

*Eliezer Batista*  
*Igor Mozolevski*

# Métodos de Física-Matemática

Florianópolis, 2010





## **Universidade Federal de Santa Catarina Consórcio ReDiSul**

Campus Universitário – Trindade  
Caixa Postal 476  
CEP 88040-900 – Florianópolis – SC

**Reitor:** Alvaro Toubes Prata

**Vice-Reitor:** Carlos Alberto Justo da Silva

**Secretário de Educação a Distância:** Cícero Barbosa

**Pró-Reitora de Ensino de Graduação:** Yara Maria Rauh Müller

**Pró-Reitora de Pesquisa e Extensão:** Débora Peres Menezes

**Pró-Reitor de Pós-Graduação:** Maria Lúcia de Barros Camargo

**Pró-Reitor de Desenvolvimento Humano e Social:** Luiz Henrique Vieira Silva

**Pró-Reitor de Infra-Estrutura:** João Batista Furtuoso

**Pró-Reitor de Assuntos Estudantis:** Cláudio José Amante

**Centro de Ciências da Educação:** Wilson Schmidt

**Centro de Ciências Físicas e Matemáticas:** Tarciso Antônio Grandi

**Centro de Filosofia e Ciências Humanas:** Roselane Neckel

## **Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade à Distância**

**Coordenação de Curso:** Neri Terezinha Both Carvalho

**Coordenação de Tutoria:** Jane Crippa

**Coordenação Pedagógica/CED:** Roseli Zen Cerny

**Coordenação de Ambientes Virtuais/CFM:** Nereu Estanislau Burin

## **Comissão Editorial**

Antônio Carlos Gardel Leitão

Albertina Zatelli

Elisa Zunko Toma

Igor Mozolevski

Luiz Augusto Saeger

Roberto Corrêa da Silva

Ruy Coimbra Charão

## **Laboratório de Novas Tecnologias – LANTEC/CED**

### **Coordenação Pedagógica**

**Coordenação Geral:** Andrea Lapa, Roseli Zen Cerny

**Núcleo de Formação:** Nilza Godoy Gomes

**Núcleo de Pesquisa e Avaliação:** Claudia Regina Flores

### **Núcleo de Criação e Desenvolvimento de Materiais**

#### **Design Gráfico**

**Coordenação:** Laura Martins Rodrigues, Thiago Rocha Oliveira

**Projeto Gráfico:** Diogo Henrique Ropelato, Marta Cristina Goulart Braga,

Natal Anacleto Chicca Junior

**Diagramação:** xxxxxx

**Ilustrações:** xxxxxx

#### **Design Instrucional**

**Coordenação:** Juliana Machado

**Design Instrucional:** xxxxxx

**Revisão Gramatical:** xxxxxx

*Copyright © 2010, Universidade Federal de Santa Catarina / Consórcio RediSul*

*Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Coordenação Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade à Distância.*

## **Ficha Catalográfica**

---

# Sumário

Apresentação.....	7
<b>1. Matemática e Física.....</b>	<b>13</b>
1.1 A linguagem matemática em Física.....	15
1.2 Análise dimensional.....	23
1.3 Ordem de magnitude .....	42
1.4 Erros e algarismos significativos.....	49
Bibliografia Complementar Comentada .....	58
<b>2. Modelagem Matemática de Fenômenos Físicos .....</b>	<b>61</b>
2.1 Introdução .....	63
2.2 Modelagem com funções elementares.....	73
2.2.1 Funções polinomiais de primeiro grau.....	75
2.2.2 Funções polinomiais de segundo grau.....	80
2.3 O uso de cônicas em física .....	86
2.3.1 Parábolas .....	88
2.3.2 Elipses.....	97
2.3.3 Hipérbolas.....	103
Apêndice: A equação polar de uma cônica .....	107
Bibliografia comentada.....	112
<b>3. Equações Diferenciais Ordinárias .....</b>	<b>115</b>
3.1 Motivações.....	117
3.2 Definições e exemplos .....	120
3.3 Problemas envolvendo EDOs de primeira ordem .....	125
3.3.1 Equações diferenciais ordinárias lineares.....	126
3.3.2 Problemas mecânicos com EDOs de primeira ordem.....	136
3.4 Sistemas mecânicos conservativos.....	141
3.4.1 Oscilador harmônico .....	144
3.4.2 Movimento sob atração gravitacional .....	161
3.5 O discreto e o contínuo .....	170
Bibliografia comentada:.....	174

4. Equação da Corda Vibrante .....	177
4.1 Dedução da equação da corda vibrante .....	179
4.2 Problema de Cauchy para uma corda infinita – Método de d'Alembert.....	183
4.3 Vibrações de uma corda limitada – Método de separação de variáveis.....	192
Referências .....	205
5. Equação do Calor.....	207
5.1 Equação do calor unidimensional: condução do calor numa barra.....	209
5.2 Método de separação de variáveis para equação do calor .....	215
Referências .....	226

# Apresentação

A separação entre a Matemática e a Física é um fenômeno muito recente na história da ciência. Desde a antiguidade, temos exemplos da frutífera interação entre a matemática, como ciência do intelecto puro e as ciências naturais. Arquimedes, por exemplo, ao mesmo tempo que demonstrava teoremas de geometria também cuidava de questões sobre o equilíbrio dos corpos flutuantes. Ptolomeu desenvolveu grande parte da trigonometria esférica para o estudo do movimento dos planetas. Já nos primórdios da ciência moderna, também vimos o surgimento do cálculo diferencial e integral como linguagem matemática para o estudo do movimento dos corpos. Tanto a Física como a Matemática andavam juntas em trabalhos de grandes matemáticos dos séculos XVIII e XIX, como os Bernoulli, Euler, Lagrange, Gauss, Hamilton, etc.

Somente nos primórdios do século XX que a distinção entre matemática pura e ciências físicas ficou mais nítida, e o que hoje vemos é a existência de dois universos quase que paralelos: De um lado, os matemáticos trabalham em teorias cada vez mais abstratas, sem a preocupação com qualquer tipo de aplicação às ciências (não que elas não venham a existir). Por outro lado, os físicos trabalham a matemática como uma ferramenta teórica para modelar seus fenômenos, sem muita preocupação com o rigor e a estrutura lógica da linguagem que eles utilizam. É preciso que haja uma ponte de contato entre estas duas áreas para fomentar o verdadeiro espírito científico, um diálogo entre dois tipos de saber tão enraizados em nossa cultura. Aos físicos é necessário um aprimoramento do rigor matemático e uma melhor compreensão das estruturas matemáticas necessárias para a descrição dos fenômenos físicos. Aos matemáticos, é necessária uma volta às origens, pois a matemática, acima de tudo, consiste de construções abstratas elaboradas na tentativa de compreender melhor o mundo. A maior parte das grandes teorias matemáticas teve sua motivação no mundo físico, e até hoje é assim.

O objetivo desta disciplina é fornecer alguns elementos teóricos para fomentar este diálogo entre a Física e a Matemática, principalmente na atividade profissional do professor de Matemática. O professor de Matemática nos ensinos fundamental e médio pode tirar proveito de raciocínios e exemplos oriundos das ciências naturais para introduzir os conceitos matemáticos em suas aulas. É claro que abordaremos tópicos

que vão além dos conteúdos presentes no ensino básico, como equações diferenciais ordinárias e parciais, mas nossa intenção ao fazê-lo é levar o estudante a compreender um pouco mais as dimensões do conhecimento físico e o uso de estruturas matemáticas na modelagem. Um pequeno vôo alçado para oferecer uma visão panorâmica do trabalho do cientista e da interação entre os saberes.

Este livro está dividido em 5 capítulos, conforme descreveremos a seguir:

No primeiro capítulo, estudaremos os usos particulares que as ciências físicas fazem dos números. Os números em Matemática são apenas números: naturais, inteiros, racionais, reais, complexos. Os números em física podem ser medidas de tempo, de espaço, de temperatura, de corrente elétrica, etc. Assim, cada número, quando representa uma medida de uma determinada grandeza vem acompanhado de uma dimensão, que o diferencia de algum outro número, que embora possa possuir o mesmo valor numérico, representa uma medida de outra grandeza. Por exemplo, 5m é uma medida de comprimento, enquanto 5s é uma medida de tempo, portanto, o número é o mesmo, mas o que eles representam são duas coisas completamente diferentes.

O estudo das técnicas de cálculo envolvendo as dimensões das grandezas físicas denomina-se análise dimensional. A análise dimensional nos auxilia em vários aspectos teóricos como:

- 1) A verificação da homogeneidade de fórmulas físicas.
- 2) A previsão de equações físicas.
- 3) A mudança de sistemas de unidades.
- 4) A consideração de fatores de escalas para o estudo de modelos.

Além da análise dimensional, também abordaremos neste primeiro capítulo a questão da ordem de magnitude. Muitas vezes, para fazermos uma previsão ou uma análise de um sistema físico não precisamos saber exatamente o valor numérico de uma determinada grandeza, apenas precisamos estimar sua ordem de magnitude, isto é, a potência de 10 mais próxima do valor exato. Esta avaliação depende de um treinamento de nossos sentidos e habilidades numéricas, estas habilidades somente são aprimoradas com a prática. Veremos alguns procedimen-

tos para podermos avaliar melhor a ordem de magnitude de algumas grandezas.

Por último, abordaremos de uma questão fundamental para a Física experimental, o tratamento de erros experimentais. Todas as medidas são efetuadas com aparelhos que possuem limitações em sua precisão numérica. Existe então um valor estimado para a medida e um intervalo de erro, dentro do qual está o valor real da grandeza medida. Estas grandezas entram em cálculos para a obtenção dos valores de outras grandezas. Os erros experimentais acabam se propagando nestes cálculos e devem ser estimados com todo o cuidado, sob o risco de não obtermos resultados confiáveis. Na última seção do primeiro capítulo, veremos regras para o cálculo da propagação de erros experimentais.

No segundo capítulo, mostraremos alguns exemplos de modelagem de sistemas físicos que podem ser feitos com o uso apenas de matemática elementar. Elementar nem sempre quer dizer simples, muitas vezes o raciocínio matemático envolvido pode ser sofisticado, sem que, no entanto, tenhamos que utilizar ferramentas matemáticas além das que podem ser introduzidas no ensino básico. Sendo um pouco mais precisos, neste capítulo mostraremos o que se pode fazer em termos de modelagem matemática sem o uso de ferramentas do cálculo diferencial e integral.

Iniciamos com o estudo da modelagem sob o aspecto geométrico e sob o aspecto físico. O aspecto geométrico se refere à escolha de sistema de coordenadas, da geometria do sistema, da identificação dos graus de liberdade, dos fatores de escala, etc. O aspecto físico consiste basicamente na identificação das grandezas físicas envolvidas no sistema em questão bem como a dependência funcional entre elas. A verificação da dependência funcional entre as grandezas envolve uma série de procedimentos experimentais de tomadas de medidas de forma que sejam isoladas todas as outras grandezas e se observe a variação de apenas uma em relação à outra. As relações funcionais que se originam da análise dos dados experimentais são denominadas leis empíricas.

Na sequência, mostramos alguns sistemas físicos que podem ser modelados com funções polinomiais de primeiro e segundo grau. As funções de primeiro grau são adequadas para tratarmos de problemas de variação (velocidade) constante, assim como problemas de proporcionalidade. Sugerimos alguns exemplos nos quais o raciocínio cinemático pode ser útil para a resolução de problemas de regra de três simples e

composta. As funções de segundo grau, por sua vez, são adequadas para o tratamento de problemas com segunda variação (aceleração) constante. Neste contexto, tratamos dos problemas de queda livre de corpos sob a aceleração da gravidade e problemas de lançamentos balísticos.

Finalizando, também abordamos o uso de curvas cônicas em Física. As seções cônicas são conhecidas e estudadas desde a antiguidade, menção especial aos trabalhos de Arquimedes e Apolônio. Com o surgimento da geometria analítica, as curvas cônicas puderam ser descritas por equações quadráticas o que demonstra uma razoável simplicidade entre as curvas algébricas. Quanto mais o cálculo diferencial foi sendo usado para a modelagem em ciências naturais, mais as cônicas se mostraram presentes na descrição dos sistemas físicos. Esta coincidência entre construções matemáticas abstratas e objetos da vida real, muitas vezes de maneira simples e elegante, é surpreendente e fascinante. O fato é que as cônicas servem para descrever o movimento de corpos se movendo sob um campo gravitacional, possuem propriedades ópticas importantes para a manufatura de espelhos e instrumentos astronômicos, aparecem em eventos simples como a propagação do som por aviões supersônicos e outros, não tão simples como o movimento planetário.

No terceiro capítulo, introduziremos técnicas referentes à resolução de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Uma grande parte de problemas físicos está relacionada com o estudo da evolução temporal de certos sistemas. Basicamente, o que se deseja é previsibilidade, sempre quando possível, isto é, dado um conjunto de condições iniciais, o objetivo principal é prever o comportamento do sistema em um dado instante no futuro. Este tipo de controle é importantíssimo, por exemplo, para se lançar um veículo espacial com o objetivo de explorar outros planetas, é necessário que se tenha uma estimativa muito fina de sua órbita, pois consideradas as distâncias percorridas, o menor desvio de trajetória implicaria na perda irreparável do equipamento.

Problemas de evolução temporal de sistemas físicos em geral dão origem a equações diferenciais ordinárias. O termo “ordinária” se refere ao fato de as variáveis do sistema dependerem de uma única variável livre, no caso, o tempo. Se as variáveis do sistema dependerem de mais de uma variável livre, por exemplo, da posição e do tempo, então as equações originadas serão equações diferenciais parciais. As soluções de uma EDO são as possíveis trajetórias que o sistema pode assumir. Ao fixarmos uma condição inicial, escolhemos uma determinada tra-

jetória, na qual o sistema sempre se manterá. O teorema de existência e unicidade de soluções de EDOs nos fornece condições que garantem que dada uma condição inicial a trajetória do sistema estará unicamente determinada. Na maioria dos problemas envolvendo situações físicas reais, as condições do teorema de existência e unicidade são automaticamente satisfeitas.

No estudo específico de modelagem de sistemas físicos com EDOs, primeiramente apresentamos os sistemas que podem ser descritos por EDOs de primeira ordem, isto é, que envolvem apenas uma derivada primeira. No entanto, por causa da segunda lei de Newton, que envolve aceleração, a maioria dos sistemas na mecânica clássica é descrita por EDOs de segunda ordem. Neste capítulo, tratamos especificamente dos sistemas conservativos, isto é, sistemas mecânicos nos quais a energia total é constante ao longo das trajetórias, como o oscilador harmônico simples e o movimento planetário. Também discutimos variações sobre o oscilador harmônico, como o oscilador harmônico amortecido e o oscilador harmônico forçado, que tornam os sistemas não mais conservativos, no entanto, por se tratarem de EDOs lineares, estes sistemas são muito instrutivos no que se refere à introdução de técnicas de resolução de EDOs.

Nos dois últimos capítulos, trataremos da modelagem de sistemas físicos envolvendo equações diferenciais parciais (EDPs). Diferentemente das EDOs, as EDPs envolvem técnicas bem mais sofisticadas de resolução: Suas soluções são sempre dadas em termos de séries infinitas (séries de Fourier), e portanto problemas de convergência são corriqueiros ao se tratar de EDPs.

Os sistemas tratados nestes dois capítulos serão os fenômenos vibratórios e a propagação do calor nos meios materiais. No capítulo 4, a EDP a ser tratada, que está relacionada com os fenômenos vibratórios, é a equação de onda, esta equação envolve derivadas segundas com relação ao tempo e às coordenadas espaciais. Este tipo de equação aparece onde quer que exista algum movimento oscilatório, seja uma corda vibrante, seja uma membrana vibrante (como um tambor, por exemplo) seja uma onda sonora no ar ou ainda uma onda eletromagnética se propagando no vácuo. No capítulo 5 a EDP estudada se relaciona com fenômenos de transporte, pode ser o calor se propagando através de uma barra ou de uma chapa, ou ainda a difusão de um fluido em um meio contínuo.

Um estudo detalhado de técnicas de resolução de EDPs fugiria muito do escopo desta disciplina, por isto, nos restringimos a apresentar as equações, deduzi-las a partir da situação física e mostrarmos algumas soluções particulares das mesmas.

Esperamos que todos possam apreciar o estudo desta disciplina e utilizar em sala de aula alguns métodos e exemplos abordados em nosso material didático.

*Eliezer Batista*

*Igor Mozolevski*

# 1 Matemática e Física



# 1 Matemática e Física

*Neste capítulo vamos demonstrar os diversos aspectos da importância da Matemática na elaboração do conhecimento em Física; utilizar a análise dimensional para avaliarmos as dependências funcionais existentes entre as grandezas; discutir questões de similitude e escala em fenômenos físicos; estimar a ordem de magnitude de grandezas presentes em nossa experiência cotidiana e avaliar o erro existente em medidas experimentais e calcular sua propagação no cálculo de grandezas derivadas.*

*Richard Phillips Feynman, físico norte americano, nasceu em 1918 em Nova Iorque. Doutorou-se em Física pelo MIT (Massachusetts Institute of Technology). Participou, durante a segunda guerra mundial, do Projeto Manhattan, o qual produziu para Os Estados Unidos da América, a primeira bomba atômica. Ganhou o Prêmio Nobel por seu trabalho em teoria quântica de campos, desenvolvendo a eletrodinâmica quântica, a qual unificou o eletromagnetismo de Maxwell com a mecânica quântica. Foi atuante na comunidade física até a morte, em 1988, devido a um câncer.*

*“O propósito primordial da Física é encontrar um número, com casas decimais, etc.! De outra forma, não se terá feito coisa alguma.”  
(R. P. Feynman)*

## 1.1 A linguagem matemática em Física

A frase de abertura desse capítulo foi dita por um dos maiores físicos do século XX, [Richard Phillips Feynman](#). Há um pouco de exagero nessa afirmação, afinal, o principal propósito da Física é a compreensão plena dos fenômenos naturais, mas certamente a habilidade de uma teoria física de prover um resultado numérico que possa ser verificado experimentalmente, é um critério de avaliação utilizado para comprovar se a teoria está correta ou não. Uma teoria física é uma construção puramente intelectual, que obviamente leva em conta os fenômenos naturais previamente observados, objetivando não apenas explicar o que já é conhecido, como também fornecer elementos que nos guiem a fenômenos ainda não observados.

Como construção intelectual, teorias físicas necessitam de linguagem adequada para permitir seu desenvolvimento e transmissão de maneira adequada. A linguagem matemática tem se mostrado a mais adequada para o propósito da elaboração de teorias físicas.

Essa “descoberta”, embora nos pareça tão óbvia, é razoavelmente recente na história da civilização humana. Apesar de termos registros do uso da linguagem matemática para o tratamento de alguns problemas físicos na Antiguidade, por exemplo, em alguns trabalhos de **Arquimedes**, podemos marcar o início do tratamento moderno das teorias físicas com a linguagem matemática a partir dos trabalhos de **Galileo Galilei** e **Isaac Newton**.

**Arquimedes** foi um dos grandes matemáticos da Antiguidade. Muito embora tenha colaborado grandemente com matemáticos de Alexandria, a qual era a capital cultural em sua época, passou quase toda sua vida em Siracusa, atual Sicília, onde desenvolveu grande parte de seus escritos. Seus métodos envolviam grande engenhosidade e intuição física. São de sua autoria, o princípio das balanças, o qual foi utilizado para calcular volumes de sólidos não triviais, como a esfera, e o princípio do equilíbrio hidrostático, com o qual realizou vários estudos importantes sobre flutuação de corpos.

**Galileo Galilei**, nascido em 1564, na cidade de Pisa, na Itália, começou seus estudos universitários em medicina, abandonando-a posteriormente para se dedicar à Matemática. Seu pioneirismo em relação à metodologia para as ciências físicas se deve ao uso da experimentação para estabelecer a validade das leis naturais e a utilização da matemática (mais especificamente a geometria) para

descrever o movimento dos corpos. Foi por Galileo que o sistema copernicano se tornou amplamente conhecido e estudado, mesmo que isso lhe tenha trazido problemas com a hierarquia da igreja católico-romana. Morreu em Florença em 1642.

**Isaac Newton**, nascido em 1642, (mesmo ano da morte de Galileo Galilei), em Woolsthorpe, Inglaterra, destacou-se precocemente por seu talento matemático, sendo orientado pelo matemático Isaac Barrow, na Universidade de Cambridge. Newton tem sua importância na história da física e da matemática por duas razões básicas: a invenção do cálculo diferencial e integral e a formulação da dinâmica clássica (ambas as contribuições estão relacionadas). Sua obra prima é o livro **Princípios Matemáticos para a Filosofia Natural**, escrita com o estilo das obras clássicas da geometria grega, marcou o início da ciência que hoje conhecemos como Física. Newton morreu em Londres, no ano de 1727.

O primeiro e mais básico uso da linguagem matemática em física é o tratamento numérico de grandezas físicas. Ao descrevermos fenômenos naturais, precisamos lidar com certas quantidades, como comprimento, tempo, velocidade, temperatura, carga elétrica, etc., caracterizarão o estado do sistema analisado. Ao realizarmos um experimento, teremos como resultado uma sequência de números, que corresponderão aos valores numéricos das grandezas avaliadas no sistema. É através do comportamento e da variação desses diversos números, bem como da inter-relação entre eles, que podemos inferir leis de caráter geral sobre o funcionamento de determinado sistema físico.

Uma vez estabelecidas essas leis, denominadas leis empíricas, podemos utilizá-las para prevermos o comportamento de grandezas físicas mesmo em situações ainda não testadas por experimentos.

Com a ajuda de ferramentas matemáticas mais sofisticadas, podemos ainda misturar essas leis empíricas e derivar novas leis que devem funcionar puramente baseadas em evidências experimentais anteriores e em regras de raciocínio matemático. Finalmente, podemos ainda elaborar um quadro teórico mais geral, a partir de primeiros princípios, que nos permita inferir todas as leis empíricas conhecidas dentro de determinado contexto, a partir da manipulação pura e simples de objetos matemáticos com natureza totalmente abstrata.

