c}{2R}, \text{ temos:}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \text{sen C} \implies S = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{c}{2R} \implies S = \frac{abc}{4R}$$

2ª) **Resumo das fórmulas sobre área do triângulo**

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ &= pr = \frac{abc}{4R} = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c = \\ &= \frac{1}{2} ab \cdot \text{sen C} = \frac{1}{2} ac \cdot \text{sen B} = \frac{1}{2} bc \cdot \text{sen A} \end{aligned}}$$

3ª) As fórmulas $S = pr$, $S = \frac{abc}{4R}$, $S = (p-a)r_a$, $S = (p-b)r_b$ e $S = (p-c)r_c$ são mais usadas para o cálculo dos raios. Assim,

$$r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S}, \quad r_a = \frac{S}{p-a}, \quad r_b = \frac{S}{p-b}, \quad r_c = \frac{S}{p-c}.$$

EXERCÍCIOS

I.582 Determinar a área de um triângulo retângulo sabendo que um dos catetos mede *10 cm*, e o ângulo agudo oposto a esse cateto *30°*.

I.583 A razão entre a base e a altura de um triângulo é $\frac{8}{5}$. Sendo *52 cm* a soma da base com a altura, determine a área do triângulo.

I.584 Determinar a área de um triângulo isósceles sabendo que sua base mede *6a*, e a soma dos lados congruentes *10a*.

I.585 Determinar a área de um triângulo isósceles de perímetro igual a *32 cm*, sabendo que sua base excede de *2 cm* cada um dos lados congruentes.

I.586 Determinar a área de um triângulo equilátero em função de sua altura *h*.

I.587 O apótema de um triângulo equilátero é igual ao lado de um quadrado de $16\ cm^2$ de área. Determinar a área do triângulo.

I.588 O perímetro de um triângulo retângulo é *90 cm*. Determinar a área do triângulo sabendo que seus lados são inversamente proporcionais a $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{12}$ e $\frac{1}{13}$.

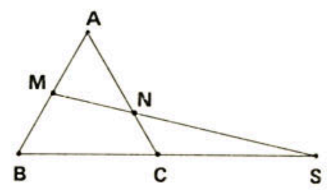
I.589 Em um triângulo retângulo a hipotenusa é os $\frac{5}{3}$ do cateto menor, e o cateto maior os $\frac{4}{3}$ do menor. Sendo *60 cm* o perímetro do triângulo, determine a sua área.

I.590 Calcular a área de um triângulo ABC do qual se conhecem os dados seguintes: $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e o ângulo compreendido $150°$.

I.591 Consideremos um triângulo retângulo isósceles ABC de catetos $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ e um ponto E tomado sobre o prolongamento do cateto $\overline{CA}$. Unindo-se B a E temos o segmento $\overline{BE}$ que é paralelo à bissetriz $\overline{AD}$ do ângulo reto $\hat{A}$. Determine a área do triângulo CBE em função de a.

I.592 (MAPOFEI-75). Calcular a área do triângulo ABC, sendo $\overline{AB} = 4\ cm$, $\hat{A} = 30°$ e $\hat{C} = 45°$.

I.593 (MAPOFEI-74). "Um triângulo equilátero ABC tem *60 m* de perímetro. Prolonga-se a base $\overline{BC}$ e sobre o prolongamento toma-se $\overline{CS} = 12\ m$. Une-se o ponto S ao meio M do lado $\overline{AB}$. Calcular a área do quadrilátero $BCMN$".



I.594 Determinar a área de um triângulo equilátero em função do raio R do círculo circunscrito a esse triângulo.

I.595 Determinar a área de um triângulo em função do raio r do círculo inscrito nesse triângulo.

I.596 A área de um triângulo retângulo é igual ao produto dos segmentos determinados sobre a hipotenusa pelo ponto de contato do círculo inscrito ao triângulo.

I.597 A base de um triângulo mede *12 cm* e sua altura *6 cm*. Determinar a razão entre a área do triângulo e a área de um quadrado inscrito nesse triângulo sabendo que a base do quadrado está apoiada sobre a base do triângulo.

I.598 Determine a medida do raio de um círculo inscrito em um triângulo isósceles de lados *10 cm*, *10 cm* e *12 cm*.

I.599 Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo isósceles de base *6 cm* tendo outro lado medindo *5 cm*.

I.600 Seja ABC um triângulo isósceles cujos lados congruentes medem *5 cm*, sendo *6 cm* a medida do lado $\overline{BC}$ (base do triângulo). Calcule a razão entre o raio do círculo circunscrito e o raio do círculo inscrito nesse triângulo.

I.601 Determinar o perímetro de um triângulo retângulo sabendo que sua área é igual a $36\ cm^2$ e que a hipotenusa é igual ao dobro da altura relativa a ela.

IV. ÁREA DO CÍRCULO E DE SUAS PARTES

258. Área do círculo

Vimos no item 250 que a área de um polígono regular

$$A_{pol} = p \cdot m$$

é o produto da medida do semi-perímetro pela do apótema.

Tendo em vista os ítens, 224, 225, 226, 227 e 228 do capítulo XVIII, vem as afirmações abaixo:

Fixado um círculo, de raio R (diâmetro D), considerando os polígonos regulares inscritos e os circunscritos nesse círculo, com o crescimento do número de lados as áreas dos polígonos se aproximam da área do círculo, assim como os seus perímetros se aproximam do perímetro do círculo (vide comprimento da circunferência) e os apótemas se aproximam do raio do círculo. Podemos, então colocar, por extensão que:

A área do círculo é o produto de seu semi-perímetro pelo raio.

$$A_C = \pi R \cdot R = \pi R^2$$

Então:

$$\boxed{A_C = \pi \cdot R^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{A_C = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}}$$