Teoria de anéis não comutativos

Lista 2

1) Seja R um anel e M um R módulo à esquerda. Denotando $T = {}_R\mathrm{End}(M)$, então M é um T módulo à direita. Defina o anel dos bi-endomorfismos $B = {}_R\mathrm{Biend}(M) = \mathrm{End}_T(M)$.

a) Mostre que a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ev}: & R & \to & B \\ & a & \mapsto & \mathrm{ev}_a \end{array}$$

definida como $\mathrm{ev}_a(m) = a \cdot m$ é um monomorfismo de anéis.

b) Mostre que ${}_BM_T$ é um bimódulo fielmente balanceado.

c) Mostre que, como conjunto de funções, $Z(B) = Z(T)$ (aqui, $Z(A)$ denota o centro do anel A).

2) Mostre que se R é um anel comutativo então ${}_RM$ é balanceado se, e somente se todo elemento no centro de $T = {}_R\mathrm{End}(M)$ for a multiplicação por um elemento de R.

3) Compute o anel dos endomorfismos e o anel dos bi-endomorfismos para ${}_RRe$ onde $R = M_3(k)$, para k um corpo e

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Seja R um anel e $I \trianglelefteq R$ um ideal. Seja $\pi : R \to R/I$ o morfismo canônico (que é morfismo de anéis e de R módulos à esquerda). Mostre que existe um morfismo de anéis $\phi : R \to {}_R\mathrm{End}(R/I)$ definido como $\pi(a) \cdot \phi(r) = \pi(ar)$, para todo $a, r \in R$. Mostre também que ${}_R\mathrm{End}(R/I) \cong R/I$.

5) Seja M um R módulo tal que $M = K \oplus K' = L \oplus L'$

a) Mostre que se $K = L$ implica $K' \cong L'$ mas não $K' = L'$.

b) Se $K \subseteq H \leq M$, mostre que $H = K \oplus (H \cap K')$.

6) Seja $e \in R$ um idempotente. Mostre que, para qualquer $x \in R$ o elemento $t = e + (1 - e)xe$ é um idempotente. Além do mais, para qualquer t desta forma, existe $y \in R$ tal que $e = t + (1 - t)yt$ (Sugestão, como $et = e$ e $te = t$ mostre que $y = -(1 - e)xe$ funciona).

7) Seja R um anel, M um R-módulo à esquerda e $e \in {}_R\mathrm{End}(M)$ um idempotente. Para cada idempotente $t \in {}_R\mathrm{End}(M)$ mostre que $\mathrm{Im}(e) = \mathrm{Im}(t)$ se, e somente se, $t = e + (1 - e)xe$ para algum $x \in {}_R\mathrm{End}(M)$.

a) Seja $(M, \{\pi_i\}_{i \in I})$ o produto direto e $\{\imath_i\}_{i \in I}$ as respectivas injeções canônicas. Mostre que $(M, \{\imath_i\}_{i \in I})$ é um coproduto direto se, e somente se I for um conjunto finito.

b) Seja $(M, \{\imath_i\}_{i \in I})$ o coproduto direto e $\{\pi_i\}_{i \in I}$ as respectivas projeções canônicas. Mostre que $(M, \{\pi_i\}_{i \in I})$ é um produto direto se, e somente se I for um conjunto finito.

8) Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de R módulos à esquerda e $I \leq R$ um ideal à esquerda. Mostre que

$$I\left(\oplus_{i \in I} M_i\right) = \oplus_{i \in I} IM_i, \qquad \text{e} \qquad \oplus_{i \in I} M_i / I\left(\oplus_{i \in I} M_i\right) \cong \oplus_{i \in I}(M_i / IM_i).$$

9) Seja R um anel e m, n dois inteiros positivos. Mostre que ${}_R\mathrm{Hom}(R^{(m)}, R^{(n)})$ é um $M_m(R)$ módulo à esquerda e um $M_n(R)$ módulo à direita (lembre-se que estes morfismos atuam pela direita). Mostre também que existe um iso de bimódulos $\theta : {}_R\mathrm{Hom}(R^{(m)}, R^{(n)}) \to M_{m \times n}(R)$