Um exemplo de teoria física é a teoria da gravitação de Newton, a qual, dentro de um único contexto, nos permite derivar todas as leis referentes à queda de corpos, como também obter precisamente as leis de Kepler sobre o movimento dos planetas.

*Johannes Kepler, astrônomo alemão, nascido em 1571 e morto em 1648, formulou as três leis do movimento planetário a partir de dados observacionais obtidos ao longo de anos por ele e pelo seu mestre Ticho Brahe. Basicamente as três leis de Kepler são:*  
1- *As órbitas dos planetas são elípticas, com o sol ocupando o lugar de um dos focos.* 2- *Um planeta em sua órbita varre áreas iguais em tempos iguais.*  
3- *Os quadrados dos períodos das órbitas dos planetas são diretamente proporcionais aos cubos dos raios médios de suas órbitas.*

Para entendermos bem como utilizarmos a linguagem matemática, para o tratamento de problemas físicos, vamos começar pelo uso dos números e sua interpretação. Como dissemos, todo experimento resultará em uma coleção de números os quais representarão as medidas de certas grandezas físicas assumidas pelo sistema em questão, durante a realização do experimento. Algumas questões surgem, imediatamente, quando consideramos medidas físicas:

- 1) Qual o grau de precisão de nossos instrumentos de medida?
- 2) Que tipo de informação nos traz esse ou aquele número?
- 3) Nossa modelagem teórica coaduna perfeitamente com as medidas obtidas experimentalmente?
- 4) E se não, qual o limite entre o previsto teoricamente e o que foi observado na realidade?

Vamos exemplificar as questões acima com situações concretas. Primeiramente, sobre as limitações de nossos aparelhos de medida. Muito além da precisão das escalas de medida do aparelho, que pode parecer que é apenas questão de tempo e tecnologia

para desenvolver aparelhos mais precisos, existem limitações intrínsecas à natureza do experimento que nos impedem de termos uma precisão arbitrariamente grande.

Se quisermos, por exemplo, medir a temperatura da água em uma panela aquecida, devemos introduzir um termômetro na mesma, mas o valor obtido da temperatura no final da medição é a temperatura de equilíbrio entre a água e o termômetro. Em outras palavras, a água teve que esfriar, mesmo que seja só um pouquinho, e o termômetro teve que esquentar. Houve trocas de calor e, portanto, a temperatura obtida não é exatamente a temperatura da água antes de se introduzir o termômetro.

É óbvio que essa diferença, entre a temperatura inicial da água e a temperatura final de equilíbrio, será tanto menor quanto maior for a quantidade de água. Se medirmos a temperatura de uma banheira cheia, a medida será muito mais acurada do que se medirmos a temperatura de um copinho de café. Então, as limitações do aparelho serão dadas em uma situação na qual a diferença de temperatura for menor que a menor divisão na escala medida pelo aparelho. Note que isso foi ainda uma simplificação, se quiséssemos ter uma medida corretíssima da temperatura, teríamos que considerar as trocas de calor do líquido com o recipiente, com o ar que circunda o recipiente, etc. Em resumo, as limitações de um aparelho de medição podem ser avaliadas quando a soma total dos fatores de imprecisão da medida de determinado evento for inferior à menor escala de medição do aparelho.

Quanto à segunda questão, do significado que um número tem para uma medida física e sobre a concordância entre um número fornecido por uma previsão teórica e o obtido por uma medida experimental, considere a medida da diagonal de um quadrado de lado 1 m. Todos sabemos, do teorema de Pitágoras, que a medida da diagonal de um quadrado é igual à medida do lado multiplicada pela raiz quadrada de dois. Mas que sentido faz falarmos em  $\sqrt{2}$  m? Temos um número irracional, cujas primeiras trinta e uma casas decimais são 1,4142135623730950488016887242097.... Para a simples obtenção de um número desses, até essa ordem em um processo de medida de comprimento, teríamos que ter uma régua com escala que comportasse medidas de  $10^{-31}$  m. Como o

diâmetro médio de um átomo é da ordem de  $10^{-12}$  m, seria fisicamente impossível fazermos uma régua que medisse sequer essa aproximação para  $\sqrt{2}$  m, já que a régua teria que ser feita de átomos. Lembremo-nos, ainda, que um número irracional não possui qualquer regularidade, em representação decimal, portanto o conhecimento exato desse número só se daria com o conhecimento de todas suas casas decimais. Em resumo, uma previsão teórica pode nos fornecer números, os quais somente serão revestidos de sentido físico quando consideradas as devidas aproximações que devem ser feitas, levando-se em conta as limitações dos aparelhos de medição.

*Afinal, quando você leva uma multa de trânsito por excesso de velocidade, você recebe uma fotografia dizendo que estava exatamente naquele semáforo, com determinada velocidade (proibida).*

*Em futebol é comum comentaristas dizerem que a bola batida no pênalti entrou no gol com uma determinada velocidade (impossível para o goleiro pegar).*

Indo um pouco além, a própria natureza impõe limitações a medidas arbitrárias. Em inúmeras situações, é comum a necessidade de medir simultaneamente a posição e velocidade de um corpo em movimento, seja ele um avião, um **carro**, ou uma **bola de futebol**, mas será que é sempre possível medirmos a posição e velocidade de determinado objeto? A resposta a essa pergunta é negativa e só foi possível de ser dada no final da década de 20 do século passado. Esse é o conhecido princípio da incerteza de Heisenberg e reside nos fundamentos da mecânica quântica.

Finalmente, mencionamos as limitações das próprias teorias, isto é, determinada teoria pode descrever com precisão certos fenômenos, mas quando certos limites são ultrapassados, a teoria deixa de ter aplicabilidade. Há, então, a necessidade da formulação de novas teorias que ultrapassem os limites da teoria anterior. Em geral, quando uma nova teoria científica nasce, existe o rompimento com os paradigmas de pensamento utilizados no contexto da velha teoria, temos então uma revolução científica (veja a referência [3] na bibliografia comentada no final do capítulo). Vamos dar dois exemplos de revoluções científicas ocorridas na história da ciência:

O primeiro exemplo pode ser visto na transição do modelo geocêntrico para o modelo heliocêntrico do sistema solar. O modelo geocêntrico consiste em pressupor que a Terra seja imóvel e esteja localizada no centro do universo, assim, o Sol, a Lua e todos os planetas giram em torno da Terra. O sistema geocêntrico é o

mais natural e intuitivo. Podemos verificar isso até pela nossa linguagem usual, quando falamos, nascer do Sol ou por do Sol, etc. Também, o sistema geocêntrico é eficiente para a navegação, previsão de eclipses e mapeamento de astros na abóboda celeste. Por essa razão, o sistema geocêntrico foi grandemente adotado desde a Antiguidade até o século XV de nossa era devido a seu grande apelo do ponto de vista prático. A obra central que expõe detalhadamente o sistema geocêntrico é **Almagesto**, de **Cláudio Ptolomeu**. O grande problema teórico que desafiou o sistema geocêntrico foi a irregularidade das trajetórias dos planetas na abóboda celeste.

**Cláudio Ptolomeu**, nascido no Egito por volta do ano 90 d.C. e morto em 167 d.C. na cidade de Alexandria, também no Egito, onde desenvolveu grande parte de sua obra científica. Seu trabalho consiste basicamente de quatro grandes livros (tetrabiblos), sendo que o primeiro deles, **Almagesto**, título em árabe que significa **O Grande Tratado**. Nessa obra, Ptolomeu demonstra muitos resultados de trigonometria e trigonometria esférica, elabora tabelas de senos, expõe detalhadamente o sistema geocêntrico, calculando com ele a posição de todos os planetas conhecidos: Mercúrio, Venus, Marte, Júpiter e Saturno.

**Nicolau Copérnico**, nascido em Torún, Polônia em 1473 e morto em Frauenburg, também na Polônia, em 1543. Copérnico, que além de astrônomo e matemático, também era versado em direito canônico e medicina, é conhecido basicamente pela proposta do sistema heliocêntrico, descrito em sua obra prima **A Revolução das Esferas Celestes**.

A solução dada no sistema geocêntrico era completamente artificial, a saber, postulava-se a existência de esferas secundárias que, estas sim, orbitavam em torno da Terra, enquanto os planetas realizavam seu movimento ao redor dessas esferas, realizando, assim, trajetórias denominadas epiciclos. Somente com **Nicolau Copérnico** o sistema geocêntrico foi substituído pelo sistema heliocêntrico, no qual agora o Sol ocupava a posição central, e a Terra e os outros planetas orbitavam ao redor dele. Assim, as irregularidades das trajetórias dos planetas eram tão somente o resultado do movimento relativo entre a Terra e o determinado planeta, dispensando o uso de epiciclos. Mais uma vez: não é que o sistema geocêntrico não trouxesse resultados numéricos exatos, mas sua limitação estava na necessidade de introdução de elementos “ad hoc”, isto é, com o único propósito de preencher as lacunas do sistema.

O segundo exemplo de revolução científica data do início do sécu-

lo XX e trata-se da criação da teoria quântica. Os fenômenos desconcertantes que levaram à criação da teoria quântica evidenciaram os limites da teoria eletromagnética clássica. Aqui também, não significa que a teoria eletromagnética clássica esteja errada e não produza resultados corretos, afinal os meios de comunicação, como telégrafo e telefone, são oriundos de previsões feitas por essa teoria, a saber, a existência de ondas eletromagnéticas que se propagam à velocidade da luz. Os dois desafios principais à teoria eletromagnética clássica foram: a radiação de corpo negro e a própria estrutura do átomo.

A radiação de corpo negro consiste na emissão luminosa de uma cavidade metálica aquecida a determinada temperatura. O problema era que a previsão da teoria clássica seria a existência de emissões em faixas de frequência, arbitrariamente altas, (fenômeno chamado de catástrofe ultravioleta), mas isso não era verificado experimentalmente, pelo contrário, havia um espectro muito bem determinado de frequências que a teoria clássica era incapaz de fornecer. No ano de 1900, o físico alemão [Max Planck](#) formulou

uma explicação para a radiação do corpo negro que se baseava em duas ideias principais: a primeira a de que a energia de uma onda luminosa era proporcional à sua frequência, e a constante de proporcionalidade era dada pela constante que hoje conhecemos como constante de Planck,  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ . A segunda ideia, mais exótica, era de que a energia de ondas luminosas somente podia assumir valores múltiplos inteiros dessa constante e não qualquer valor real. É como se a energia estivesse distribuída em pequenos pacotes, ou “quanta”, e não fosse uma grandeza contínua. Apesar da radicalidade dessas ideias, esse procedimento veio a se mostrar eficaz na previsão do espectro de radiação do corpo negro.

O segundo grande desafio à teoria eletromagnética clássica era a estrutura do átomo. Nas duas primeiras décadas do século XX se configurou a seguinte interpretação oficial da estrutura do átomo: o átomo seria como um minúsculo sistema solar, onde no centro estaria o núcleo, de carga positiva, e ao redor girariam elétrons, de carga negativa, atraídos pela força eletrostática do núcleo, executando órbitas circulares ou elípticas. O problema era que, segundo a teoria clássica, o elétron ao realizar um movimento

*Max Planck, nascido em Kiel, Alemanha, em 1858 e morto em Göttingen, Alemanha, em 1947. Max Planck é considerado o pai da teoria quântica, ao explicar a radiação do corpo negro, recebendo por isso, o prêmio Nobel no ano de 1918. Hoje a constante fundamental da natureza que está presente na formulação da mecânica quântica recebe seu nome, a constante de Planck é dada por  $h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ . Planck foi um grande nome da ciência alemã na primeira metade do século XX e com sua influência tentou proteger os cientistas alemães judeus durante o regime nazista.*

curvilíneo sofreria acelerações, forçando-o a emitir radiação eletromagnética. Mas, ao emitir radiação eletromagnética, o elétron perderia energia em seu movimento e com isto cairia sobre o núcleo. Assim, como era evidenciado por experimentos prévios, somente restaria ao átomo ser uma massa concentrada de partículas neutras e não um complexo sistema com cargas positivas concentradas em uma região muito pequena no centro do átomo e uma região esparsa de partículas de carga negativa ao redor.

A solução para o problema também se mostrou exótica a princípio, mas depois resultou em muitos benefícios, tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. Basicamente, a solução para a estabilidade do átomo veio através da proposta do físico dinamarquês [Niels Bohr](#). Nessa formulação, elétrons não teriam somente sua energia quantizada, mas também o seu momento angular, assim, os elétrons apenas estariam localizados em alguns estados, ou “camadas” com energia e momento angular específicos. Os elétrons, ao transitarem de uma camada para outra, emitiriam ou receberiam uma radiação eletromagnética de energia específica, e, portanto, de frequência também específica. Esse modelo explicava, por exemplo, os espectros característicos de emissão de certos elementos químicos. As formulações de Max Planck e Niels Bohr, no entanto, ainda tiveram que esperar até o final da década de 20 do século passado para serem inseridas em um contexto teórico mais elaborado, a saber, o da mecânica quântica.

Nosso objetivo nesse livro é mostrar os diversos aspectos do uso da linguagem e das técnicas matemáticas na modelagem e descrição de sistemas físicos. Aspectos de caráter mais teórico serão abordados em capítulos subsequentes, enquanto nesse primeiro capítulo discutiremos a utilização e o significado dos números para a medida das grandezas físicas. Em primeiro lugar, precisamos entender o conceito de dimensão e de unidades de medida, isto é, de que trata a análise dimensional. Em segundo lugar, verificaremos que muitas das estimativas feitas em física dizem respeito apenas à ordem de magnitude da grandeza estudada, assim, precisamos de certas ferramentas para estimar a ordem de magnitude. Finalmente, faremos uma breve incursão pela questão do erro em medidas físicas e como se propagam no cálculo de outras grandezas.

*Niels Henrik David Bohr, nascido em Copenhague, Dinamarca, em 1885 e morto também em Copenhague em 1962. Niels Bohr foi o responsável pela formulação de um modelo atômico que levava em conta a teoria quântica, proposta por Max Planck. Essa formulação, muito embora levasse quase uma década para ser totalmente estabelecida dentro do arcabouço teórico da mecânica quântica, obteve sucesso ao explicar com exatidão as frequências características de emissão do átomo de hidrogênio. Bohr recebeu o prêmio Nobel em 1922, por contribuições à teoria atômica. Sua carreira científica teve grande influência e basicamente, devemos a Bohr a interpretação oficial da mecânica quântica, chamada interpretação de Copenhague.*

## 1.2 Análise dimensional

A análise dimensional consiste de um conjunto de técnicas e resultados que nos possibilita:

- 1) A verificação da homogeneidade de fórmulas físicas.
- 2) A previsão de equações físicas.
- 3) A mudança de sistemas de unidades.
- 4) A consideração de fatores de escalas para o estudo de modelos.

Considere uma grandeza física  $G$ , essa pode ser o comprimento de um objeto, que denotaremos por  $L$ , um intervalo de tempo, que denotaremos por  $T$ , a massa de um corpo, que denotaremos por  $M$ , a carga elétrica, que será denotada por  $q$ , etc. Existem basicamente dois tipos de grandeza de interesse para a física: grandezas escalares e grandezas vetoriais.

---

**G**randeza escalar é uma grandeza que pode ser descrita por um único número real.

---

Grandezas como tempo, massa, carga elétrica e temperatura, por exemplo, são grandezas escalares. Grandezas escalares podem ser somadas, multiplicadas e podemos tomar seus inversos, pois suas medidas tomam valores no corpo dos números reais. Grandeza vetorial, por sua vez é uma grandeza que não pode ser descrita por um único número.

---

**U**ma grandeza vetorial possui módulo, direção e sentido e, sua descrição matemática é dada por elementos de um espaço vetorial.

---

Em todo esse livro, os espaços vetoriais considerados serão  $\mathbb{R}^2$ , o plano, ou  $\mathbb{R}^3$ , o espaço. Vamos tomar um exemplo: quando você diz que o deslocamento de um corpo foi de 5 m, ficam as perguntas: De onde? Para onde? Isto é, queremos saber a direção e o sentido do deslocamento. Grandezas como deslocamento, velocidade

de, aceleração, força e campo elétrico, por exemplo, são grandezas vetoriais. Os aspectos dimensionais relativos a grandezas do tipo vetorial corresponderão apenas às suas componentes individuais e ao seu módulo, ou seja, a norma do vetor que representa a grandeza.

Reveja seu material de Álgebra linear.

Agora consideraremos os aspectos relativos às medidas das grandezas físicas. Seja  $G$  uma grandeza física, se essa for escalar, estamos considerando a grandeza em si, se for vetorial, estamos nos referindo apenas ao seu módulo (ou em alguns casos, a uma de suas componentes individuais como vetor, isso ficará claro de acordo com o contexto). A medida desta grandeza física,  $m(G)$ , é a comparação com a unidade básica dessa grandeza em algum sistema de unidades,  $U(G)$ , assim, podemos escrever:

$$G = m(G) \cdot U(G),$$

isto é, no processo de medida obtivemos  $m(G)$  unidades  $U(G)$ . Por exemplo, determinado aparelho de TV possui tela de 40 polegadas, ou simbolicamente 40", isto é, se medirmos a tela da televisão com um aparelho de medição adequado, encontraremos como resultado 40 unidades denominadas polegadas. Esse resultado numérico depende, obviamente, da unidade de medida considerada, pois se outra pessoa efetuar a medida com outra escala de medição, por exemplo, em centímetros, encontrará o valor 101,6 cm. Obviamente, estamos falando da mesma grandeza física, a saber, o comprimento da diagonal da tela do aparelho de TV, portanto, devemos ter a igualdade:

$$40" = 101,6 \text{ cm},$$

o que significa que  $1" = 2,54 \text{ cm}$ , e essa razão é válida em qualquer evento de medida de comprimento. Mais abstratamente, se  $U_1(G)$  e  $U_2(G)$  são unidades de medida da grandeza  $G$ , e se  $m_1(G)$  e  $m_2(G)$  são os valores numéricos das medidas de  $G$ , relativos às respectivas unidades, então temos a igualdade:

$$m_1(G) \cdot U_1(G) = m_2(G) \cdot U_2(G).$$

Porém, antes de nos atermos a questões de mudanças de unidade

*Eventualmente, no capítulo de equações diferenciais parciais, ao se tratar da equação de condução de calor, venha a se necessitar da grandeza temperatura.*

de medida, vamos analisar a questão das dimensões das grandezas físicas de um ponto de vista geral, independente de um sistema particular de unidades. Vamos denotar por  $[G]$  a dimensão da grandeza  $G$ . A dimensão nos orienta qual a unidade de medida dentro de determinado sistema de medidas que devemos tomar para efetuarmos a medida dessa grandeza. Um dos problemas importantes dentro da análise dimensional é estabelecermos relações entre as grandezas, de forma que possamos com um número mínimo de grandezas independentes, descrevermos todas as outras. Considerando os conteúdos desse livro, veremos que as **grandezas fundamentais** a serem utilizadas serão: comprimento,  $L$ , tempo,  $T$ , massa,  $M$ , e carga elétrica,  $q$ , as respectivas dimensões serão denotadas por  $[L]$ ,  $[T]$ ,  $[M]$  e  $[q]$ . Podemos, a partir dessas grandezas e dimensões, deduzir as dimensões de outras grandezas importantes do ponto de vista físico.

Antes, algumas regras básicas para o cálculo com dimensões:

- 1) Dimensões podem ser multiplicadas e divididas livremente e a multiplicação é comutativa e associativa.
- 2) Existem grandezas sem dimensão, chamadas adimensionais e sua “dimensão” é representada nesse contexto pelo número 1. A dimensão de uma grandeza qualquer não muda se multiplicada por uma grandeza adimensional. Estas duas regras basicamente dizem que as dimensões formam um grupo abeliano pela operação de multiplicação.
- 3) A adição somente faz sentido quando os termos possuem estritamente a mesma dimensão, e a dimensão da soma é a mesma dimensão de cada uma de suas parcelas. Sejam, por exemplo,  $g_1, g_2, \dots, g_n$ , grandezas tais que  $[g_1] = [g_2] = \dots = [g_n] = [g]$ , então  $[g_1 + g_2 + \dots + g_n] = [g] + [g] + \dots + [g] = [g]$ .
- 4) Uma equação envolvendo grandezas físicas somente pode fazer sentido se ambos os membros da equação tiverem a mesma dimensão e todos os termos das somas envolvidas em qualquer um dos membros tiverem a mesma dimensão (homogeneidade).
- 5) Funções transcendentais ( $\text{sen}$ ,  $\text{cos}$ ,  $\text{tg}$ ,  $\text{sec}$ ,  $\text{exp}$ ,  $\text{log}$  ...) só podem ser avaliadas em grandezas adimensionais (pois se

observarmos, suas séries de Taylor envolvem potências arbitrárias dos argumentos) e seus valores também são grandezas adimensionais.

- 6) Para grandezas vetoriais, cada uma de suas componentes deve ter a mesma dimensão do módulo do vetor, essa dimensão é definida como a dimensão da grandeza vetorial.
- 7) A dimensão do produto de uma grandeza escalar por uma grandeza vetorial é o produto de suas respectivas dimensões.
- 8) A dimensão do produto escalar de duas grandezas vetoriais é o produto das dimensões das grandezas vetoriais. Isto é facilmente obtido, pois o produto escalar é a soma dos produtos das entradas correspondentes, isto é, se  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ , temos que:

$$[\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle] = [v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3] = [\vec{v}][\vec{w}].$$

- 9) A dimensão do produto vetorial de duas grandezas vetoriais também é o produto das dimensões individuais das grandezas vetoriais correspondentes.
- 10) A dimensão é invariante por limites, isto é, se considerarmos uma sequência numérica  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergindo para  $x$ , tal que, para todo  $n \in \mathbb{N}$  tenhamos  $[x_n] = [X]$ , então, teremos que  $[x] = [X]$ . Em particular, o cálculo de dimensões de grandezas que envolvem derivadas ou integrais não oferece qualquer complicação adicional.

