Teoria de anéis não comutativos

Lista 5

1) Seja $R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \ldots]$ o anel polinomial com infinitas variáveis e com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Mostre que este anel não é Noetheriano.

2) Dê um exemplo de um anel R e de um R módulo M finitamente gerado mas que possui submódulos infinitamente gerados (sugestão, olhe o exercício anterior).

3) Seja $\phi : Q \to R$ um morfismo de anéis. Se $M \in {}_R\mathcal{M}$, então pelo morfismo ϕ temos que $M \in {}_Q\mathcal{M}$.

a) Mostre que se ${}_QM$ é artiniano (resp. noetheriano) então ${}_RM$ também o é.

b) Se R é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo Q (via o morfismo ϕ), então são equivalentes: (i) ${}_RM$ é artiniano e noetheriano. (ii) ${}_RM$ é finitamente gerado. (iii) ${}_QM$ é um espaço vetorial de dimensão finita.

4) Suponha que R tenha um gerador simples ${}_RT$ e seja $D = {}_R\text{End}(T)$

a) Mostre que se ${}_RM$ é simples, então $M \cong T$.

b) Mostre que existe $n \geq 1$ tal que ${}_RR \cong T^{(n)}$ e $R \cong M_n(D)$ (isto é parte do que foi feito em aula)

c) Com as informações do ítem anterior, mostre que $\dim_D(T) = n$ e que $\lambda : R \to {}_R\text{BiEnd}(T)$ é um isomorfismo.

d) Mostre que $Z(r) \cong Z({}_R\text{End}(T))$

5) Um anel R é dito ser co-semisimples à esquerda se ${}_RM$ possuir um cogerador semisimples.

a) Mostre que são equivalentes: (i) R é co-semisimples. (ii) $\text{Rad}(M) = 0$ paratodo $M \in {}_R\mathcal{M}$. (iii)Todo R módulo à esquerda é co-semisimples (veja lista anterior). (iv) ${}_R\mathcal{M}$ tem um gerador co-semisimples.

b) Mostre que todo anel semisimples é co-semisimples.

c) Mostre que se ${}_R\mathcal{M}$ possui um co-gerador simples, então R é simples.

d) Mostre que são equivalentes: (i) R é simples e artiniano. (ii) Todo R módulo à esquerda não nulo é um gerador. (iii) Todo R módulo à esquerda não nulo é um co-gerador.