Teoria de anéis não comutativos

Lista 4

1) Seja $\mathcal{U}$ uma classe de R módulos à esquerda e $f : M \to N$ um monomorfismo. Suponha que $\mathrm{Tr}_N(\mathcal{U}) \leq \mathrm{Im} f$. Mostre que $f(\mathrm{Tr}_M(\mathcal{U})) = \mathrm{Tr}_N(\mathcal{U})$.

2) Seja $\mathcal{U}$ uma classe de R módulos à esquerda e $f : M \to N$ um epimorfismo. Suponha que $\mathrm{Ker} f \leq \mathrm{Rej}_M(\mathcal{U})$. Mostre que $f(\mathrm{Rej}_M(\mathcal{U})) = \mathrm{Rej}_N(\mathcal{U})$.

3) Seja M um R-módulo e $S = {}_R\mathrm{End}(M)$. Seja $e \in S$ um idempotente. Mostre que $\mathrm{Tr}_M(Me) = (Me)S$ e $\mathrm{Rej}_M(Me) = \mathrm{Ann}_M(Se) = \{m \in M | m \cdot \theta e = 0\,; \forall \theta \in S\}$

4) Sejam M e U R-módulos à esquerda: Mostre que

$$\begin{aligned} {}_R\mathrm{Hom}(M, \mathrm{Tr}_U(M)) &\cong {}_R\mathrm{Hom}(M, U) \\ {}_R\mathrm{Hom}(M/\mathrm{Rej}_M(U), U) &\cong {}_R\mathrm{Hom}(M, U) \end{aligned}$$

5) Seja M um grupo abeliano ($\mathbb{Z}$-módulo). Mostre que $\mathrm{Soc}(M)$ é o subgrupo gerado pelos elementos de ordem prima.

6) Baseado no exercício anterior, conclua que $\mathbb{Z}_n$ é semi-simples se, e somente se n for livre de quadrados, isto é, todos os primos que divedem n aparecem com potência 1.

7) Calcule o Socle e o radical de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_n$ como $\mathbb{Z}$ módulos.

8) Seja D um anel de divisão, $\mathbb{V}$ um D espaço vetorial de dimensão finita e $R = \mathrm{End}_D(\mathbb{V})$ (considere os escalares sendo multiplicados pela direita) Mostre que $\mathrm{Rad}({}_RR) = \mathrm{Rad}(R_R) = 0$ e que $\mathrm{Soc}({}_RR) = \mathrm{Soc}(R_R) = R$.

9) Seja M um R módulo e $K \leq M$, mostre que

a) $K = \mathrm{Rad}(M)$ see $K \leq \mathrm{Rad}(M)$ e $\mathrm{Rad}(M/K) = 0$.

b) $K = \mathrm{Soc}(M)$ see $K \geq \mathrm{Soc}(M)$ e $\mathrm{Soc}(K) = K$.

c) Se $K << M$ e $\mathrm{Rad}(M/K) = 0$, então $K = \mathrm{Rad}(M)$.

d) Se $K \blacktriangleleft M$ e $\mathrm{Soc}(K) = K$, então $K = \mathrm{Soc}(M)$.

10) Um R módulo M é dito ser co-semissimples se todo submódulo de M for a intersecção de submódulos maximais. Mostre que

a) M é co-semissimples see $\mathrm{Rad}(M/K) = 0$ para todo $K \leq M$.

b) todo submódulo e todo quociente de um R módulo co-semissimples é co-semissimples.

c) Todo R módulo semissimples é co-semissimples.