Vamos agora determinar as dimensões de algumas grandezas que nos serão úteis ao longo de todo esse livro.

- 1) **Ângulos:** Um ângulo central em uma circunferência é dado pela razão entre o comprimento de um determinado arco sobre a circunferência e o raio da mesma. Como todas as circunferências são semelhantes, essa razão independe de qual circunferência específica estamos tomando. Também, como podemos dar quantas voltas quisermos ao longo de uma circunferência, podemos obter comprimentos de arco e, portanto, ângulos arbitrariamente grandes. Isso nos libera da definição geométrica de ângulo como um par de semi-

Reveja seus materiais de Geometria II e de Introdução ao Cálculo, para uma discussão sobre medida de ângulos em radianos e definição das funções trigonométricas.

retas com mesma origem, que só permitiam valores de ângulos estritamente maiores que  $0^\circ$  e estritamente menores que  $180^\circ$ . Também convencionamos que os **ângulos** podem ser positivos, quando os arcos são percorridos no sentido anti-horário, e negativos, quando os arcos são percorridos no sentido horário. Voltando à questão dimensional, como o ângulo é a razão entre dois comprimentos, será uma grandeza adimensional:

$$\alpha = \frac{l_{\text{arco}}}{r} \Rightarrow [\alpha] = \frac{[L]}{[L]} = 1.$$

- 2) **Velocidade:** A velocidade é uma grandeza vetorial dada pela razão entre o deslocamento pelo tempo decorrido:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{l}}{\Delta t}.$$

Mais precisamente, como esses deslocamentos podem variar entre intervalos de tempo minúsculos, temos que considerar estes deslocamentos no limite para intervalos de tempos infinitesimais, ou seja, devemos calcular a derivada do deslocamento em relação ao tempo

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{l}}{\Delta t} = \frac{d\vec{l}}{dt}.$$

Assim, como o módulo do deslocamento tem dimensão de comprimento, a dimensão da velocidade é dada por:

$$[\vec{v}] = \frac{[L]}{[T]} = [L] \cdot [T]^{-1}.$$

- 3) **Frequência e velocidade angular:** Considere um corpo de dimensões desprezíveis (denominado um corpo puntiforme, ou ponto material) efetuando um movimento circular. Como uma circunferência é uma curva plana, o movimento inteiro se realiza em um plano no espaço a velocidade angular é a derivada do ângulo central em relação ao tempo:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}.$$

Assim, como ângulos são adimensionais, temos que a dimensão de velocidade angular é dada por:

$$[\omega] = \frac{1}{[T]} = [T]^{-1}.$$

Por se tratar de uma forma de velocidade, podemos definir ainda a velocidade angular como uma grandeza vetorial: Por definição, o vetor velocidade angular é um vetor  $\vec{\omega}$  perpendicular ao plano do movimento circular cujo módulo é igual a  $\omega$ , conforme calculado acima e cujo sentido é dado pela regra da mão direita. Com o auxílio da velocidade angular, podemos escrever a fórmula para a velocidade do objeto, que é tangencial à circunferência, como:

$$\vec{v} = \omega \times \vec{r},$$

onde  $\vec{r}$  é o raio da circunferência visto como um vetor com origem no centro do círculo, com comprimento igual ao raio e apontando para o objeto localizado sobre a circunferência.

*A regra da mão direita é dada da seguinte forma: Feche a mão direita com o polegar para cima, como se estivesse fazendo um sinal de positivo. Se os seus quatro dedos estiverem curvados no sentido do movimento circular, então o seu polegar estará apontando na direção do vetor velocidade angular.*

A frequência é dada pelo número de voltas inteiras no movimento circular por unidade de tempo, sendo assim, a frequência também possui dimensão de inverso do tempo:

$$\nu = \frac{n_{\text{voltas}}}{t} \Rightarrow [\nu] = \frac{1}{[T]} = [T]^{-1}.$$

- 4) **Aceleração:** A aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo ou a segunda derivada do deslocamento em relação ao tempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{l}}{dt^2}.$$

Assim, a dimensão de aceleração é dada por:

$$[\vec{a}] = [L] \cdot [T]^{-2}.$$

- 5) **Momento Linear:** O momento linear é o produto da massa de um corpo pela sua velocidade:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v},$$

ou, em termos dimensionais:

$$[\vec{p}] = [M][\vec{v}] = [M][L][T]^{-1}.$$

- 6) **Força:** A força, pela segunda lei de Newton, é a derivada do momento linear em relação ao tempo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Se a massa do corpo permanece constante, então podemos simplificar esta expressão:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

De qualquer forma, a dimensão de força pode ser expressa por:

$$[\vec{F}] = [M][L][T]^{-2}.$$

- 7) **Trabalho:** O trabalho de uma força ao longo de um caminho é, grosso modo, o produto escalar da força pelo deslocamento:

$$W = \langle \vec{F}, \Delta\vec{l} \rangle.$$

Assim, sua dimensão é dada por:

$$[W] = [\langle \vec{F}, \Delta\vec{l} \rangle] = [\vec{F}] \cdot [\Delta\vec{l}] = [M][L]^2[T]^{-2}.$$

Mais precisamente, como o deslocamento realizado não necessariamente precisa ser retilíneo, podendo ser uma curva, o trabalho realizado é a integral de caminho da força ao longo desta curva. Voltaremos a este ponto no capítulo 3.

## Exercícios

- 1) Encontre a dimensão da energia cinética,  $T = \frac{mv^2}{2}$ , onde  $v$  é módulo da velocidade do corpo.
- 2) Mostre, utilizando a definição de produto vetorial, que a dimensão do produto vetorial entre dois vetores é o produto das dimensões dos dois vetores, isto é,  $[\vec{v} \times \vec{w}] = [\vec{v}][\vec{w}]$ .
- 3) Determine a dimensão do momento angular:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Mostre também, usando as propriedades do produto vetorial em  $\mathbb{R}^3$ , que:

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega},$$

onde  $r$  é o módulo do raio vetor (para movimentos circulares, é o próprio raio da circunferência onde se realiza movimento).

- 4) Em muitos sistemas mecânicos importantes, a força em cada ponto pode ser calculada como menos o gradiente de uma função real, denominada potencial, assim, as componentes individuais da força  $\vec{F}$  são as derivadas parciais da função potencial  $U$ , ou seja:

$$\vec{F} = -\nabla U \Rightarrow (F_1, F_2, F_3) = \left( -\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right).$$

Determine a dimensão do potencial  $U$ .

- 5) A **pressão** de uma força sobre uma superfície é a razão entre a força aplicada sobre a superfície e a área da mesma. Determine a dimensão de pressão.
- 6) A **potência** de uma força é a derivada do trabalho desempenhado com relação ao tempo. Determine a dimensão de potência.
- 7) A **densidade volumétrica**, ou massa específica, de um material é a razão entre a massa deste material pelo seu volume. Determine a dimensão da densidade volumétrica.
- 8) A lei de Planck diz que a energia de uma onda eletromagnética é proporcional à sua frequência:  $E = h\nu$ , onde  $h$  é a constante de Planck. Calcule a dimensão da constante de Planck, sabendo-se que a dimensão de energia é a mesma de trabalho.
- 9) A lei da gravitação universal de Newton diz que matéria atrai matéria na razão direta de suas massas e na razão inversa do quadrado de suas distâncias relativas, ou escrito matematicamente:

$$F = \frac{GMm}{r^2},$$

onde aqui estamos considerando apenas o módulo da força, sem nos ocuparmos com a natureza vetorial. A constante  $G$  que aparece na fórmula é a constante gravitacional universal. Determine a dimensão de  $G$ .

*Especificamos a densidade volumétrica pois existem outros tipos de densidade, como a densidade superficial e a densidade linear.*

Outra aplicação da análise dimensional é a previsão de leis físicas. As leis empíricas em geral são obtidas por meio de repetidas observações variando-se todos os parâmetros das grandezas envolvidas. Após cuidadosa análise dos dados experimentais, podemos inferir o comportamento de determinada grandeza em função de outra. A análise dimensional pode nos dar, em alguns casos, pistas sobre qual seria o comportamento dessas grandezas. Às vezes, esta estimativa não fornece o comportamento correto, como no caso dos exercícios 8 e 9. Nesse caso encontramos constantes de proporcionalidade dimensionais, como a constante de Planck ou a constante gravitacional. Mesmo assim, a análise dimensional pode servir como guia para tentarmos entender os dados oriundos da experiência e elaborarmos corretamente as leis empíricas. Veremos como é feito esse procedimento a partir de exemplos, nos exercícios resolvidos a seguir:

### Exercícios resolvidos

- 1) Qual o tempo de queda livre de um objeto de massa  $m$  caindo de uma altura  $h$ , a partir do repouso, com a aceleração da gravidade  $g$ ?

#### Resolução:

Seja  $t$  o tempo de queda, então podemos tentar uma fórmula do tipo:

$$t = m^\alpha h^\beta g^\gamma .$$

que dimensionalmente fica:

$$[T] = [M]^\alpha [L]^\beta [g]^\gamma = [M]^\alpha [L]^{\beta+\gamma} [T]^{-2\gamma} .$$

A última igualdade se deve ao fato de  $g$  ter dimensão de aceleração. Como a equação tem que ser homogênea, então o lado direito tem que ter dimensão somente de tempo, sendo assim, temos:

$$\alpha = 0, \quad \gamma = -\frac{1}{2}, \quad \beta = -\gamma = \frac{1}{2},$$

ou seja,  $t$  é proporcional à raiz quadrada da razão da altura pela aceleração da gravidade:

$$t \propto \sqrt{\frac{h}{g}}.$$

O símbolo na fórmula acima significa proporcionalidade, isto é, pode ser necessária a introdução de uma constante multiplicativa para que se obtenha uma igualdade. De fato, a fórmula verdadeira é:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

- 2) A força centrípeta é a força que mantém um corpo em movimento circular. Determine a dependência da intensidade da força centrípeta  $F_c$  em relação à massa,  $m$ , do corpo, ao módulo velocidade,  $v$ , e ao raio,  $r$ , da circunferência onde se realiza o movimento.

**Resolução:**

Novamente, faremos uma expressão da força centrípeta dependendo dos parâmetros em questão:

$$F_c = m^\alpha v^\beta r^\gamma.$$

Esta equação, em termos dimensionais se escreve como:

$$[M][L][T]^{-2} = [M]^\alpha [L]^{\beta+\gamma} [T]^{-\beta}.$$

Dessa equação, podemos inferir que:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = -1.$$

Sendo assim, afirmamos que:

$$F_c \propto \frac{mv^2}{r},$$

nesse caso em particular, temos, de fato, uma igualdade e não apenas uma proporcionalidade.

- 3) A velocidade de escape é a velocidade pela qual um corpo deve decolar da superfície de um planeta para que escape do campo gravitacional do mesmo. Descreva uma fórmula possível para a velocidade de escape.

### Resolução:

É natural pensar que a velocidade de escape dependa da constante gravitacional  $G$ , da massa  $M$  do planeta (não é razoável pensar que dependa da massa do corpo específico que está sendo lançado, pois todos os corpos são supostos ter a mesma velocidade de escape), e do raio  $r$  do planeta (a atração gravitacional do planeta sobre um corpo sobre sua superfície é equivalente à atração gravitacional de um objeto com a mesma massa do planeta e concentrado inteiramente no centro do mesmo, assim, quanto menor o raio, maior a atração gravitacional). Em resumo, a velocidade de escape teria uma expressão do tipo:

$$v = G^\alpha M^\beta r^\gamma.$$

Você deve ter calculado a dimensão da constante gravitacional nos exercícios anteriores, portanto, temos:

$$[L][T]^{-1} = [M]^{-\alpha+\beta} [L]^{3\alpha+\gamma} [T]^{-2\alpha}.$$

O que resulta em:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Ou ainda:

$$v \propto \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Mais uma vez, o símbolo de proporcionalidade não corresponde exatamente a uma igualdade, a fórmula verdadeira é:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Desses exemplos, podemos observar que a análise dimensional, na maioria das vezes, não fornece uma fórmula exata, com todas as constantes envolvidas, mas seu objetivo é nos fornecer um panorama do comportamento de certas grandezas físicas em função de outras.

### Exercícios

- 10) Calcule a força centrípeta em função da velocidade angular do objeto em rotação, da massa do mesmo e do raio da cir-

cunferência onde se realiza o movimento de rotação.

- 11) Calcule a dependência do período de oscilação de um pêndulo simples em relação à massa do objeto, à aceleração da gravidade e ao comprimento da corda que determina o pêndulo.
- 12) A força de resistência do ar ao movimento de um objeto depende da densidade do ar, da velocidade do objeto e da área da secção transversal do objeto, isto é, a área da projeção do objeto sobre o plano perpendicular ao movimento (quanto mais largo, espera-se que se mova com mais dificuldade). Determine com análise dimensional essa dependência.
- 13) A velocidade de escape de um gás de um recipiente depende apenas da diferença de pressão entre o interior e o exterior do recipiente e da densidade do gás dentro do recipiente. Calcule essa dependência.
- 14) Argumente, usando análise dimensional, que a distância que um animal pode percorrer a procura de água em um deserto é proporcional ao seu tamanho (considere a água reservada em seu corpo e a perda de água por transpiração).

A análise dimensional também é útil para estabelecer similaridades físicas. Assim como as semelhanças em geometria, as semelhanças em física também são uma poderosa ferramenta na resolução de problemas. Sua principal função é permitir a construção de modelos e protótipos em escala para a simulação de situações reais. Por exemplo, os fabricantes de aviões não têm como testar um protótipo real em um voo tripulado, a não ser que tenham plena certeza de que seja seguro. A única possibilidade é construir um modelo miniatura, com os mesmos materiais e com a mesma geometria da aeronave real, e submeter a miniatura a condições similares as quais a aeronave real seria submetida em pleno voo, isto é, feito com o auxílio de grandes tubos de vento.

O princípio básico para trabalharmos com questões de similaridade é que, se uma grandeza  $g$  é proporcional a um produto de potências de outras grandezas (aqui entra a análise dimensional para determinar esta dependência), isto é, se:

$$g \propto f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n},$$

então, se tomarmos dois sistemas físicos  $A$  e  $B$ , a razão entre a medida da grandeza  $g$  para  $A$ , que denotaremos por  $g_A$ , e a medida da grandeza  $g$  para  $B$ , que denotaremos por  $g_B$  será igual a :

$$\frac{g_A}{g_B} = \left( \frac{f_{1A}}{f_{1B}} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{f_{2A}}{f_{2B}} \right)^{\alpha_2} \dots \left( \frac{f_{nA}}{f_{nB}} \right)^{\alpha_n}.$$

Note que na última fórmula temos uma igualdade, pois todas as constantes multiplicativas são canceladas. Vejamos através de exemplos, como podemos usar a análise dimensional para resolvermos problemas de escala:

### Exercícios resolvidos

- 4) Um poste de 6 m de altura tem massa de 600 kg . Calcule a massa de um poste feito com o mesmo material e 12 vezes menor.

#### Resolução:

A informação de que o poste é feito do mesmo material significa que ele possui a mesma densidade. Vamos denotar por  $\rho$  essa densidade comum, denotaremos por  $M, L$  e  $V$ , respectivamente, a massa, comprimento e volume do poste grande e por  $m, l$  e  $v$  a massa, altura e volume do poste pequeno, assim, temos:

$$1 = \frac{\rho}{\rho} = \frac{MV^{-1}}{mv^{-1}} \Rightarrow m = \frac{Mv}{V}.$$

Mas, como:

$$\frac{v}{V} = \frac{l^3}{L^3} = \left( \frac{l}{L} \right)^3,$$

temos, finalmente que:

$$m = M \left( \frac{l}{L} \right)^3 = M \left( \frac{1}{12} \right)^3.$$

Como  $M = 600$  kg , calculamos facilmente o valor aproximado  $m = 0,35$  kg .

- 5) Aproximando as órbitas dos planetas por órbitas circulares (que não é uma aproximação tão má assim, principalmente

para os planetas mais próximos do Sol) e sabendo que a força centrípeta, que mantém os planetas em órbita, é a força de atração gravitacional do Sol, mostre a terceira lei de Kepler, isto é, a razão entre os quadrados dos períodos de órbita é proporcional à razão entre os cubos dos raios (médios, pois de fato as órbitas são elípticas, a circunferência é só uma aproximação) das respectivas órbitas.

**Resolução:**

Ao considerarmos a órbita do planeta como circular, com o Sol no centro do círculo, podemos também supor que a velocidade angular,  $\omega$ , é constante, assim, sendo  $T$  o período de órbita, temos que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Sejam  $M$ , a massa do Sol,  $m$ , a massa do planeta,  $R$ , o raio da órbita e  $G$ , a constante gravitacional, então, da igualdade entre a força centrípeta e a força gravitacional, temos:

$$m\omega^2 R = m \frac{4\pi^2}{T^2} R = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3.$$

Logo, sendo  $A$  e  $B$  dois planetas distintos, teremos:

$$\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^3.$$

- 6) Em movimento, sob atração gravitacional, os planetas mantêm constante o seu **momento angular**. Com esse fato e a ajuda da análise dimensional, mostre a segunda lei de Kepler, isto é, um planeta em sua órbita varre setores de áreas iguais em intervalos de tempo iguais.

*Veja mais detalhes no capítulo 3.*

**Resolução:**

Primeiramente, lembremos que o momento angular pode ser escrito como  $\vec{L} = m r^2 \vec{\omega}$ . Em nosso caso, o caráter vetorial do momento angular só nos dirá que se o momento angular for constante, então a órbita permanecerá plana. Então, podemos escrever que:

$$r^2 \omega = \frac{L}{m} = k,$$

onde, nesse caso,  $\omega$  é o módulo da velocidade angular e  $L$  o módulo de momento angular. Como o momento angular e a massa do planeta são constantes, temos que sua razão é uma constante, denotada por  $k$ . Por outro lado, a área de um setor da elipse pode ser calculada utilizando a fórmula para áreas em coordenadas polares. Nesse caso, a curva é uma elipse e a origem (onde se localiza o Sol) está situada em um dos focos da elipse (primeira lei de Kepler), assim, a área é dada por:

$$A = \int_{\theta_2}^{\theta_1} r^2 d\theta = \int_{t_1}^{t_2} r^2 \omega dt = k \int_{t_1}^{t_2} dt = k \Delta t.$$

Sendo assim, se em um período  $(\Delta t)_1$  o planeta percorreu uma área  $A_1$  e em um período  $(\Delta t)_2$  o planeta percorreu uma área  $A_2$ , conforme nos ilustra a figura 1.1 abaixo, temos que:

$$\left( \frac{A_1}{A_2} \right) = \left( \frac{(\Delta t)_1}{(\Delta t)_2} \right),$$

em particular, se  $\Delta t_1 = \Delta t_2$ , teremos que  $A_1 = A_2$ , ou seja, um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

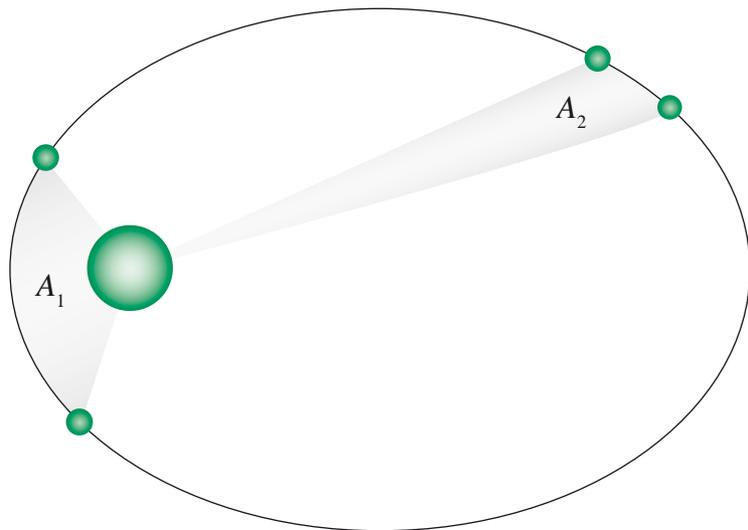


Figura 1.1 - Segunda lei de Kepler.

## Exercícios

- 15) Calcule a razão entre as massas de duas esferas do mesmo material tal que uma das esferas tenha o dobro do raio da outra.

- 16) Calcule a aceleração da gravidade na superfície da Lua e de Júpiter, sabendo que: a Terra tem massa de  $6,0 \cdot 10^{24}$  kg, raio de  $6,4 \cdot 10^3$  km e a aceleração da gravidade na superfície da Terra é de, aproximadamente,  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Tome como dados o raio e a massa da Lua como, respectivamente,  $1,7 \cdot 10^3$  km e  $7,3 \cdot 10^{22}$  kg. Quanto a Júpiter, seu raio e massa são, respectivamente, 71492 km e  $1,9 \cdot 10^{27}$  kg.
- 17) Com os mesmos dados do exercício anterior, calcule a velocidade de escape da Lua e de Júpiter, sabendo que a velocidade de escape da Terra é de aproximadamente, 11,2 km/s.
- 18) Qual a relação entre os períodos de oscilação de um pêndulo, com massa e comprimento dados, quando oscilando na Lua e oscilando na Terra?

Finalmente, vamos falar um pouco sobre unidades de medida de algumas grandezas físicas. Ao longo da história humana, muitas unidades de medida foram utilizadas e, ao seu tempo, substituídas por outras. O fato é que a utilidade de determinado sistema de medidas está relacionado com interesses práticos, como relações comerciais, demarcações territoriais, etc. A instituição de sistemas de medida está diretamente relacionada com a estrutura de poder vigente em determinado momento histórico, ou seja, a nação que tem mais poder é a que determina as medidas a serem adotadas por todos.

