

Teoria de anéis não comutativos

Lista 1, getting started

- 1) Seja R um anel e $a \in R$, mostre que se a possui uma inversa à esquerda e outra à direita, então as duas coincidem e são únicas.
- 2) Seja R um anel. Mostre que, se $a \in R$ possui mais de uma inversa à esquerda, então ele possui infinitas. (SUGESTÃO: Considere o conjunto $A = \{a' \in R \mid a'.a = 1\}$, fixe $a_0 \in A$, mostre que a aplicação $a' \mapsto a.a' - 1 + a_0$ é uma função injetiva de A sobre um subconjunto próprio de A).
- 3) Um anel R é dito ser Dedekind finito se $ab = 1 \Rightarrow ba = 1$, ou seja, cada vez que um elemento tenha inverso à esquerda, também terá inverso à direita. Mostre que se $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial de dimensão finita então $\text{End}_k(\mathbb{V})$ é um anel Dedekind finito. Mostre que em dimensão finita nem sempre é verdade (por exemplo, seja $\mathbb{V} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} k.e_n$ e sejam $a, b \in \text{End}_k(\mathbb{V})$ tais que $a(e_n) = e_{n+1}$ e $b(e_n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ e_{n-1}, & n \neq 1 \end{cases}$, verifique que $ba = I \neq ab$).
- 4) Seja R um anel e $A \subseteq R$, defina o centralizador de A em R como o conjunto $Z_R(A) = \{r \in R \mid ar = ra, \forall a \in A\}$. mostre que $Z_R(A)$ é um subanel de R . Mostre também que se $r \in Z_R(A)$ é invertível, então seu inverso também está em $Z_R(A)$.
- 5) Seja R um anel, um elemento $x \in R$ é dito ser nilpotente, se existir um inteiro $n > 1$ tal que $x^n = 0$. Mostre que, se x é nilpotente, então $1 - x$ é invertível.
- 6) Seja R um anel, um elemento $e \in R$ é dito ser idempotente se $e^2 = e$. Mostre que, dados dois elementos idempotentes $e, f \in R$ temos que $e + f$ é idempotente se, e somente se eles comutarem entre si.
- 7) O anel dos quatérnions pode ser definido como

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

- a) Mostre que $\mathbb{H}$ é um anel de divisão não comutativo.
- b) Mostre que $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}\{x, y\}/\langle x^2 + 1, y^2 + 1, xy + yx \rangle$.
- c) Mostre que $\mathbb{H}$ é isomorfo ao subanel de $M_2(\mathbb{C})$ gerado por elementos da forma

$$q = \begin{pmatrix} a + ib & -c - id \\ c - id & a - ib \end{pmatrix}$$

- 8) Sejam R e S dois anéis e M um $R - S$ bimódulo. Mostre que o conjunto

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

possui uma estrutura de anel (da maneira mais óbvia possível, com multiplicação matricial).

- 9) Seja k um corpo, mostre que $M_n(k)$ é um anel simples, isto é, não possui ideais bilaterais.
- 10) Seja R um anel $I \trianglelefteq R$ um ideal e $n > 1$ um número natural.
 - a) Mostre que o conjunto $M_n(I) = \{(a_{ij})_{i,j=1}^n \mid a_{ij} \in I\}$ é um ideal de $M_n(R)$.
 - b) Mostre que $M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I)$.