Somente na época da revolução francesa é que se iniciou o processo de consolidação de um sistema de medidas que pudesse ser adotado internacionalmente, em comum acordo com todas as nações e que pudesse servir de padrão, independente do sistema político vigente neste ou naquele país, facilitando as relações comerciais bem como a cooperação científica. Hoje esse sistema é conhecido como sistema internacional, ou sistema métrico decimal e é adotado pela maioria dos países do mundo. Uma das vantagens principais do sistema internacional é a utilização de unidades que são divididas em subunidades, que são potências de dez, por isto é também chamado de sistema métrico decimal. Assim, as subunidades, bem como os múltiplos das unidades, podem ser denominadas segundo prefixos estabelecidos:

*Os Estados Unidos da America ainda são um dos poucos países que adota um sistema de unidades próprio, mesmo assim, em termos de importação e exportação de produtos, veem-se obrigados a colocar uma tabela de equivalência com os padrões do sistema internacional.*

*No sistema americano, por exemplo, as unidades de comprimento mais utilizadas são: a polegada, o pé, que equivale a 12 polegadas, a jarda, que equivale a 3 pés e a milha, que equivale a 1760 jardas.*

Hexa	H	$10^{18}$	1000000000000000000
Peta	P	$10^{15}$	1000000000000000
Tera	T	$10^{12}$	1000000000000
Giga	G	$10^9$	1000000000
Mega	M	$10^6$	1000000
Quilo	K	$10^3$	1000
Hecto	H	$10^2$	100
Deca	da	10	10
Deci	d	$10^{-1}$	0,1
Centi	c	$10^{-2}$	0,01
Mili	m	$10^{-3}$	0,001
Micro	$\mu$	$10^{-6}$	0,000001
Nano	n	$10^{-9}$	0,000000001
Pico	p	$10^{-12}$	0,0000000000001
Femto	f	$10^{-15}$	0,0000000000000001
Atto	a	$10^{-18}$	0,0000000000000000001

Na segunda coluna da tabela, colocamos os prefixos que devem ser colocados na frente da unidade de medida utilizada. Assim, 1000 metros é um quilômetro,  $10^3 \text{ m} = 1 \text{ km}$ , um milionésimo de grama é um micrograma,  $10^{-6} \text{ g} = 1 \mu\text{g}$ , um bilionésimo de segundo é um nanossegundo,  $10^{-9} \text{ s} = 1 \text{ ns}$ . Uma observação necessária é que, para áreas e volumes, os fatores de escala devem respectivamente, ser considerados ao quadrado (para áreas) e ao cubo (para volumes), assim um decâmetro quadrado não será 10 metros quadrados, mas  $10^2 \text{ m}^2 = 100 \text{ m}^2 = 1 \text{ dam}^2$ , um decímetro cúbico não será simplesmente  $0,1 \text{ m}^3$ , mas  $1 \text{ dm}^3 = (10^{-1})^3 \text{ m}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 = 0,001 \text{ m}^3$ . Merece também destaque especial algumas unidades que são comumente utilizadas e cuja nomenclatura não deriva dos prefixos estabelecidos acima: Por exemplo, a medida de 1 Angström, igual a  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m} = 10^{-1} \text{ nm}$ , que é utilizada em física atômico-molecular para medir diâmetros atômicos. Também para volumes de uso diário, utilizamos a unidade um litro  $1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3 = 1 \text{ dm}^3$  e para massas grandes temos a tonelada  $1 \text{ ton} = 10^3 \text{ kg} = 1 \text{ Mg}$ . Finalmente, para unidades de tempo, não temos o costume de utilizarmos potências de 10 para múltiplos do segundo (muito embora seus submúltiplos sejam medidos em décimos, centésimos e milésimos de segundo) assim, temos o minuto, que corresponde a 60 segundos e a hora que corresponde a 60 minutos,  $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$ .

Eis aqui as definições das unidades mais fundamentais do sistema internacional, a saber, a de segundo, metro e quilograma:

- 
- **Segundo:** A duração de 9192631770 períodos de radiação correspondente à transição entre 2 níveis hiperfinos do estado fundamental do Césio 133.
  - **Metro:** Espaço percorrido pela luz em  $1/299792458$  segundo.
  - **Quilograma:** Massa de um cilindro maciço feito de uma liga de platina e irídio de 39 mm de altura por 39 mm de diâmetro.
- 

Um problema importante é transformar as medidas de uma grandeza de uma unidade para outra, do mesmo sistema ou entre sistemas diferentes. Vejamos alguns exemplos:

### Exercícios resolvidos

- 7) Calcular, em unidades de km/h (quilômetros por hora), a velocidade correspondente a 20 m/s .

**Resolução:**

$$v = 20 \text{ m/s} = \frac{20 \text{ m}}{1 \text{ s}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} = \frac{20(3,6) \text{ km}}{1 \text{ h}} = 72 \text{ km/h} .$$

Observação: Note que na resolução desse tipo de problema, procedemos multiplicando pelas razões entre unidades diferentes da mesma grandeza de forma a cancelarmos as unidades antigas até obtermos apenas as novas unidades.

- 8) As unidades de força mais utilizadas são: o dina (dyn) e o Newton (N). A medida de 1 dyn equivale à força necessária para acelerar um corpo de massa 1 g de  $1 \text{ cm/s}^2$ , já 1 N é a força necessária para acelerar 1 kg a uma aceleração de  $1 \text{ m/s}^2$ . Calcule em dinas a força de 10 N.

**Resolução:**

$$F = 10 \text{ N} = \frac{10 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m}}{1 \text{ s}^2} \cdot \frac{1000 \text{ g}}{1 \text{ kg}} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = \frac{10^6 \cdot 1 \text{ g} \cdot 1 \text{ cm}}{1 \text{ s}^2} = 10^6 \text{ dyn} .$$

- 9) As unidades básicas de energia (e trabalho) são o erg (erg) e o Joule (J). A medida de 1erg é o trabalho de uma força de 1dyn por um deslocamento de 1cm, já 1J é o trabalho de uma força de 1N no percurso de 1m. Calcular em Joules e em ergs o trabalho da força gravitacional na queda livre de um corpo de 5kg de uma altura de 30m. Considere a aceleração da gravidade aproximadamente igual a  $9,8\text{m/s}^2$ .

**Resolução:**

Vamos resolver esse problema por partes, para que você verifique todas as grandezas envolvidas, bem como se familiarize com as unidades de medida dessas grandezas. Primeiramente, precisamos de força gravitacional agindo sobre o corpo em queda livre:

$$F = 5\text{kg} \cdot \frac{9,8\text{m}}{1\text{s}^2} = \frac{49 \cdot 1\text{kg} \cdot 1\text{m}}{1\text{s}^2} = 49\text{N}.$$

Agora, vamos calcular o trabalho em Joules:

$$W = 49\text{N} \cdot 30\text{m} = 1470\text{J} = 1,47 \cdot 10^3\text{J}.$$

Finalmente, vamos calcular o trabalho em ergs:

$$\begin{aligned} W &= 1470\text{J} = 1470\text{N} \cdot 1\text{m} = \frac{1470 \cdot 1\text{kg} \cdot 1\text{m}}{1\text{s}^1} \cdot 1\text{m} = \\ &= \frac{1470 \cdot 1\text{kg} \cdot (1\text{m})^2}{1\text{s}^2} \cdot \frac{10^3\text{g}}{1\text{kg}} \cdot \frac{(10^2\text{cm})^2}{(1\text{m})^2} = \\ &= \frac{1470 \cdot 10^7 \cdot 1\text{g} \cdot (1\text{cm})^2}{1\text{s}^2} = 1,47 \cdot 10^{10}\text{erg} \end{aligned}$$

Observação: Note que escrevemos os resultados em termos de potências de 10. Esta é a chamada notação científica, que consiste em expressar os números como o produto de um número real  $1 \leq \alpha < 10$  e uma potência de 10, ou seja,  $\alpha \cdot 10^k$ . Essa notação serve para explicitar a ordem de magnitude de uma grandeza, como veremos na seção seguinte.

## Exercícios

- 19) Uma caloria (1cal) é a energia necessária para elevar de  $1^\circ\text{C}$  a temperatura de 1g de água. Supondo que todo o traba-

lho da força gravitacional calculado no exercício acima fosse transformado em calor e utilizado para esquentar 1 l de água, calcule a variação de temperatura da água. São dados a razão de conversão entre calorias e Joules,  $1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J}$  e a densidade da água, a qual é igual a  $1 \text{ kg/l}$ .

- 20) O matemático e físico italiano Evangelista Torricelli mediu a pressão atmosférica ao nível do mar com um tubo de mercúrio e verificou que essa mede, aproximadamente  $76 \text{ mmHg}$  ( $76$  milímetros de mercúrio). Essa unidade de medida de pressão equivale, em unidades do sistema internacional, a  $133,3 \text{ N/m}^2$ . Calcule o valor da pressão atmosférica ao nível do mar utilizando unidades do sistema internacional.

### 1.3 Ordem de magnitude

Em muitas situações do cotidiano, precisamos apenas saber uma estimativa de certas quantidades, não o valor exato. Por exemplo, em um comício ou show em praça pública, como a polícia avalia quantas pessoas estão presentes no evento? Você já deve ter ouvido várias vezes: “estavam presentes em torno de  $10000$  pessoas”, mas nunca deve ter ouvido algo do tipo: “estavam presentes  $11549$  pessoas”. Como se faz a estimativa do volume de água que passa pela turbina de uma usina hidrelétrica? Ou ainda, como se estima a área devastada na floresta amazônica? Qual a frota nacional de veículos automotores? Essas e várias outras perguntas recebem respostas aproximadas. Faz diferença se foram devastados  $10000 \text{ m}^2$  ou  $100000 \text{ m}^2$  em uma floresta, mas faz pouca diferença se foram devastados  $10000 \text{ m}^2$  ou  $15000 \text{ m}^2$ . O que se procura nessas situações é estimar a ordem de magnitude da grandeza, ou seja, qual a potência de  $10$  que mais se aproxima da realidade, isto em unidades de medida de uma grandeza dada, seja ela o número de pessoas, o volume de água, a área de floresta, etc.

Em geral, pessoas não têm muita noção da ordem de magnitude das coisas ao seu redor. Para exemplificarmos isso, veja os seguintes vídeos no site Youtube:

- <http://www.youtube.com/watch?v=A2cmlhfbcwY&>
- <http://www.youtube.com/watch?v=HIP6znMKnr8&>
- <http://www.youtube.com/watch?v=Vs5doooe2VY&>

Nesses vídeos, você pode notar uma relação entre a ordem de grandeza dos objetos no universo, dos aglomerados de galáxias até as menores partículas subatômicas, os quarks. Note, por exemplo, que enquanto a escala de tamanho de um ser humano é da ordem de 1 m, somente conseguimos ver suas células na escala de um micrômetro,  $1\mu\text{m} = 10^{-6}\text{ m}$ . Já o planeta Terra somente pode ser visto em sua totalidade se olharmos na escala de  $10000\text{ km} = 10^7\text{ m}$ . Outra comparação interessante é com relação à escala de tempo: O universo, estima-se, teve seu início com o big-bang, aproximadamente 15 bilhões de anos atrás. A Terra, por sua vez, teve sua formação iniciada por volta de 5 bilhões de anos atrás, portanto, a Terra possui aproximadamente um terço da idade do universo. Muito embora os primeiros seres vivos unicelulares tenham surgido na Terra logo após o seu resfriamento, digamos, há aproximadamente 3 bilhões de anos, muito do que conhecemos a respeito da vida está relacionado com a história recente da Terra, por exemplo, os dinossauros existiram entre 120 a 60 milhões de anos atrás, os primeiros ancestrais dos seres humanos somente surgiram por volta de um milhão de anos atrás e as primeiras civilizações da história datam de aproximadamente 10000 anos atrás. Para termos uma ideia das escalas envolvidas, se reduzíssemos a história do universo a apenas um ano, com o big-bang ocorrendo à meia noite do dia 1 de janeiro, teríamos que a Terra seria formada somente em meados de setembro, os dinossauros teriam vivido por volta do dia 28 de dezembro, os ancestrais dos seres humanos teriam surgido por volta das 23:30, do dia 31 de dezembro, e as civilizações teriam aparecido apenas nos últimos segundos do ano; quase no réveillon!

---

**A** estimativa da ordem de magnitude é uma habilidade que pode ser exercitada. No início, nos vemos oscilando entre dois extremos: o da exatidão e o do “chute”.

---

Por exatidão queremos dizer aquela tendência de procurarmos por um resultado exato, ou pelo menos o mais próximo possível deste número, o que nos sobrecarrega de inúmeros fatores a serem considerados, tornando impossível, assim, o cálculo. Por outro lado, o “chute” é a estimativa grosseira, impensada, que em geral é dada sem levar em consideração muitas peculiaridades

do problema em questão. Tente responder às perguntas abaixo e perceba como algumas delas podem parecer muito difíceis, sem fazermos algumas hipóteses.

## Exercícios

- 21) Quantas batidas o coração dá ao longo da vida de um ser humano? Faz muita diferença se ele viveu 35, 40 ou 80 anos?
- 22) Quantos anos uma pessoa que viveu 70 anos passou dormindo, quanto tempo ele passou comendo?
- 23) Qual quantidade de comida que uma pessoa adulta consome em um ano?
- 24) Se você ganhasse um milhão de reais em notas de R\$100,00, daria para carregar todo o dinheiro em uma mala? Qual o tamanho do depósito necessário para guardar um bilhão de reais em notas de R\$100,00?
- 25) Quantos grãos de feijão existem em 1kg de feijão?

Uma das tarefas de um cientista é aprimorar sua capacidade de fazer estimativas a priori da ordem de magnitude de determinada grandeza, antes de fazer um exame detalhado, seja do ponto de vista teórico ou experimental. Um físico que possuía essa capacidade em seu mais alto grau de eficácia foi [Enrico Fermi](#). Fermi introduziu uma prática muito comum hoje em dia entre os físicos que é a “física do verso de um envelope”, isto é, antes de discutir um fenômeno com mais detalhes, um físico deve ser capaz de fazer estimativas a priori com cálculos que não devem ocupar mais espaço que as costas de um envelope. Certa vez, Fermi estimou a quantidade de afinadores de piano que deveriam morar em Chicago. Seu raciocínio foi razoavelmente simples: Considerando que a população de Chicago (na década de 50) era de 3 milhões de habitantes, que uma família média era composta de 4 pessoas, em média, e que um terço das famílias possuía piano, isto daria um resultado de 250000 pianos em Chicago. Se um piano precisa ser afinado uma vez a cada 5 anos, apenas 50000 pianos precisam ser afinados por ano. Se um afinador pode afinar em torno de quatro pianos ao dia e trabalhar por volta de 250 dias no ano, ele poderá afinar, em média, 1000 pianos por ano. Portanto, deveria haver em torno de 50 afinadores de piano em Chicago, no início dos anos

*Enrico Fermi nasceu em Roma em 1901 e morreu em Chicago, em 1954. Fermi é considerado um dos principais físicos que introduziram a humanidade na era atômica. Foi ele quem, pela primeira vez na história, realizou um experimento de fissão nuclear controlada. Esse mecanismo está nos fundamentos, tanto dos reatores nucleares como das bombas atômicas. Por essas descobertas surpreendentes, Fermi ganhou o prêmio Nobel no ano de 1938. Fermi também teve um papel fundamental na formação do projeto Manhattan, que levou os Estados Unidos da América a construir as primeiras bombas atômicas. Fermi também possui uma vasta gama de resultados teóricos fundamentais na física moderna. Por exemplo, são atribuídas a ele a ideia de superfície de Fermi, níveis de Fermi, estatística de Fermi-Dirac, etc.*

50. A resposta, obviamente não era exata, e nem pretendia ser, poderia haver 25 afinadores somente, ou então próximo de 100, mas ninguém diria que a quantidade seria 5, ou 500, o que importava era estimar a ordem de magnitude.

Os cálculos necessários para se estimar a ordem de magnitude são, em geral, indiretos e aproximados, levando em conta o mínimo de hipóteses possíveis. Voltemos, por exemplo, ao procedimento da polícia para estimar a quantidade de pessoas presentes em um evento urbano. O que primeiramente se faz é medir, aproximadamente, a área do local ocupado por pessoas. Essa parte envolve algum conhecimento das medidas do local e de técnicas de geometria básica para se determinar a área de uma figura complexa, decompondo-a em figuras simples. Mesmo as medidas lineares podem ainda ser estimadas, utilizando-se a comparação com objetos cujo comprimento seja conhecido, por exemplo, se existirem carros estacionados no local, é possível fazer uma contagem, aproximada, de quantos carros em fila caberiam naquele local, sabendo-se o comprimento de um carro, então se faz uma estimativa dos comprimentos envolvidos, para então calcular a área. Agora, a parte das pessoas, a maneira mais comum é tomar um quadrado de  $1\text{m}^2$  e colocar o máximo de pessoas possível naquele quadrado. Multiplicando a área do local pelo número de pessoas por unidade de área, tem-se uma aproximação do número de pessoas envolvidas no evento.

## Exercícios

26) Um exemplo, que pode ser feito inclusive em sala de aula, é a estimativa do número de grãos de feijão em um pacote de 1kg. Podemos utilizar medições de massa para efetuarmos essa estimativa. Tome uma quantidade pequena de grãos, o suficiente para fazer uma medida significativa na balança e para que se conte sem dificuldades sua quantidade. Comece com 10 grãos, se a balança não indicar, acrescente mais 10, e assim por diante até termos uma medida significativa de massa, digamos, 5g, ou 10g, divida a massa obtida pela quantidade de grãos utilizada e você obterá a massa de um grão individual. Divida 1kg pela massa individual de um grão e você obterá a quantidade de grãos de feijão. Para que

a estimativa seja mais precisa, repita várias vezes a medição das pequenas amostras de grãos de feijão (de preferência com quantidades diferentes de grãos de cada vez) e em cada operação obtenha a massa individual de um grão, depois efetue a média aritmética dos resultados obtidos em cada um desses procedimentos. Na próxima seção, você verá que a repetição de um procedimento de medida algumas vezes ajuda além de estimar a ordem de magnitude, mas também permite estimar o erro da medida.

- 27) Uma atividade, que você pode fazer com seus colegas e com seus alunos em sala de aula é estimar qual o volume de dinheiro para se fazer um milhão de reais e depois um bilhão de reais em notas de R\$100,00. Não é preciso ser milionário para se fazer a experiência. Novamente, devemos tomar o procedimento da amostragem. Junte uma quantidade suficiente de cédulas, o mais alisadinhas possível, para que se faça um volume significativo. Obviamente, não precisam ser notas de R\$100,00, pois no Brasil todas as cédulas possuem aproximadamente o mesmo tamanho, uma vez que se tenha uma estimativa do volume que, digamos 50 cédulas, faz, dívida R\$1.000.000,00 por R\$100,00 e você obterá o número necessário de cédulas. Divida esse valor por 50 para obter o número de pacotes com 50 cédulas e finalmente, multiplique pelo volume de um pacote de 50 cédulas e você obterá um volume aproximado para seu milhão. Você terá uma surpresa ao calcular o volume de um bilhão!
- 28) Tente fazer uma estimativa de quanto dinheiro é possível carregar em um carro blindado, obviamente, você terá que levar em conta o espaço para as pessoas ocupantes do carro (em geral, 4 pessoas). Tente fazer uma estimativa do volume de um carro desses, do volume necessário para que quatro pessoas adultas possam se movimentar e respirar com espaço razoável. Leve em consideração que o dinheiro está separado em bolsas, o que diminui um pouco a quantidade de cédulas, pois as bolsas também ocupam espaço. Tente também supor que existe uma porcentagem das cédulas que são de R\$100,00 e uma porcentagem de cédulas de R\$50,00. Quanto mais detalhes forem levados em consideração, mais apurada será sua estimativa. Lembre-se, ninguém sabe a

resposta exata, a não ser os que trabalham com esse tipo de atividade, mas não adianta perguntar, certamente eles não dirão.

- 29) Tente medir o peso de um carro pela área de contato dos pneus. Primeiro, é preciso fazer a calibragem dos pneus no posto de gasolina, tente deixar todos os pneus com a mesma calibragem (o que nem sempre é o ideal em situações reais). A pressão é a razão da força pela área de contato, no caso, cada pneu sustenta, aproximadamente, um quarto do peso total do carro. A área de contato pode ser obtida deixando o carro parado em uma superfície plana (o mais plana possível, não em ladeiras ou terrenos irregulares). Com um pedaço de giz circunde a região de contato de cada um dos pneus com o chão. Tire o carro de lá e calcule a área dos retângulos desenhados no chão. Multiplique cada área pela calibragem dos pneus (verifique que unidades são dadas, se é  $\text{N/m}^2$ , se é  $\text{N/cm}^2$ , ou outras. Se forem unidades do sistema inglês,  $\text{lb/in}^2$ , libras por polegadas quadradas, pesquise na internet a razão de conversão para o sistema internacional). Se você fez tudo correto e as unidades foram todas compatíveis, você encontrará um resultado em  $\text{N}$ . Some todos os quatro resultados obtidos em cada pneu e divida por  $9,8\text{m/s}^2$ . O resultado numérico obtido é o valor da massa em  $\text{kg}$ . Compare com os valores dados no manual do fabricante.

Além desse tipo de atividade de estimativa de grandezas do dia-a-dia, a estimativa de ordem de grandeza, juntamente com a análise dimensional pode nos auxiliar na resolução de problemas. Nos próximos capítulos, veremos como utilizar o conhecimento das leis físicas combinadas com técnicas de aproximação para a estimativa de ordem de grandeza. De fato, sem o conhecimento mínimo das leis físicas, a modelagem matemática não pode ser levada adiante. Para finalizarmos essa seção, veremos um exemplo simples de como informações aproximadas de ordem de grandeza ainda podem ser úteis para a resolução de problemas reais.

### Exercício resolvido

- 10) Calcule o espaçamento entre os pregos para que se possa dormir confortavelmente em uma cama de pregos.

## Resolução:

Considere uma pessoa de 70 kg e aproxime a aceleração da gravidade por  $10\text{ m/s}^2$ , assim, o peso, que é a força gravitacional, agindo sobre o corpo, será de  $7 \cdot 10^2\text{ N}$ . Agora precisamos estimar o limiar de dor da ação de um prego sobre qualquer parte do corpo. Você pode medir isso apertando um prego de pé, com a ponta para cima sobre uma balança. Quando começar a incomodar, faça a leitura da medição da balança, que provavelmente vai ser dada em gramas, transforme em quilogramas e multiplique por 10, assim terá o peso por prego. Para nossos cálculos, vamos considerar esse peso limiar como  $10^{-1}\text{ N/prego}$ . Assim, conseguimos calcular o número de pregos necessário:

$$n_{\text{pregos}} = 7 \cdot 10^2\text{ N} \cdot \frac{1\text{ prego}}{10^{-1}\text{ N}} = 7 \cdot 10^3\text{ pregos}.$$

Finalmente, temos que calcular a área de contato entre o corpo deitado e os pregos, para obtermos a distribuição mais vantajosa entre os pregos. A área de contato de nosso corpo é, aproximadamente, 70% da área de um retângulo de altura igual à altura de nosso corpo e largura igual à largura de nossos ombros. Digamos que, em nosso caso, a altura do indivíduo seja 1,70 m e a largura dos ombros seja em torno de  $60\text{ cm} = 0,6\text{ m}$ . Assim, a área de contato será dada por:

$$A = \frac{70}{100} \cdot 1,7\text{ m} \cdot 0,6\text{ m} = 7,14 \cdot 10^{-1}\text{ m}^2.$$

Portanto, a densidade de pregos necessária ao conforto é a razão entre o número de pregos e a área de contato

$$d_{\text{pregos}} = \frac{7 \cdot 10^3\text{ pregos}}{7,14 \cdot 10^{-1}\text{ m}^2} \approx 10^4\text{ pregos/m}^2 = 1\text{ prego/cm}^2.$$

Ou seja, uma cama de pregos seria confortável se tivesse uma distribuição de pregos em cada um dos vértices de quadrados de  $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$ . Note que, se o indivíduo pesasse 60 kg, ou se sua altura fosse de 1,80 m, ou qualquer outra variação, alteraria pouco a distribuição dos pregos. Em muitas situações, o que se quer é apenas um mínimo necessário, tendo-se, na verdade, a intenção de realizar um aparato muito mais seguro.

## 1.4 Erros e Algarismos Significativos

Um aspecto complementar da aproximação é a avaliação do erro. De fato, cada vez que realizamos uma estimativa aproximada da medida de uma grandeza, fazemos determinada quantidade de hipóteses a priori. Se essas estimativas forem repetidas diversas vezes, sendo que, em cada uma delas as hipóteses forem levemente diferentes, certamente chegaremos a valores diferentes. Esses valores estarão dentro de um intervalo. A determinação da largura desse intervalo numérico é a estimativa do erro. A escolha deste ou daquele valor dentro do intervalo de erro não possui qualquer relevância física, em geral, escolhe-se como medida convencional o ponto médio deste intervalo.

Faça um teste: tente medir sua altura corporal com trenas ou fitas métricas diversas, peça para outras pessoas realizarem sua medida, tente fazer de manhã e de tarde, em pé e deitado, etc. Faça pelo menos umas dez medidas diferentes e compare. Você vai ficar surpreso com a largura do intervalo de erro! Em física se estabeleceu a seguinte notação: a medida de uma grandeza física, em unidades pertinentes, é escrita como:

$$G = (a \cdot 10^b \pm \varepsilon)U,$$

onde  $1 \leq a < 10$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $U$  é a unidade de medida da grandeza  $G$ . A notação  $a \cdot 10^b$ , é o que se denomina notação científica. Ela é importante porque explicita a ordem de magnitude da grandeza medida. O número positivo  $\varepsilon$  é comumente chamado de erro absoluto, a largura do intervalo de erro é igual a  $2\varepsilon$ . Para que uma medida possa fazer algum sentido, é necessário que o erro absoluto fique, no máximo, numa ordem de magnitude abaixo da medida, em nosso exemplo, teríamos que ter  $0 < \varepsilon \leq 5 \cdot 10^{b-1}$ . Se a ordem de magnitude do erro for a mesma ordem de magnitude da medida, significa que a medida não faz qualquer sentido. Colocamos a desigualdade  $\varepsilon \leq 5 \cdot 10^{b-1}$ , pois poderíamos efetuar um arredondamento para baixo, resultando em  $\varepsilon \approx 10^{b-1}$ . Se acontecesse  $\varepsilon > 5 \cdot 10^{b-1}$ , teríamos que arredondar para cima, obtendo  $\varepsilon \approx 10^b$ . Quão seriamente, por exemplo, seria levada a afirmação de uma pessoa de que seu peso corporal é de  $70 \pm 10$  kg? Isto poderia significar que a pessoa poderia pesar qualquer coisa entre 60 kg e 80 kg! Por outro lado, a afirmação de que o peso corporal

de uma pessoa é de  $70 \pm 2 \text{ kg}$ , é bem mais razoável, pois indica uma incerteza entre 68kg e 72kg.

Falar em erro também implica em falar em algarismos significativos. Continuando com o exemplo, também não faria sentido dizer que o peso corporal de uma pessoa é de  $7,14376 \cdot 10 \pm 10^{-2} \text{ kg}$ , pois o erro é de 10g para mais ou para menos, logo o peso do indivíduo pode variar entre 71,42kg e 71,44kg, logo, os dois últimos algarismos não são significativos, pois a ordem de magnitude do erro é maior que a ordem de magnitude desses.

Os algarismos significativos se dividem em dois tipos. Algarismos exatos e o primeiro algarismo duvidoso. Em nosso caso, os algarismos 7, 1 e 4 são algarismos exatos, pois sua ordem de magnitude está acima da ordem de magnitude do erro, já o algarismo 3 é duvidoso, pois sua ordem de magnitude é a mesma do erro absoluto, mesmo assim, ainda é considerado um algarismo significativo, pois determina, nesse caso, o centro do intervalo de erro.

Você deve ter notado pelo que foi discutido no parágrafo anterior que a física não é uma ciência totalmente exata, pois sempre temos que levar em conta o erro em cada processo que formos avaliar. Há, no entanto, dois tipos de erros: o erro sistemático e o aleatório. O erro sistemático é aquele que está presente em todas as medidas e da mesma forma, portanto, pode ser eliminado. Em geral, ocorre um erro sistemático quando calibramos erradamente nossos aparelhos de medição. Por exemplo, suponha que uma balança sem qualquer peso sobre ela marque o valor de 50g, então todos os objetos pesados na balança terão 50g a mais. A existência de erro sistemático indica que estamos fazendo algo errado. O segundo tipo de erro, o erro aleatório, de certa forma, nos indica as limitações de nossos processos de medida, dos aparatos experimentais, dos aparelhos de medição, ou ainda das pressuposições teóricas, pois podem existir fatores externos ainda não previstos pela teoria vigente, e que, portanto, não são levados em conta, mas influenciam diretamente nos resultados das medidas.

*O movimento browniano, por exemplo, foi descoberto ao se estudar o movimento de partículas leves em fluidos. Percebeu-se certa aleatoriedade na posição das partículas em suspensão em movimento dentro de um recipiente com um gás ou um líquido. Mais tarde, ficou claro que esse comportamento aleatório era devido à natureza molecular dos fluidos.*

Nosso objetivo agora é estabelecer regras para o cálculo dos erros e dos algarismos significativos quando várias medidas são reali-

zadas e cálculos envolvendo as grandezas envolvidas são efetuados:

- 1) No caso de se realizar uma única medição de determinada grandeza, o erro na sua medida é estabelecido como sendo a metade da menor divisão existente na escala do aparelho de medida. Por exemplo, suponhamos que uma balança de padaria possua uma escala de medida em gramas, assim, se fizermos a medida da massa de um objeto e obtivermos uma leitura de 245 g, então podemos escrever a medida como  $(2,450 \cdot 10^2 \pm 0,5) \text{ g}$ , significando que a massa do objeto é algo entre 244,5 g e 245,5 g. Considere ainda um segundo exemplo: Medimos o comprimento de um objeto com uma régua milimetrada, isto é, cuja menor divisão é 1 mm e obtivemos a leitura 53,3 cm, então, a medida pode ser escrita como  $(53,30 \cdot 10 \pm 0,05) \text{ cm}$ , significando que o comprimento varia entre 53,25 cm e 53,35 cm.
- 2) Quando são efetuadas várias medidas de uma mesma grandeza, envolvendo conceitos estatísticos, então o procedimento se torna um pouco mais sofisticado. Suponhamos que sejam efetuadas  $n$  medições de uma grandeza  $X$  (todas as medidas na mesma unidade apropriada), obtendo valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , podemos calcular a média dessas medidas:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Em seguida, podemos calcular o desvio de cada uma das medidas em relação à média:

$$\delta x_1 = |\bar{x} - x_1|, \quad \delta x_2 = |\bar{x} - x_2|, \dots, \quad \delta x_n = |\bar{x} - x_n|.$$

O erro absoluto será o desvio médio das medidas envolvidas, ou seja, a média aritmética dos desvios individuais:

$$\delta x = \frac{\delta x_1 + \delta x_2 + \dots + \delta x_n}{n}.$$

Assim, podemos escrever a medida de  $X$ , como  $x = \bar{x} \pm \delta x$  (na mesma unidade na qual todas as medidas,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  foram feitas).

Para analisarmos a propagação de erros, vamos introduzir outro conceito importante, a saber, o de erro relativo: O erro relativo é a razão entre o erro absoluto e a medida da grandeza. Por exemplo, se tivermos uma medida de comprimento de  $(1,543 \cdot 10^2 \pm 0,5)$  cm, teremos um erro relativo de

$$\frac{0,5 \text{ cm}}{154,3 \text{ cm}} \approx 0,003 = 3 \cdot 10^{-3}.$$

É fácil ver que o erro relativo é um número entre 0 e 1, portanto quanto mais próximo de 0 for o erro relativo, melhor e mais acurada foi a medida. Em contrapartida, se o erro relativo ficou próximo de 1, então a medida foi gravemente prejudicada e não possui qualquer grau de confiabilidade. Note que o erro relativo sempre é um número adimensional, pois resulta da divisão de duas grandezas com a mesma dimensão. Por ser adimensional, o erro relativo torna-se importante como uma característica absoluta associada a um objeto ou processo de medição. Um problema técnico de grande importância na indústria é reduzir os erros relativos dos instrumentos fabricados.

Outro fato que deve ser mencionado é que duas medidas com o mesmo erro absoluto podem ter erros relativos bem diferentes: Suponha que sejam feitas duas medidas de massa com uma balança com escala em gramas: A primeira medida de  $(1,3280 \cdot 10^3 \pm 0,5)$  g e a segunda de  $(2,5 \pm 0,5)$  g, então, o erro relativo da primeira medida foi de, aproximadamente,  $4 \cdot 10^{-4}$ , enquanto que o erro relativo da segunda medida foi de 0,2. Quinhentas vezes maior! Essa avaliação de erro relativo nos ajuda a definir um intervalo de confiabilidade para o instrumento de medição. Por exemplo, se quisermos um erro relativo menor que  $10^{-1}$ , então somente podemos aceitar medidas acima de 5 g.

Para o cálculo da propagação de erros, temos o seguinte resultado:

---

**Proposição 1.1.** Para a soma e subtração de medidas da mesma grandeza, os erros absolutos são somados. Para a multiplicação de um número arbitrário de grandezas, ou para a divisão de duas grandezas, os erros relativos são somados.

---

### Demonstração:

Iniciemos com a soma de uma quantidade arbitrária de medidas da mesma grandeza (em unidades compatíveis, obviamente), sejam elas,  $x_1 \pm \delta x_1, \dots, x_n \pm \delta x_n$ . A soma de todas as medidas será:

$$S \pm \delta S = (x_1 \pm \delta x_1) + \dots + (x_n \pm \delta x_n) = (x_1 + \dots + x_n) \pm (\delta x_1 + \dots + \delta x_n).$$

Para vermos que os erros absolutos também se somam quando subtraímos duas medidas de mesma grandeza, considere duas medidas  $x \pm \delta x$ ,  $y \pm \delta y$ . Temos que considerar o maior valor possível para a primeira medida menos o menor valor possível da segunda medida, obtendo:

$$(x + \delta x) - (y - \delta y) = x - y + (\delta x + \delta y),$$

posteriormente, consideramos o menor valor possível da primeira medida menos o maior valor possível da segunda:

$$(x - \delta x) - (y + \delta y) = x - y - (\delta x + \delta y).$$

Assim, temos que o resultado da subtração dessas duas medidas é  $x - y \pm (\delta x + \delta y)$ , o que nos leva a concluir que o erro absoluto, nesse caso, também é somado.

Vamos mostrar que o erro relativo no produto de um número arbitrário de grandezas é igual à soma dos erros relativos individuais. Considere o produto das medidas de um número arbitrário de grandezas,  $x_1 \pm \delta x_1, \dots, x_n \pm \delta x_n$ :

$$\begin{aligned} P \pm \delta P &= (x_1 \pm \delta x_1) \cdot (x_2 \pm \delta x_2) \cdot \dots \cdot (x_n \pm \delta x_n) = \\ &= (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) \pm \sum_{i=1}^n x_1 \cdot \dots \cdot x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot \dots \cdot x_n \delta x_i + (\delta x)^2 \approx \\ &\approx (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) \pm (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) \sum_{i=1}^n \frac{\delta x_i}{x_i}, \end{aligned}$$

note que desprezamos os termos quadráticos e de potências superiores no erro, pois sua ordem de magnitude é muito inferior à ordem de magnitude dos termos de primeiro grau no erro. O erro relativo desse produto é dado por:

$$\frac{\delta P}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta x_i}{x_i} = \frac{\delta x_1}{x_1} + \dots + \frac{\delta x_n}{x_n}.$$

Finalmente, para verificarmos que o erro relativo na divisão de duas grandezas também é a soma dos erros relativos individuais, tomemos duas grandezas  $x \pm \delta x$ ,  $y \pm \delta y$ . Devemos, primeiramente, calcular a razão entre o maior valor possível na medida da primeira grandeza e o menor valor possível do valor da segunda:

$$\begin{aligned} \frac{x + \delta x}{y - \delta y} &= \frac{x + \delta x}{y \left(1 - \frac{\delta y}{y}\right)} = (x + \delta x) \cdot \frac{1}{y} \left(1 + \frac{\delta y}{y} + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^3 + \dots\right) \approx \\ &\approx (x + \delta x) \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(1 + \frac{\delta y}{y}\right) = \frac{x}{y} + \frac{\delta x}{y} + \frac{x \cdot \delta y}{y^2} + \frac{\delta x \cdot \delta y}{y^2} \approx \\ &\approx \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \left(\frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}\right). \end{aligned}$$

Em segundo lugar, devemos calcular a razão entre o menor valor possível da medida da primeira grandeza e o menor valor da medida da segunda:

$$\begin{aligned} \frac{x - \delta x}{y + \delta y} &= \frac{x - \delta x}{y \left(1 + \frac{\delta y}{y}\right)} = (x - \delta x) \cdot \frac{1}{y} \left(1 - \frac{\delta y}{y} + \left(\frac{\delta y}{y}\right)^2 - \left(\frac{\delta y}{y}\right)^3 + \dots\right) \approx \\ &\approx (x - \delta x) \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(1 - \frac{\delta y}{y}\right) = \frac{x}{y} - \frac{\delta x}{y} - \frac{x \cdot \delta y}{y^2} + \frac{\delta x \cdot \delta y}{y^2} \approx \\ &\approx \frac{x}{y} - \frac{x}{y} \left(\frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}\right). \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\frac{x}{y} \pm \delta \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} \pm \frac{x}{y} \left(\frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}\right).$$

Calculando o erro relativo, obtemos finalmente:

$$\frac{\delta \left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{x}{y}} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y},$$

o que conclui a demonstração.  $\square$

Agora, vamos estabelecer regras para o cálculo de algarismos significativos. Na soma de vários números, arredondam-se os números, tomando como padrão o número que possui o primeiro algarismo duvidoso com a maior ordem de grandeza. Vamos tomar um exemplo: calculemos a soma  $53,42 + 2,354 - 10,1$ . Note que o primeiro algarismo duvidoso de  $10,1$  é o que possui maior ordem de magnitude, no caso,  $10^{-1}$ , então os outros números devem ser arredondados para este número de casas decimais:  $53,42 \rightarrow 53,4$  e  $2,354 \rightarrow 2,4$ , e efetuamos normalmente a operação com os números arredondados, ou seja,  $53,4 + 2,4 - 10,1 = 45,7$ . Aqui estamos utilizando a regra de arredondamento da seguinte forma: se o algarismo posterior for menor que 5, mantemos o último algarismo, se for maior ou igual a 5, então acrescentamos 1 ao último algarismo. Por exemplo, se quisermos arredondar  $24,782$ , até a ordem de 1 centésimo, teríamos  $24,78$ , por outro lado, se quisermos arredondar  $34,56961$  até a ordem de 1 milésimo, teríamos  $34,570$ .

Voltando ao cálculo de algarismos significativos, na multiplicação e divisão, primeiramente se efetuam os cálculos normalmente e após, arredonda-se o resultado para o número de algarismos significativos compatível com o número que possui o primeiro algarismo duvidoso. Considere o seguinte exemplo: Suponha que se queira calcular

$$\frac{32,456 \cdot 890,37}{4,9726}$$

Efetuamos os cálculos normalmente, resultando em, aproximadamente,  $5811,4163$ . Mas esse ainda não é o resultado correto, tendo em vista que um dos fatores possui apenas algarismos significativos até a ordem de 1 centésimo, assim, o resultado final precisa ser arredondado, resultando em  $5811,42$ .

### Exercício resolvido

- 11) Uma placa retangular foi medida com uma régua milimetrada e as leituras foram  $25,4\text{cm}$  por  $13,7\text{cm}$ , calcule a área desse retângulo, levando em conta o erro e os algarismos significativos.

### Resolução:

Como a régua é milimetrada, o erro é dado como a metade da menor divisão, assim as medidas dos lados podem ser escritas como  $(2,540 \cdot 10 \pm 5 \cdot 10^{-2})\text{cm}$  e  $(1,370 \cdot 10 \pm 5 \cdot 10^{-2})\text{cm}$ . Os erros relativos são, respectivamente,  $2 \cdot 10^{-3}$  e  $4 \cdot 10^{-3}$ , e, portanto, o erro relativo do produto é a soma dos erros relativos, ou seja,  $6 \cdot 10^{-3}$ . Agora o produto: primeiramente, com a nossa regra de algarismos significativos, fazemos os cálculos normalmente, ou seja,  $1,370 \cdot 2,540 \cdot 10^2 \text{ cm}^2 = 3,4798 \cdot 10^2 \text{ cm}^2 \approx 3,480 \cdot 10^2 \text{ cm}^2$ . Agora, podemos calcular o erro absoluto, multiplicando o resultado pelo erro relativo, o que nos dá  $21 \cdot 10^{-1} \text{ cm}^2 = 2,1 \text{ cm}^2$ . Assim o resultado da área fica  $(3,480 \cdot 10^2 \pm 2,1) \text{ cm}^2$ .

### Exercícios

- 30) Após uma denúncia de irregularidades na quantidade de leite contida nas caixas longa vida de 1 litro, o INMETRO fez uma verificação e de uma amostra de 10 caixas obteve os seguintes dados:

Caixa 1	970 ml
Caixa 2	981 ml
Caixa 3	977 ml
Caixa 4	994 ml
Caixa 5	972 ml
Caixa 6	989 ml
Caixa 7	996 ml
Caixa 8	983 ml
Caixa 9	967 ml
Caixa 10	978 ml

Calcule a quantidade média de leite nas caixas longa vida e calcule os erros, absoluto e relativo, dessa medida.

- 31) Um certo líquido enche um recipiente cujo volume era dado por  $(1,23 \pm 0,02)\text{l}$  e pesava em torno de  $(1,843 \pm 0,005)\text{kg}$ . Calcule a densidade do líquido levando em conta os erros e os algarismos significativos.
- 32) Um motorista precisa fazer um trajeto entre duas cidades

das quais as únicas informações que ele sabe são: (a) Que as cidades distam entre 356 km e 374 km. (b) Um terço do caminho é de estrada de terra, enquanto os outros dois terços de asfalto estão igualmente distribuídos entre subidas, descidas e terrenos planos. Sabendo-se que o carro faz algo entre 10,5 km/l e 11,5 km/l em estrada de terra e em subidas de asfalto, faz entre 11 km/l e 12 km/l em asfalto plano e faz entre 13,5 km/l e 14,5 km/l na descida de asfalto. Calcule quantos litros de gasolina (levando em conta erros e algarismos significativos) serão necessários para ele fazer esta viagem.

## Resumo

Neste capítulo vimos em primeiro lugar como os dados numéricos são utilizados pela física. Foram abordados basicamente os seguintes tópicos:

- A interpretação diferenciada que os números assumem na descrição das diversas grandezas físicas devido às suas dimensões. Assim, um mesmo valor numérico pode representar grandezas físicas diferentes, dependendo da dimensão a ele associada em cada contexto.
- A análise dimensional pode ser útil para a estimativa, a priori, de leis empíricas que relacionem diversas grandezas físicas.
- A análise dimensional também nos auxilia na análise de sistemas físicos em escalas diferentes, permitindo a criação de protótipos e aparatos experimentais.
- Em muitas situações práticas, é importante somente uma estimativa da ordem de magnitude de uma grandeza sob análise. Por ordem de magnitude, entendemos a potência de 10 mais próxima do valor real da grandeza analisada.
- Nas tomadas de dados de situações reais em Física, se deve levar em conta as limitações dos aparelhos de medição. Por isto é importante repetir-se diversas vezes a mesma medida para que se tenha uma amostragem suficientemente boa para estimarmos o valor da grandeza analisada.
- O valor experimental é expresso pela média dos valores obtidos em diversas medidas e associado a um erro experimental.

- O erro experimental mais utilizado na prática é a metade da menor unidade de medida dos aparelhos de medição utilizados.
- No caso de uma tomada de diversas medidas, pode-se considerar o erro como a metade da diferença entre o maior e o menor valor obtido. Para sermos totalmente rigorosos na análise estatística dos dados experimentais, o erro deve ser tomado como o desvio padrão da distribuição de medidas dada.
- Os erros experimentais se propagam no cálculo de grandezas que dependem funcionalmente uma das outras. No caso da soma ou diferença de duas medidas, os erros absolutos se somam. No caso de multiplicação ou divisão, então os erros relativos são somados.

## Bibliografia Complementar Comentada

[1] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **Lições de física de Feynman**. Porto Alegre: Bookman, 2008. 3 v.

A coleção de três livros consiste de uma série de aulas ministradas pelo físico Richard Feynman na CAL-TECH (*California Institute of Technology*). Em estilo próprio, Feynman trata de todas as áreas de Física básica, da mecânica clássica à mecânica quântica, passando pelo eletromagnetismo e pela teoria da relatividade. Sem sufocar o leitor com uma quantidade inumerável de fórmulas, Feynman tenta expor os conceitos principais e mostrar sua relevância e inter relação. Para quem quer aprender Física de verdade, é uma leitura obrigatória.

[2] KUHN, Thomas S. **Estrutura das revoluções científicas**. São Paulo: Perspectiva, 2003. (Debates, 115).

Esse livro trata da ciência como uma das facetas da cultura e da civilização. Expõe a existência de paradigmas dominantes na pesquisa científica. Paradigmas os quais são adotados e convencionaados socialmente dentro da própria comunidade científica. Em alguns momentos históricos específicos o avanço da ciência requer a quebra de paradigmas existentes e a adoção

de outros, isto é, o que se chama revolução científica. No livro, o autor analisa alguns exemplos específicos de momentos históricos nos quais ocorreram revoluções deste tipo.

[3] NUSSENZWEIG, H. Moyses. **Curso de física básica**. 4. ed. São Paulo: Edgard Blücher , 2002. 4 v.

Essa é outra coleção de Física básica que discute os conceitos de maneira elegante e precisa. O professor Nussenzweig é, reconhecidamente, um dos grandes nomes da física no Brasil e seu livro, adotado em muitas universidades do país como livro texto, propicia uma formação sólida aos estudantes dos primeiros anos dos cursos de Exatas.

[4] SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL. São Paulo: Duetto, 2005-2006. (Gênios da Ciência).

Essa coleção, lançada no Brasil entre os anos de 2005 e 2006, trouxe para o público comum, biografias detalhadas de grandes cientistas de todas as épocas, além de detalhado panorama histórico sobre a vida do cientista e o contexto de sua época. A publicação, também, se preocupa em expor de forma inteligível a obra desse cientista, destacando os conceitos principais. A coleção, entre outros, inclui nomes como: Newton, Galileo, Einstein, Feynmann, Kepler, Copérnico, Arquimedes e Darwin.



## **2** Modelagem Matemática de Fenômenos Físicos



## 2 Modelagem Matemática de Fenômenos Físicos

*Neste capítulo vamos discutir o processo de modelagem matemática em Física; modelar fenômenos envolvendo funções lineares, afins e quadráticas; discutir o uso das cônicas na descrição de alguns processos físicos; utilizar métodos oriundos da Física para a resolução de problemas matemáticos; aprender a integrar raciocínios físicos e matemáticos na prática pedagógica do ensino básico.*

### 2.1 Introdução

Todo estudante, ao tomar o primeiro contato com a Física, costuma estranhar certos procedimentos utilizados pelos físicos para tratar matematicamente os fenômenos da natureza. Com respeito a isso, existe até uma anedota contando que o dono de uma granja contratou um físico para que ele propusesse um método para aumentar a produtividade de ovos. Depois de alguns dias de intensa pesquisa, o físico disse ter encontrado a solução, mas que esta só funcionava bem com galinhas esféricas e no vácuo! Essa estória ilustra de forma pitoresca o modo de pensar de um físico. Afinal, dependendo do tipo de informação que se quer obter de um sistema físico, é possível considerar aproximações que simplificam o tratamento matemático do problema. Por exemplo, se o objetivo é determinar o formato da órbita de um planeta em seu movimento de translação ao redor do Sol, então, dadas as distâncias envolvidas no problema, podemos considerar tanto o Sol quanto o planeta simplesmente como pontos. Por outro lado, se o objetivo for estudar os movimentos de rotação e precessão da Terra, então o formato esférico da Terra e a inclinação do eixo de rotação são imprescindíveis nesse desenvolvimento.

Outro exemplo: quando Galileo Galilei realizou seu célebre ex-

perimento sobre a Torre de Pisa, ao deixar cair duas esferas de pesos diferentes, para mostrar que a aceleração da gravidade era a mesma para todos os corpos, o efeito da resistência do ar podia ser desprezado sem comprometer os resultados obtidos. Por outro lado, se quisermos analisar como ocorre um gol olímpico, não somente a resistência do ar tem que ser levada em conta, como também vários efeitos hidrodinâmicos de natureza bem mais complexa.

O objetivo da Física é criar ferramentas conceituais que auxiliem na compreensão dos objetos e fenômenos da realidade que nos envolve. Quanto mais sofisticados forem nossos modelos, melhor e mais acurada será nossa descrição do universo. Certamente, uma compreensão perfeita e completa da realidade, abrangendo desde fenômenos de ordem subatômica até a estrutura cósmica em larga escala, é uma tarefa muito além de todo conhecimento científico desenvolvido ao longo de todas as gerações de seres humanos até o presente momento. Talvez, essa seja mesmo uma ambição inatingível. De qualquer forma, nos últimos 300 anos observamos um desenvolvimento estrondoso do conhecimento científico, o qual nos levou à utilização de ferramentas matemáticas cada vez mais abstratas: Iniciando com o cálculo de Newton, técnicas variacionais desenvolvidas por Euler e Lagrange, o cálculo vetorial de Gibbs e Heaviside, a álgebra linear, que teve origem com as séries de Fourier e culminou com espaços vetoriais topológicos (espaços de Banach e espaços de Hilbert), a teoria de grupos e álgebras de Lie, a geometria Riemanniana, a geometria de fibrados, classes características, K-teoria, álgebras de operadores ( $C^*$ -álgebras e álgebras de Von Neumann), grupos quânticos e uma série de outras estruturas matemáticas que a princípio pareciam simples deleite estético de matemática pura e hoje fazem parte do cotidiano dos físicos teóricos.

Neste capítulo, nosso objetivo é mostrar alguns exemplos de modelagem de problemas físicos utilizando apenas ferramentas de matemática básica. Esse tipo de conhecimento é importantíssimo para o professor de matemática nos ensinamentos fundamental e médio por duas razões: a primeira é que grande parte da matemática ao longo da história foi desenvolvida para resolver problemas concretos, concernentes à realidade física. A segunda é que o pro-

*O termo “gol olímpico” é uma referência ao gol marcado pelo jogador ao cobrar um escanteio. O posicionamento do jogador em relação à trave do gol faz com que essa jogada seja extremamente improvável, tornando, assim, esses eventos raros.*

*Fisicamente, o efeito que permite a existência de gols olímpicos (conhecido na literatura como efeito Venturi) é consequência do princípio de Bernoulli. O princípio de Bernoulli, ou equação de Bernoulli relaciona a velocidade de escoamento de um fluido com a sua pressão, o mesmo princípio também explica a sustentação de aviões no ar. Para saber mais, visite a Wikipédia: [http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli's\\_principle](http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli's_principle)*

*Eventualmente, utilizando algum argumento oriundo do cálculo diferencial e integral. De fato, veremos que não é possível ir muito longe apenas utilizando matemática básica. O próprio cálculo foi inventado por Sir Isaac Newton para formular matematicamente a mecânica clássica.*

cesso de ensino e aprendizagem de Matemática precisa ser bem motivado para que possa ser efetivo. Se os conceitos e resultados matemáticos forem ensinados de maneira estanque, sem contato com problemas reais, dificilmente os estudantes perceberão a relevância desses conteúdos para a sua vida. Tentaremos, na medida do possível, sugerir atividades que possam ser desenvolvidas em sala de aula, com estudantes do ensino básico.

Para efetuarmos a modelagem de um sistema físico, há dois aspectos fundamentais para os quais temos que atentar: A configuração geométrica e a física, propriamente dita. Do ponto de vista da geometria, temos que verificar a distribuição espacial dos objetos envolvidos, fazer considerações de simetria, verificar as escalas de medida envolvidas (que podem determinar, do ponto de vista físico, quais fatores e efeitos poderão ser desprezados na modelagem do sistema) e escolher corretamente o sistema de coordenadas adequado, sem o qual, a descrição dos movimentos envolvidos se torna trabalhosa, quando não impossível.

Quanto ao aspecto físico do problema, devemos atentar para as grandezas envolvidas, a dependência funcional entre elas (isto pode determinar, entre outras coisas, a geometria do problema) e as leis físicas já conhecidas que interrelacionam essas diversas grandezas. As considerações de ordem geométrica e de ordem física, em geral, são feitas simultaneamente e, na maioria das vezes, são inter dependentes. A habilidade de fazer modelos é requerida tanto de um físico teórico quanto de um experimental, afinal, um experimento nada mais é do que um modelo concreto (material) de uma situação real da natureza onde parâmetros possam ser controlados por agentes externos (no caso, o próprio cientista). Para os matemáticos, o mais importante é analisar os aspectos matemáticos dos modelos: quais as ferramentas matemática utilizadas, quais os limites de validade dos modelos considerados, qual o erro cometido quando certas aproximações são assumidas, etc. Neste capítulo, por questões de espaço e por se tratar de um primeiro contato com estas ideias, nos concentraremos principalmente em um aspecto da modelagem física, a saber, a dependência funcional entre as grandezas envolvidas.

O estudo das funções nos ensinos fundamental e médio, muitas

vezes acaba se resumindo na análise de domínios e imagens e na confecção de gráficos. Dificilmente estudantes são motivados a utilizar funções para resolver problemas de seu cotidiano. E como, sem muito exagero, podemos dizer que o espírito da matemática consiste de funções, então estudantes saem sem saber usufruir de um dos conceitos centrais de toda a matemática.

*Praticamente tudo o que se define em matemática, ou é um conjunto ou é uma função.*

Como exemplo concreto de modelagem de um sistema físico, consideremos um pêndulo simples. Basicamente, um pêndulo consiste de um objeto com determinada massa preso a uma das extremidades de uma corda, cuja outra extremidade está fixada em um ponto determinado, de forma que o fio se encontre na posição vertical. As grandezas relevantes são, basicamente, o comprimento do fio,  $l$ , e a massa do corpo,  $m$ , conforme nos mostra a Figura 2.1.

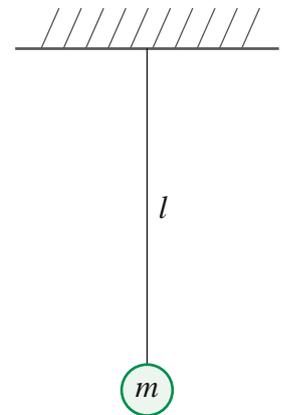


Figura 2.1 - Configuração inicial de um pêndulo físico.

O objeto principal de estudo relativo ao pêndulo físico é o movimento do corpo de massa  $m$ , quando deslocado de sua posição inicial de equilíbrio e posteriormente solto, movendo-se pela ação da gravidade. Na maioria dos casos, algumas simplificações são bastante razoáveis. Por exemplo: 1- Podemos supor que o fio tenha uma massa muito pequena em relação à massa  $m$  do corpo e, portanto, possa ser desprezada. 2- Também, é razoável assumir que a espessura do fio seja desprezível em relação ao seu comprimento  $l$ . 3- Quaisquer considerações relativas à elasticidade e resistência do material do fio devem ser desconsideradas, assim, o fio permanecerá sem se dobrar ou encurvar, nem esticar; diremos que o fio é retilíneo e inextensível. 4- Por último, podemos assumir que as dimensões do corpo de massa  $m$ , preso à extremidade do fio, sejam muito pequenas, quando comparadas com o comprimento  $l$  do fio. Sendo assim, o corpo pode ser considerado pontual, isto é, sem graus de liberdade internos.

*Com isso, queremos dizer que não serão considerados movimentos de rotação ou precessão do corpo em questão, bem como sua forma geométrica ou possíveis deformações causadas pelo movimento, ou seja, não entrarão em consideração na análise do problema.*

A segunda etapa da análise do problema do pêndulo simples consiste em determinar quais forças estão envolvidas no movimento do pêndulo, bem como o sistema de coordenadas que melhor descreve o movimento. Esse último aspecto diz respeito basicamente à complexidade dos cálculos. Qualquer sistema de coordenadas é igualmente lícito na descrição de um sistema físico. Os efeitos

observados, o movimento efetuado e as forças envolvidas serão as mesmas, independentemente do sistema de coordenadas escolhido para descrever o sistema. Mas, por outro lado, um sistema de coordenadas que “acompanhe”, de certa forma, a geometria do sistema, em geral se mostra mais adequado e tende a simplificar as equações envolvidas. Voltando ao pêndulo simples, a única força envolvida no movimento do corpo de massa  $m$  é a força gravitacional, cuja aceleração resultante é a mesma para todos os corpos próximos da superfície da Terra; aceleração que vamos denotar por  $g$ . Essa força atua na direção vertical, de cima para baixo. Como o fio é considerado retilíneo e inextensível, o único movimento possível é o movimento circular, com o centro no ponto onde o fio está fixado.

*Será preciso um pouco mais de teoria para garantir que o movimento realmente é sobre um plano vertical, pois a priori, o corpo de massa  $m$  poderia se movimentar sobre a superfície de uma esfera de raio  $l$  com o mesmo centro.*

A configuração do movimento de um pêndulo simples pode ser observada na Figura 2.2.

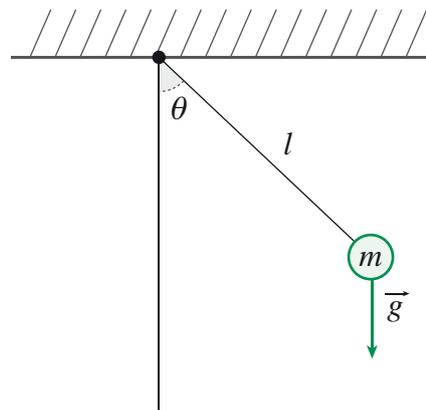


Figura 2.2. Movimento de um pêndulo simples.

A única coordenada relevante no caso do movimento do pêndulo é o ângulo que o fio faz com a reta normal. Assim, podemos tomar um sistema de coordenadas polares, com centro no ponto ao qual o fio está fixado, com eixo polar dado pela semirreta vertical inferior e com o ângulo polar dado pelo ângulo entre essa semirreta e o fio do pêndulo. Medido no sentido anti-horário, esse ângulo será denotado por  $\theta$ .

## Exercícios

- 1) Estabeleça os elementos básicos para a modelagem da queda livre de um corpo sob a influência da força gravitacional

próximo à superfície da Terra: qual a configuração geométrica do problema, qual o melhor sistema de coordenadas para descrevê-lo, quais as grandezas físicas envolvidas, qual o sistema de forças existente, quais as possíveis dependências funcionais que poderiam ser relevantes, etc.

- 2) Faça a mesma análise para um tronco cilíndrico rolando sobre um plano inclinado sob a influência da força gravitacional próximo à superfície da Terra.

O objetivo principal do estudo do movimento do pêndulo é estabelecer uma função que descreva a dependência desta variável ângulo, que propriamente determina a posição do objeto de massa  $m$ , em relação ao tempo,  $t$ . Esse problema será abordado com mais detalhes no Capítulo 3, pois envolve o estudo de equações diferenciais, no entanto, existem certas informações a respeito do movimento do pêndulo que podem ser estudadas mesmo sem o conhecimento das soluções das equações de movimento. O período do pêndulo, por exemplo, pode ser medido com facilidade. A dependência funcional entre o período do pêndulo e as outras grandezas envolvidas no movimento do sistema também pode ser estabelecida de maneira direta, através de procedimentos experimentais bem simples. Denotemos o período do pêndulo por  $T$ , e tentemos catalogar todas as variáveis que poderiam influenciar na determinação do período  $T$ . Certamente, as grandezas como a massa  $m$  do corpo e o comprimento  $l$  do fio, que determinam a configuração de repouso do pêndulo, devem ser levadas em conta, afinal, essas grandezas são como as impressões digitais do sistema. Mudando-se seus valores, seria de se esperar que o período variasse. Também a aceleração  $g$ , devido à força gravitacional, que é a única causa do movimento, deve influenciar no período do pêndulo. Também seria natural pensar se o ângulo inicial,  $\theta_1$ , a partir do qual o pêndulo foi posto em movimento (Aqui estamos supondo que o pêndulo foi solto a partir do repouso e não arremessado com uma velocidade inicial). Assim, podemos expressar o período como uma função de todas as variáveis apresentadas acima:

$$T = T(m, l, g, \theta_1).$$

Obviamente, nem todas essas variáveis são realmente relevantes

O período de um pêndulo é o intervalo de tempo referente à duração do movimento de uma configuração inicial até o retorno a essa mesma configuração. Por exemplo, tome a bolinha presa ao fio do pêndulo e solte-a, mantendo sua mão no mesmo local. Quando a bolinha voltar às suas mãos como no instante em que ela foi solta, terá decorrido um período completo.

*Você realmente já sabe a resposta, dê uma olhada de novo no capítulo primeiro na seção sobre análise dimensional.*

para a determinação do período  $T$ . A avaliação da dependência funcional com relação a cada uma dessas variáveis deve ser efetuada seguindo-se **procedimentos específicos**. Nesse ponto, o físico está diante de uma das seguintes possibilidades: 1- Ou a dependência funcional entre as grandezas deve ser determinada utilizando-se uma série de procedimentos experimentais. Em cada um deles apenas uma das variáveis pode ser variada, enquanto todas as outras devem permanecer fixas. Voltaremos a seguir com mais detalhes sobre a extração e a análise dos dados referentes a esses procedimentos experimentais. Uma vez estabelecida a dependência funcional entre as variáveis, obtemos uma lei empírica. 2- Ou então essa dependência funcional pode ser estabelecida com o auxílio de algumas ferramentas teóricas, como por exemplo, outras leis empíricas previamente estabelecidas, análise dimensional, equações diferenciais ou outras técnicas matemáticas que nos permitam ver além do fenômeno puro e simples. Todos os procedimentos relacionados à segunda alternativa envolvem o uso de raciocínio matemático.

No caso em que o físico necessita realizar verificação experimental da dependência funcional em relação a uma das variáveis, ele tem que se certificar de que em cada repetição do experimento, todas as outras variáveis foram mantidas constantes. Por exemplo, se quisermos verificar a dependência do período do pêndulo em relação ao ângulo inicial, então em todas as medições, o comprimento do fio, a massa do corpo e obviamente a aceleração da gravidade, devem ser mantidos rigorosamente constantes em todas as medições. Para cada ângulo inicial,  $\theta_{I,k}$ , várias medidas devem ser tomadas, devido a erros oriundos dos instrumentos de medição, tanto do ângulo, quanto do período. Após as diversas tomadas de medida para o mesmo ângulo, deve-se fazer uma média e estimar o erro (Veja a seção no capítulo anterior relativa ao cálculo de erros). Depois de diversas medidas, com diversos ângulos iniciais, o físico poderá apresentar seus dados em um gráfico, como mostrado na Figura 2.3.

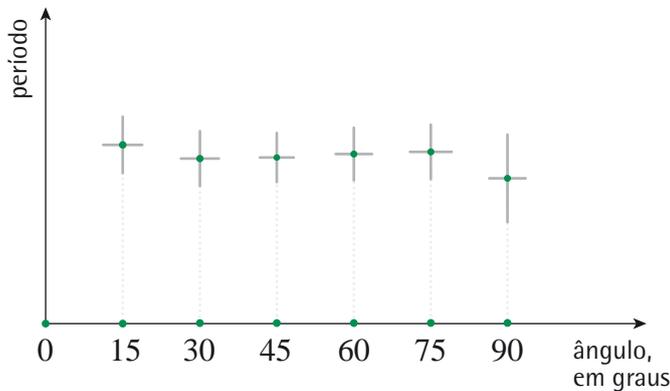


Figura 2.3 - Gráfico da dependência do período do pêndulo simples em relação ao ângulo inicial.

Nesse gráfico, as barras verticais e horizontais ao redor dos pontos são as expressões dos erros experimentais cometidos no processo de medição. Exageramos o tamanho das barras de erro nesse caso, mas isto é somente para ilustrar o que ocorre, de fato, em um experimento real. Após esse primeiro estágio, que é o da coleta e sistematização dos dados, vem a segunda etapa, que é denominada regressão. Basicamente, o que se quer é, a partir dos pontos obtidos experimentalmente, encontrar uma função contínua cujo gráfico passe o mais próximo possível dos pontos dados. Dada a distribuição de pontos apresentada na Figura 2.3, podemos facilmente deduzir que o gráfico de uma função constante é o que mais se adapta a essa configuração. Logo, a conclusão é que o período do pêndulo independe do ângulo inicial.

Se por outro lado, a função de dependência não for tão trivialmente reconhecida, o físico deve testar outras possibilidades para representar graficamente seus dados. Basicamente, as dependências funcionais mais comuns são de funções do tipo:  $f(x) = ax^k$  ou na forma  $f(x) = Ae^{kx}$ , isto é, ou do tipo “algébricas” ou **exponenciais**. Note que no primeiro caso, estamos incluindo os casos

onde os expoentes são negativos, como por exemplo,  $f(x) = \frac{a}{x}$ .

Para averiguar qual função mais adequada para modelar seu sistema, o físico tem que construir os gráficos monologarítmicos e dilogarítmicos. Vamos explicar: suponha que se queira determinar a dependência funcional de uma grandeza  $Y$  em relação a uma grandeza  $X$ . Após uma série de medidas experimentais, o físico conseguiu uma sequência de pontos:  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .

*O sentido preciso para a expressão “o mais próximo possível” é dado pelo método dos mínimos quadrados. Para saber mais sobre esse método, consulte:*  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Least\\_squares](http://en.wikipedia.org/wiki/Least_squares)  
[http://pt.wikipedia.org/wiki/Método\\_dos\\_mínimos\\_quadrados](http://pt.wikipedia.org/wiki/Método_dos_mínimos_quadrados)  
[http://www.physics.csbsju.edu/stats/least\\_squares.html](http://www.physics.csbsju.edu/stats/least_squares.html)

*As funções elementares também incluem as funções trigonométricas,  $f(x) = a \sin(kx)$  ou  $f(x) = a \cos(kx)$ , no entanto, os métodos que estamos por apresentar não são adequados para identificar uma dependência funcional desse tipo.*

- 1) O gráfico monologarítmico é o gráfico dos pontos  $(X_1, \log Y_1), \dots, (X_n, \log Y_n)$ . Aqui, os logaritmos são, em geral, tomados na base 10. Se a função for do tipo exponencial, isto é,  $Y = Ae^{kx}$ , teremos  $\log Y = \log A + (k \log e)X$ , portanto, a variável  $\log Y$  é uma função de primeiro grau da variável  $X$ , cujo gráfico é uma reta. Assim, tomando-se a reta que melhor aproxime os pontos do gráfico monologarítmico, verificando-se sua inclinação e o ponto onde a reta cruza com o eixo vertical, podemos facilmente determinar os valores das constantes  $A$  e  $k$ . Se a função não for do tipo exponencial, o gráfico monologarítmico não fornecerá uma boa aproximação dos pontos experimentais por uma reta.
- 2) O gráfico dilogarítmico é o gráfico dos pontos  $(\log X_1, \log Y_1), \dots, (\log X_n, \log Y_n)$ . Se a função for algébrica, isto é,  $Y = aX^k$ , então,  $\log Y = \log a + k \log X$ . Novamente, temos que a variável  $\log Y$  é uma função de primeiro grau da variável  $\log X$ , cujo gráfico é uma reta. Verificando-se a reta que melhor aproxime os pontos do gráfico dilogarítmico, a partir da inclinação dessa reta e de seu ponto de intersecção com o eixo vertical, podemos obter facilmente as constantes  $a$  e  $k$ . Por exemplo, no caso da dependência funcional do período do pêndulo pelo comprimento do fio, verificaríamos que o gráfico dilogarítmico aproxima melhor uma reta dos pontos experimentais e concluiríamos, observando o coeficiente angular da reta, que  $T = al^{\frac{1}{2}}$ .

Nas discussões que se seguirão, obviamente não vamos nos ater a métodos experimentais para determinarmos dependências funcionais entre as grandezas físicas existentes nos fenômenos. Mesmo porque, essa disciplina visa fornecer ao estudante de matemática uma pequena ideia dos métodos de trabalho utilizados na física e não um treinamento completo nestes métodos. A interação entre a física e a matemática é uma via de mão dupla. Por um lado, o físico, para entender determinado sistema, precisa lançar mão de ferramentas e recursos matemáticos, sendo que muitas vezes essas ferramentas podem ser muito sofisticadas do ponto de vista matemático. Por outro lado, um matemático para resolver seus problemas pode utilizar raciocínios e métodos que são próprios dos físicos.

Na história recente da matemática e da física, essa inter-relação entre os métodos matemáticos e métodos físicos está cada vez mais evidente nos grandes círculos de pesquisa avançada no mundo. Dentre as áreas onde essa interação entre a Física e a Matemática fica mais evidente é a teoria quântica de campos. Se por um lado, físicos, em sua ânsia por desenvolver uma teoria que descreva plenamente as interações elementares da matéria, utilizam-se de ferramentas cada vez mais sofisticadas, oriundas da geometria diferencial, da topologia algébrica e da geometria algébrica. Por outro lado, matemáticos, debruçados sobre estruturas cada vez mais complexas, se veem utilizando cálculos originados na física de altas energias, como gráficos de Feynman, grupo de renormalização, supersimetria, etc. A ilustração a seguir foi retirada da capa do livro **Quantum fields and strings: a course for mathematicians**, publicado pela American Mathematical Society, em 1999. Note a alternância dos quadros e veja os conteúdos nos quadros negros dos pesquisadores na ilustração:

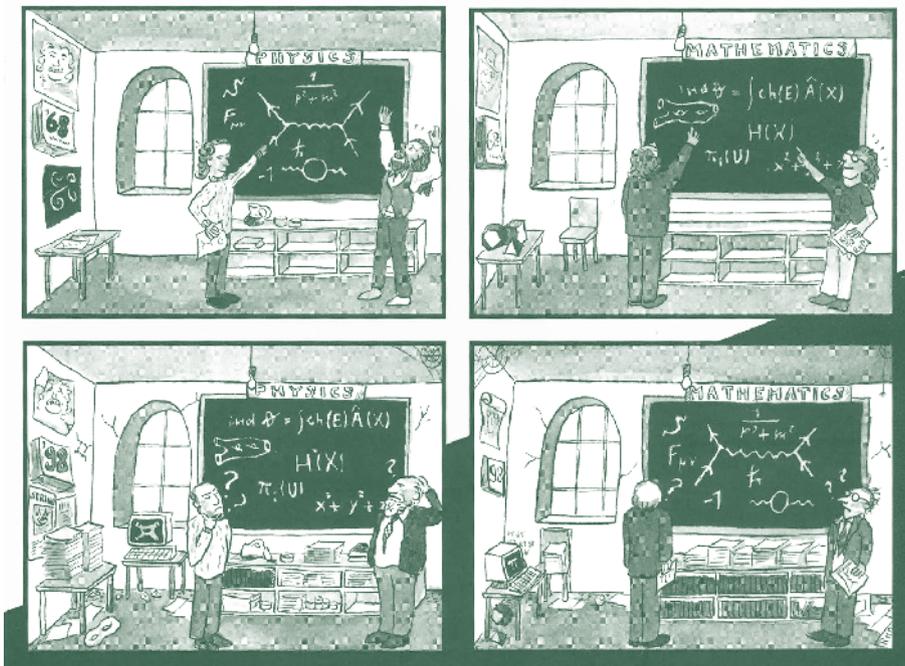


Figura 2.4 - A interação entre a Física e a Matemática nas últimas décadas.

Dividiremos o capítulo da seguinte maneira: em primeiro lugar, mostraremos alguns sistemas físicos que podem ser modelados com funções elementares, sobretudo funções polinomiais de primeiro e segundo grau. Em seguida, faremos um pequeno estudo sobre o uso de cônicas para a modelagem de alguns sistemas físicos, na mecânica clássica e na ótica geométrica. Por último, mos-

traremos uma propriedade das cônicas em geral que nos auxilia a escrevermos a sua equação de uma forma útil para o estudo das órbitas planetárias, a qual se desenvolverá no capítulo seguinte.

## 2.2 Modelagem com funções elementares

Nesta seção, vamos considerar alguns exemplos de modelagens de situações reais que envolvam apenas funções elementares. Quando dizemos “funções elementares”, estamos nos referindo a uma classe de funções reais de uma variável que é constituída basicamente de funções polinomiais, funções racionais, funções trigonométricas e trigonométricas inversas, funções exponenciais e funções logarítmicas. As funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas ocorrerão com maior frequência no próximo capítulo, pois essas funções, como veremos, são obtidas como soluções de equações diferenciais. Portanto, abordaremos no que segue apenas problemas que possam ser modelados com a utilização de funções polinomiais, mais especificamente, funções polinomiais de primeiro e segundo grau. Nos exemplos a seguir, procure sempre elaborar os gráficos de funções e tente visualizar as situações através dos gráficos. O procedimento algébrico é necessário, principalmente quando precisamos determinar uma solução numérica para um problema específico. No entanto, o aspecto gráfico muitas vezes nos leva a uma resposta mais imediata, principalmente quando a informação que desejamos obter é do tipo qualitativa e não quantitativa. Por exemplo, considere o problema a seguir:

**Exemplo 2.1.** Um alpinista começa a escalar a montanha às 8h da manhã de um dia, alcançando o topo exatamente às 18h do mesmo dia. Após passar a noite no topo da montanha, ele inicia a descida às 8h da manhã, utilizando o mesmo caminho pelo qual havia subido e chegando à base às 18h deste mesmo dia. Mostre que existe um horário entre 8h e 18h em que o alpinista esteve no mesmo ponto no caminho, tanto na subida quanto na descida.

### Resolução:

Note que nesse problema não temos quaisquer informações sobre o regime de subida ou de descida do alpinista. Não sabemos os ho-

rários os quais ele parou para descansar, nem tampouco sabemos a velocidade que desenvolveu na caminhada. As únicas informações que temos são: os pontos de partida e chegada e seus respectivos horários. Também a trajetória do alpinista é uma função contínua em relação ao tempo, afinal, é razoável supor que não ocorreram teletransportes. O único recurso que temos é construir gráficos contínuos da altura em função do tempo e sobrepô-los, afinal os domínios dessas funções no tempo são exatamente iguais. Não importam, de fato, quais sejam os formatos dos gráficos, desde que sejam gráficos de funções. A Figura 2.5 ilustra nosso problema:

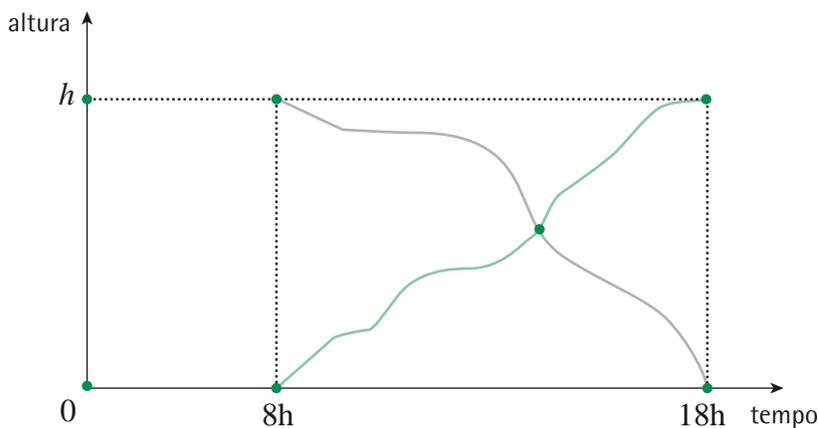


Figura 2.5. Gráfico das trajetórias de subida e de descida do alpinista.

Note que há um ponto de intersecção nos dois gráficos, mostrando que, realmente, existe um horário no qual o alpinista esteve no mesmo ponto, tanto na subida quanto na descida. A existência desse ponto é um **resultado topológico**, e se deve ao fato de que as duas funções são contínuas, definidas em um mesmo intervalo e tomando valores também sobre um mesmo intervalo.

*É uma pequena variação de uma versão simples do teorema do ponto fixo de Brouwer, que diz: "Qualquer função contínua de um intervalo fechado sobre si mesmo deixa um ponto fixo, isto é, se  $f : I \rightarrow I$  é contínua e  $I$  é um intervalo fechado, então, existe  $x \in I$  tal que  $f(x) = x$ ".*

## Exercício

- 3) Um trem leva 12h10min para completar seu percurso e todos os trens partem em hora cheia, tanto da estação inicial quanto da estação final. Quantos trens cada trem encontra em seu caminho? (Sugestão: Considere as velocidades dos trens sempre iguais e constantes, elabore os gráficos das trajetórias dos trens que saíram da estação de chegada antes da partida do nosso trem e continue elaborando gráficos até que eles não mais cruzem o gráfico do nosso trem de referência.

### 2.2.1 Funções polinomiais de primeiro grau

As funções polinomiais de primeiro grau surgem basicamente em problemas de taxa de variação constante, ou pelo menos que a variação média seja constante, mesmo que possa sofrer pequenas oscilações em seu valor. Estas funções se dividem basicamente em duas classes, as lineares e as afins. As funções lineares, como sabemos, da álgebra linear, são caracterizadas pelas propriedades:  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  e  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  para qualquer constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Você já deve ter feito esse exercício, mas vamos de novo enunciar o resultado: Toda função linear  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser escrita como  $f(x) = ax$  para algum  $a \in \mathbb{R}$ . Já as funções afins  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , são caracterizadas pela propriedade que existe um número real  $a$  de forma que  $f(x) - f(y) = a(x - y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ . Em particular, se colocarmos  $y = 0$  e denominarmos  $f(0) = b$ , temos que uma função real afim tem que ser na forma  $f(x) = ax + b$ . Vamos mostrar através de alguns exemplos, como podemos utilizar funções de primeiro grau para modelarmos problemas elementares de matemática e física.

**Exemplo 2.2.** Um coelho está com uma vantagem de 100m em relação a um lobo. Sabemos que o lobo percorre 10m enquanto o coelho, no mesmo intervalo de tempo, percorre somente 6m. Calcule quantos metros o lobo terá que percorrer até alcançar o coelho.

#### Resolução:

Após um intervalo de tempo fixo,  $\Delta T$ , o lobo percorreu 10m enquanto o coelho percorreu apenas 6m. Isto significa que, a velocidade média do coelho é igual a  $v_c = 6 \frac{m}{\Delta T}$ , enquanto que a velo-

cidade média do lobo é igual a  $v_l = 10 \frac{m}{\Delta T}$ . Aqui vamos fazer nossa

primeira aproximação: Muito embora o regime de movimento, tanto do coelho quanto do lobo, não precisam ser uniformes, vamos assumir que essas velocidades sejam constantes. Esta aproximação é tanto melhor quanto menor for o intervalo de tempo  $\Delta T$  utilizado entre duas medidas consecutivas. Também, é preciso que fique estabelecido que tanto o coelho quanto o lobo se movimentem em linha reta e no mesmo sentido, pois afinal um está perseguindo o

outro. A configuração inicial fica ilustrada na Figura 2.6.



Figura 2.6 - Modelo geométrico para a perseguição do coelho pelo lobo.

Então, as posições do coelho e do lobo podem ser expressas como função do tempo da seguinte maneira (assumindo-se que o instante inicial era igual a 0):

$$C(t) = 100 + 6t$$

$$L(t) = 10t.$$

O ponto de encontro será dado pela igualdade das duas posições em determinado instante  $t_0$ , ou seja:

$$C(t_0) = L(t_0) \Rightarrow 100 + 6t_0 = 10t_0 \Rightarrow t_0 = 25\Delta T,$$

o que resulta em:

$$L(t_0) = 10 \frac{m}{\Delta T} \cdot 25\Delta T = 250 \text{ m.}$$

Portanto, o lobo precisa percorrer 250 m para alcançar o coelho.

## Exercício

- 4) Expresse graficamente as posições do coelho e do lobo em função do tempo e visualize o ponto de encontro entre os dois.

**Exemplo 2.3.** Uma vela vermelha queima inteiramente em quatro horas enquanto uma vela amarela, exatamente do mesmo tamanho que a vermelha, queima inteiramente em cinco horas. Se a vela amarela for acesa ao meio-dia e a vermelha for acesa ao meio-dia e meia, a que horas a vela a vela vermelha terá a metade do tamanho da vela amarela?

### Resolução:

Nesse problema, as velocidades envolvidas são as taxas de queima das velas. Supondo que ambas tenham o mesmo comprimento,

inicial  $L$  vela vermelha queima com uma taxa igual a  $v_V = \frac{L}{4} \frac{1}{h}$ , enquanto a amarela queima com taxa igual a  $v_A = \frac{L}{5} \frac{1}{h}$ . Assim, o comprimento das duas velas em **função do tempo** será:

O tempo, nesse caso inicia (portanto é igual a 0) no momento em que as velas são acesas, isto é, ao meio dia. Logo, para descobrir o horário no qual as velas atingirão a condição do enunciado do problema, basta somar 12h ao tempo encontrado.

$$A(t) = L - \frac{L}{5}t$$

$$V(t) = L - \frac{L}{4}\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Note que a vela vermelha foi acesa meia hora depois da vela amarela, assim, se a vela amarela tiver queimado por um tempo  $t$ , desde que foi acesa, a vela vermelha terá queimado meia hora a menos. Queremos saber quanto tempo terá decorrido até que a vela vermelha atinja a metade do tamanho da vela amarela, ou seja, queremos encontrar  $t_0$ , tal que:

$$\begin{aligned} V(t_0) &= \frac{1}{2}A(t_0) \Rightarrow L - \frac{L}{4}\left(t_0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(L - \frac{L}{5}t_0\right) \\ &\Rightarrow -\frac{t_0}{4} + \frac{9}{8} = \frac{1}{2} - \frac{t_0}{10} \\ &\Rightarrow \frac{3t_0}{20} = \frac{5}{8} \Rightarrow t_0 = \frac{25}{6} \text{ h} = 4 \text{ h } 10 \text{ min.} \end{aligned}$$

Portanto, como a primeira vela foi acesa ao meio dia, isto é, às 12h, então a vela vermelha ficará com a metade do tamanho da vela amarela exatamente às 16h 10min.

## Exercícios

- 5) Construa o gráfico do tamanho das velas em função do tempo.
- 6) Calcule a hora na qual as duas velas terão, de novo, o mesmo tamanho.

**Exemplo 2.4.** Duas torneiras, juntas, enchem um tanque em uma hora. Se a primeira torneira encher sozinha metade do tanque e a segunda encher sozinha a outra metade, então o tempo total passa a ser de três horas. Quanto tempo cada torneira sozinha leva para encher todo o tanque?

### Resolução:

Nesse problema, o que vai fazer o papel de velocidade, ou taxa de variação, será desempenhado pela vazão das torneiras, que é a razão entre o volume escoado e o tempo decorrido para o escoamento. Vamos, novamente, supor que as vazões das torneiras sejam constantes. Denominemos  $V_1$  a vazão da primeira torneira e  $V_2$  a vazão da segunda torneira. Quando ambas estão abertas, a vazão total é a soma das vazões individuais,  $V_1 + V_2$ . Nesse caso, sabemos que o tempo total para o enchimento é de uma hora. Assim, podemos escrever o volume de água no tanque em função do tempo como:

$$v(t) = (V_1 + V_2)t,$$

no qual  $v(1) = 1$ . Por outro lado, se a primeira fica ligada por um tempo  $T_1$ , enchendo a metade do tanque, podemos ter uma segunda função que descreve o volume de água no tanque em função do tempo:

$$\tilde{v}(t) = V_1 t,$$

com a informação adicional que  $\tilde{v}(T_1) = \frac{1}{2}$ . Note que o tempo necessário para que a primeira torneira encha inteiramente o tanque é igual a  $2T_1$ . Assim, obtemos uma primeira equação:

$$V_1 T_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{2T_1}.$$

A outra metade do tanque é completada pela segunda torneira, durante um tempo  $T_2$ . Sabemos ainda que a soma dos dois tempos é igual a três horas, assim,  $T_2 = 3 - T_1$ . Dessa forma, temos uma terceira função, a qual descreve o volume de água no tanque em função do tempo:

$$\hat{v}(t) = \frac{1}{2} + V_2 t,$$

para a qual, temos a informação  $\hat{v}(T_2) = \hat{v}(3 - T_1) = 1$ . Novamente, é fácil verificar que o tempo total para que a segunda torneira encha sozinha o tanque é igual a  $2T_2$ . Assim, obtemos uma segunda equação:

$$\frac{1}{2} + V_2(3 - T_1) = 1 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{2(3 - T_1)},$$

Considerando o fato que  $(V_1 + V_2) = 1$ , podemos juntar as duas informações obtidas, na forma:

$$\frac{1}{2T_1} + \frac{1}{2(3 - T_1)} = 1 \Rightarrow 2T_1^2 - 6T_1 + 3 = 0,$$

essa última equação possui como raízes  $3 + \sqrt{3}$  e  $3 - \sqrt{3}$ . Como temos a relação que  $T_1 + T_2 = 3$ , e sendo ambos positivos, somente podemos considerar a solução  $T_1 = 3 - \sqrt{3}$ , o que resulta em  $T_2 = \sqrt{3}$ . Os tempos necessários para que cada torneira encha o tanque são exatamente o dobro dos tempos,  $T_1$  e  $T_2$ , encontrados. Fazendo a aproximação  $\sqrt{3} \approx 1,71$ , temos que, o tempo em **horas**

para que a primeira torneira encha o tanque é necessário, aproximadamente, 2 h 33 min 48 s, enquanto a segunda torneira enche o tanque em 3 h 25 min 12 s.

*Deixamos a seu encargo verificar essas contas. É um bom exercício para transformar unidades, principalmente horas e minutos, que não são subdivididos de forma decimal, mas sexagesimal.*

## Exercícios

- 7) Um tanque é alimentado por uma torneira e possui uma torneira para esvaziá-lo. Quando as duas estão abertas o tanque demora 4 horas para encher. Sabendo que a torneira de saída, quando aberta sozinha, esvazia o tanque em duas horas, calcule quanto tempo leva para a torneira que enche o tanque possa enchê-lo, desde que a torneira de esvaziamento esteja fechada.
- 8) Calcule o tempo gasto por um trem de 150 m de comprimento, a uma velocidade de 60 km/h, para atravessar completamente uma ponte de 200 m de comprimento.
- 9) Calcule o tempo gasto por dois trens, o primeiro com 100 m de comprimento e velocidade de 80 km/h e o segundo, com 120 m de comprimento e vindo em sentido contrário, com velocidade de 60 km/h para passarem inteiramente um pelo outro.
- 10) Um barco desenvolve uma velocidade média de 20 km/h em água parada. Esse barco tem que fazer um percurso de ida e volta entre duas cidades que ficam na margem de um rio e que distam 5 km, sabendo-se que a correnteza do rio é de

aproximadamente 4 km/h ao longo de todo o percurso. Calcule o tempo total levado para o barco fazer esse percurso de ida e volta (Observação: Lembre-se de que em um sentido o barco estará a favor da correnteza e no outro sentido estará contra a correnteza).

- 11) Considere o mesmo barco e o mesmo rio do problema anterior, só que agora o barco tem que cruzar de uma margem até a outra, em uma trajetória que tem que ser perpendicular à correnteza do rio. Sabendo-se que a largura do rio é de 100 m calcule o ângulo em relação à correnteza que o barco deve direcionar a proa para que a travessia seja perpendicular e calcule o tempo de travessia.

## 2.2.2 Funções polinomiais de segundo grau

As funções quadráticas, ou seja, as funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  na forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \neq 0$ , ocorrem na descrição de modelos físicos que possuem segunda variação, isto é, aceleração constante. Também utilizamos funções quadráticas em problemas envolvendo conservação de energia (cinética + potencial). Em problemas de aceleração constante,  $\frac{d^2x}{dt^2} = a = \text{cte}$ , se integramos uma

vez em relação ao tempo, teremos a velocidade em função do tempo:  $\frac{dx}{dt} = v(t) = v_0 + at$ , onde  $v_0$  é o valor inicial da velocidade.

Integrando-se mais uma vez, obtemos a expressão da posição do corpo em movimento em função do tempo:  $x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$ ,

onde  $x_0$  é a posição inicial do objeto. Mas a pergunta natural é: Onde encontrar situações físicas concretas que apresentem regime de aceleração constante? A resposta está no estudo da queda livre de corpos sob a ação do campo gravitacional próximo à superfície da Terra. Por queda livre entenda-se livre de qualquer força de resistência provocada pelo atrito com o ar ou outro meio fluido. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 2.5. (Lei de Torricelli)** Um corpo é solto em queda livre a partir de uma altura  $h$ , sendo  $g$  a aceleração da gravidade próxima à superfície da Terra. Calcule a velocidade com que esse corpo atinge o solo.

### Resolução:

Aqui, é conveniente adotar um sistema de coordenadas de forma que a origem esteja no ponto de soltura do objeto e crescente para baixo, assim, o solo teria coordenada vertical igual a  $h$ , conforme ilustrado na Figura 2.7.

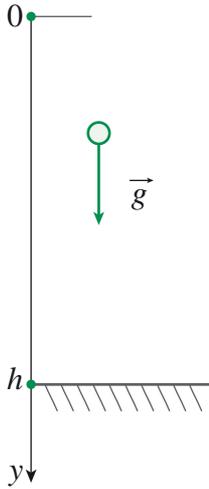


Figura 2.7 - Sistema de coordenadas para descrever a queda livre.

Como a posição inicial é  $y_0 = 0$  e a velocidade inicial é  $v_0 = 0$ , pois o corpo foi solto a partir do repouso, então, a coordenada vertical em função ao tempo é dada por  $y(t) = \frac{1}{2}gt^2$ . Devemos calcular o tempo necessário para que o corpo atinja o chão, isto é, o instante  $T$ , de forma que  $y(T) = h \Rightarrow \frac{1}{2}gT^2 = h \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .

A velocidade do corpo, por sua vez, é dada por  $v(t) = gt$ , assim, a velocidade do corpo quando atinge o solo é igual a:

$$v(T) = gT = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg}.$$

**Exemplo 2.6.** Uma pedra foi lançada, a partir do repouso, dentro de um poço. Após 3s ouve-se o som da pedra atingindo a água. Sabendo-se que a aceleração da gravidade é, aproximadamente,  $10\text{m/s}^2$  e que a velocidade do som é, aproximadamente,  $340\text{m/s}$ , calcule a profundidade do poço.

### Resolução:

Note que esse problema envolve dois tipos diferentes de funções: Primeiramente, temos a queda livre do objeto até o fundo do poço, que deve ser modelado por uma função de segundo grau. Depois, temos a propagação do som do fundo até a boca do poço. O tempo total dos dois eventos é de 3s, dividido em duas partes,  $T_1$  e  $T_2$ . Sendo  $L$  a profundidade do poço. O tempo  $T_1$ , como no problema anterior de queda livre, é o instante em que a função  $y(t) = \frac{1}{2}gt^2$  é igual a  $L$ . Esse resultado já foi obtido no problema anterior:  $T_1 = \sqrt{\frac{2L}{g}}$ , ou ainda, como  $g = 10\text{m/s}^2$ , temos que  $T_1 = \sqrt{\frac{L}{5}}$ . O tempo  $T_2$ , basicamente é o instante em que

a função  $\tilde{y}(t) = L - 340t$  é igual a 0, ou seja,  $T_2 = \frac{L}{340}$ .

Da relação  $T_1 + T_2 = 3$ , obtemos a equação,

$$\frac{L}{5} = \left(3 - \frac{L}{340}\right)^2 \Rightarrow L^2 - 74 \cdot 340L + 9 \cdot 340^2 = 0$$

cujas soluções são:

$$L = 340 \cdot (37 \pm 4\sqrt{85}).$$

É fácil verificar que a solução  $340(37 + 4\sqrt{85})$  daria um tempo, entre a queda da pedra e a propagação do som, muito maior do que os 3s apontados no problema. Assim, a profundidade do poço é  $L = 340 \cdot (37 - 4\sqrt{85}) \approx 41,42 \text{ m}$ .

**Exemplo 2.7.** Um projétil é lançado a partir do solo com velocidade  $v_0$  e com ângulo de inclinação em relação ao solo igual a  $\theta$ . Determine a dependência da altura do projétil a cada instante em relação ao seu deslocamento horizontal em relação ao solo.

**Resolução:**

A Figura 2.8 ilustra o sistema de coordenadas apropriado para o estudo do lançamento do projétil.

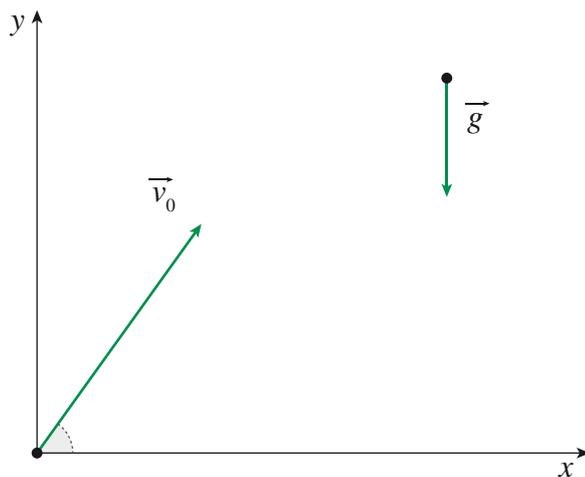


Figura 2.8 - Configuração inicial do lançamento de um projétil.

A posição e a velocidade do objeto, agora, têm que ser vistos como vetores com duas componentes:  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  e  $\vec{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$ . A componente  $v_x$ , é constante ao longo do

movimento, visto que não há a presença de aceleração horizontal no sistema. Assim, como o ângulo entre a velocidade inicial e o eixo horizontal é igual a  $\theta$ , temos que  $v_x(t) = v_0 \cos(\theta)$ , onde  $v_0$  é o módulo do vetor velocidade inicial  $\vec{v}_0$ . Disto, também concluímos que  $x(t) = (v_0 \cos(\theta)) \cdot t$ .

Por outro lado, a componente vertical sofre um movimento de aceleração constante igual a  $-\vec{g}$ , isto porque a aceleração está no sentido oposto à orientação do sistema de coordenadas. Logo, temos que  $v_y(t) = v_0 \sin(\theta) - gt$ , o que nos leva a  $y(t) = (v_0 \sin(\theta))t - \frac{1}{2}gt^2$ . Para explicitarmos a dependência funcional de  $y$  em relação a  $x$ , ao longo da trajetória, basta fazermos a substituição  $t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta)}$  na expressão de  $y(t)$ ,

obtendo, assim  $y(x) = \operatorname{tg}(\theta)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}x^2$ . Dessa forma, comprovamos que a coordenada  $y$  depende quadraticamente da coordenada  $x$ , ou seja, a altura do projétil é uma função quadrática do deslocamento horizontal do mesmo.

**Exemplo 2.8.** Um projétil é lançado a partir do solo com velocidade  $\vec{v}_0$  e com ângulo de inclinação em relação ao solo igual a  $\theta$ . Determine o ângulo de lançamento necessário para que o projétil alcance a maior distância horizontal possível.

**Resolução:**

Do problema anterior, temos que a coordenada  $y$  em função da coordenada  $x$  é dada por  $y(x) = \operatorname{tg}(\theta)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}x^2$ , o problema do alcance consiste, primeiramente, em determinar qual o valor da coordenada  $x$  no momento que o projétil atinge novamente o solo, ou seja, encontrar  $\bar{x} > 0$  tal que  $y(\bar{x}) = 0$ . Substituindo na função, obtemos facilmente  $\bar{x} = \frac{2v_0^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$ . Verificamos que  $\bar{x} = \bar{x}(\theta)$  e que essa função atinge valor máximo quando  $\sin(2\theta) = 1$ , ou seja,  $\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ . Esse é o ângulo de alcance máximo. Nesse caso, o projétil atingirá o solo a uma distân-

cia  $\bar{x} = \frac{v_0^2}{g}$  do ponto do qual foi lançado.

**Exemplo 2.9.** Um projétil é atirado a partir do solo contra um alvo que está a uma altura  $H$  e distância horizontal  $D$ , em relação ao atirador. No momento do tiro, o alvo inicia um movimento de queda livre. (1) Qual a velocidade mínima necessária para que o projétil tenha alguma chance de atingir o alvo? (2) Mostre que, tendo velocidade suficiente, o projétil atingirá o alvo se o atirador estiver mirando exatamente para o alvo de início.

### Resolução:

(1) Certamente, para que o projétil venha a alcançar o alvo, seu alcance horizontal máximo tem que ser maior ou igual à distância

$D$ , assim,  $\bar{x} = \frac{v_0^2}{g} \geq D \Rightarrow v_0 \geq \sqrt{Dg}$ . Logo, a velocidade inicial

tem que ser, em módulo, maior ou igual a  $\sqrt{Dg}$ , para que tenha alguma chance de acertar o alvo. Depois, vamos refinar essa desigualdade, pois a primeira se baseia no alcance máximo, que é obtido com ângulo de lançamento exatamente igual a  $45^\circ$ .

(2) Suponhamos que a velocidade inicial seja grande o suficiente para acertar o alvo. A configuração do problema está ilustrada pela Figura 2.9.

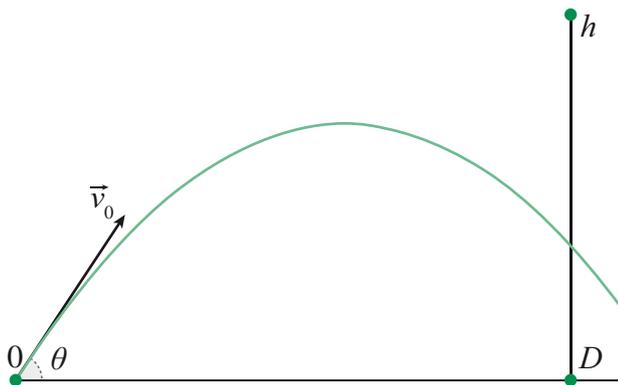


Figura 2.9 - Projétil atirado contra um alvo em queda livre.

Temos que calcular o ângulo entre a velocidade inicial e o eixo horizontal de forma a obtermos um tiro certo. Como  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ , este estará unicamente determinado se conhecermos sua tangente. Primeiramente, sabemos que as coordenadas do projé-

til em função do tempo são dadas como  $x(t) = v_0 \cos(\theta)t$  e  $y(t) = v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$ , enquanto as coordenadas do alvo são  $X(t) = D$  e  $Y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ . Se o projétil acerta o alvo em um instante  $T$ , teremos que  $x(T) = X(T) = D$  e  $y(T) = Y(T)$ . Da primeira igualdade, deduzimos que  $T = \frac{D}{v_0 \cos(\theta)}$ . Da segunda igualdade, temos que:

$$v_0 \sin(\theta)T = h \Rightarrow T = \frac{h}{v_0 \sin(\theta)}.$$

Dessas duas expressões para  $T$ , deduzimos que  $\text{tg}(\theta) = \frac{h}{D}$ , ou seja, no início, o atirador deveria estar apontando para o alvo em sua posição inicial, antes da queda.

*Convença-se disso fazendo um pequeno desenho do triângulo retângulo envolvido.*

Vamos, agora, refinar um pouco mais a estimativa da velocidade mínima para que o atirador consiga acertar o alvo. A condição extrema é que o projétil, com uma velocidade inicial  $v_{0\min}$  atinge o alvo exatamente quando esta chega ao solo, após o movimento de queda livre. Considerando a coordenada  $y$  do projétil como função de  $x$ , dada por  $y(x) = \text{tg}(\theta)x - \frac{g}{2v_{0\min}^2 \cos^2(\theta)}x^2$ , então temos  $y(D) = 0$ . Lembrando que  $\text{tg}(\theta) = \frac{h}{D}$ , e, portanto,

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = \sec^2(\theta) = 1 + \text{tg}^2(\theta) = 1 + \frac{h^2}{D^2}, \text{ temos:}$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{D}D - \frac{g}{2v_{0\min}^2} \left(1 + \frac{h^2}{D^2}\right)D^2 &= 0 \Rightarrow \\ \frac{g}{2v_{0\min}^2} (h^2 + D^2) &= h \Rightarrow \\ v_{0\min} &= \sqrt{\frac{g}{2h} (h^2 + D^2)}. \end{aligned}$$

Qualquer velocidade inicial maior ou igual a  $v_{0\min}$ , com o ângulo de tiro dado por  $\text{tg}(\theta) = \frac{h}{D}$  atingirá o alvo em queda livre.

## Exercícios

- 12) Um jogo consiste em lançar uma bolinha horizontalmente

a partir de uma mesa de 1m de altura com o objetivo de atingir um alvo fixado no chão e a uma distância de 1,5m da borda da mesa. Sabendo-se que a aceleração da gravidade é de aproximadamente  $10\text{m/s}^2$ , calcule a velocidade necessária para o arremesso da bolinha de forma que ela acerte o alvo.

- 13) Calcule a altura máxima atingida por um projétil lançado a partir do solo, com velocidade inicial  $v_0$  e ângulo de disparo  $\theta$ .

## 2.3 O uso de cônicas em física

As secções cônicas, como o próprio nome sugere, são curvas obtidas a partir de um cone seccionado por um plano. As curvas cônicas se dividem em três classes: as elipses, as parábolas e as hipérbolas. Basicamente, esses tipos de curva se diferem pela relação entre o ângulo de inclinação do plano que secciona o cone em relação à base do cone e o ângulo da geratriz do cone, também em relação à base. Se o ângulo de inclinação do plano de secção for menor que o ângulo da geratriz do cone, temos uma elipse. Se o ângulo de inclinação do plano de secção for exatamente igual ao ângulo da geratriz, então temos uma parábola. Finalmente, se o ângulo de inclinação do plano de secção for maior que o ângulo da geratriz, então temos uma hipérbole. Dos três tipos de curvas, as hipérbolas são as únicas que possuem duas componentes conexas, pois o plano que determina uma hipérbole secciona as duas folhas do cone. A Figura 2.10 ilustra os três exemplos de secções cônicas.

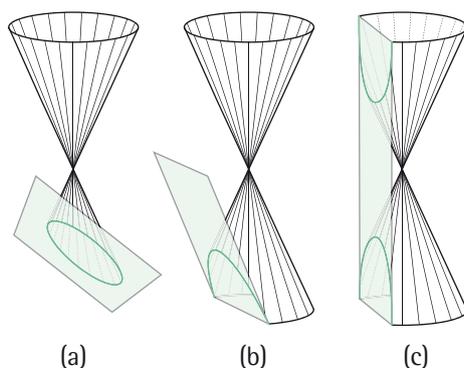


Figura 2.10 - Secções cônicas: (a) Elipse, (b) Parábola, (c) Hipérbole.

Uma forma interessante de visualizar essas curvas é fazer alguns experimentos com uma lanterna de mão. O feixe de luz emitido

pela lanterna se propaga na forma de um cone. Ao projetar o feixe de luz sobre uma superfície plana, obtém-se uma secção cônica, conforme nos ilustra a Figura 2.11.

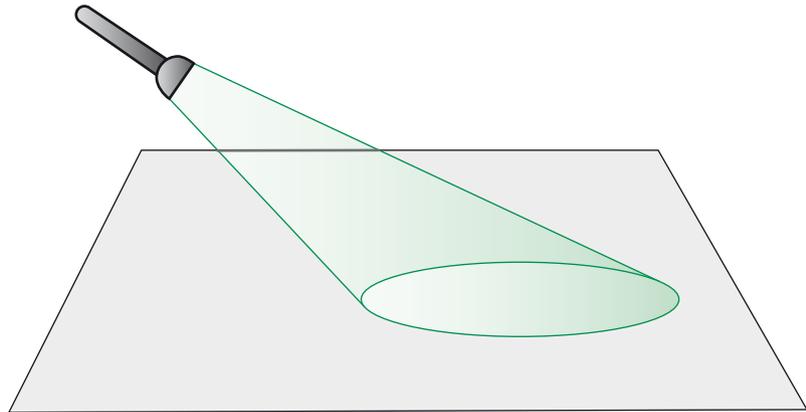


Figura 2.11 - Construção de cônicas com a ajuda de recursos ópticos.

Modificando o ângulo de incidência da luz sobre o plano, você poderá ver as três curvas sendo formadas. Você deve revisar seu livro de Geometria Analítica, para ver as propriedades geométricas das cônicas. Em um curso normal de geometria analítica, as propriedades geométricas das cônicas são, em geral, apresentadas sem fazer referência a como essas propriedades se manifestam no cone. As definições das três cônicas, conforme vistas no livro de Geometria Analítica são:

---

**E**lipse: É o lugar geométrico dos pontos no plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (que são chamados focos) é constante.

**P**arábola: É o lugar geométrico dos pontos no plano cuja distância a um ponto fixo (o foco) é igual à distância a uma reta fixada (a diretriz).

**H**ipérbole: É o lugar geométrico dos pontos no plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos (os focos) é constante.

---

A partir dessas propriedades, pode-se facilmente deduzir as equações das três curvas no plano cartesiano. No entanto, essas propriedades geométricas são consequências do fato de que as

curvas são secções cônicas. A beleza da inter-relação existente entre as propriedades das cônicas vistas como secções e estas mesmas curvas vistas como lugares geométricos do plano dificilmente é mostrada, tanto no ensino médio quanto no ensino superior. As propriedades das cônicas são demonstradas com o auxílio de esferas inscritas no cone que tangenciam o plano que contém a curva. Essas esferas são conhecidas como esferas de [Dandelin](#).

No apêndice deste capítulo, mostraremos uma propriedade geométrica das cônicas que nos permitirá escrever a equação polar de uma cônica; equação que nos será útil no capítulo seguinte. Aconselhamos você a visitar os sites:

- <http://www.cut-the-knot.org/proofs/conics.shtml>
- <http://www.clowder.net/hop/Dandelin/Dandelin.html>
- <http://mathworld.wolfram.com/DandelinSpheres.html>

Nesta seção, mostraremos alguns exemplos de sistemas físicos nos quais as cônicas aparecem naturalmente como os objetos matemáticos apropriados para a modelagem. Iniciaremos com dois exemplos do uso de parábolas. Um oriundo da mecânica clássica e outro da ótica geométrica. Após, estudaremos brevemente um exemplo de uso de elipses em ótica e acústica e também um exemplo de aparição de hipérbolas, também em acústica. No capítulo seguinte, veremos um exemplo onde as cônicas aparecem em mecânica clássica para descreverem as órbitas de corpos celestes que se movem sob a atração gravitacional de outros corpos.

### 2.3.1 Parábolas

As parábolas são, depois de retas e circunferências, as curvas mais conhecidas pelos estudantes, desde o ensino básico. Isto se deve principalmente pelo fato de que os gráficos de funções quadráticas são parábolas. Este fato matemático é apresentado de forma despretensiosa, sem qualquer justificação. Afinal, não é imediato verificar que o gráfico de uma função quadrática real possua qualquer relação com uma curva que é produzida por uma secção de um cone por um plano paralelo a sua geratriz. Portanto, em primeiro lugar, devemos fazer a verificação definitiva de que todo gráfico de uma função quadrática de uma variável é, de fato,

*Em referência ao Matemático Francês, naturalizado Belga, Germinal Pierre Dandelin (1794-1847). Além de resultados em geometria das cônicas, inclusive com a invenção das esferas que levam seu nome, Dandelin também tem contribuições em métodos numéricos de soluções de equações algébricas e na teoria de probabilidades.*

uma parábola. Iniciemos com a verificação da recíproca, isto é, dados o foco e a diretriz de uma parábola. Existe um sistema de coordenadas apropriado a essa configuração, no qual a parábola descreve o gráfico de uma função de uma função quadrática.

Considere a reta perpendicular à diretriz da parábola que passa pelo foco. Essa reta será o eixo de simetria da parábola. Devido à propriedade definidora da parábola, o vértice da parábola será o ponto médio entre o ponto de cruzamento do eixo de simetria com a diretriz e o foco da parábola. Vamos escolher os eixos coordenados como a reta perpendicular ao eixo de simetria passando pelo vértice da parábola como o eixo  $x$ , e o eixo de simetria como o eixo  $y$ . Nesse sistema de coordenadas, o foco será o ponto  $F = (0, A)$  e a diretriz será a reta  $r$ , dada pela equação  $y = -A$ , conforme nos ilustra a Figura 2.12.

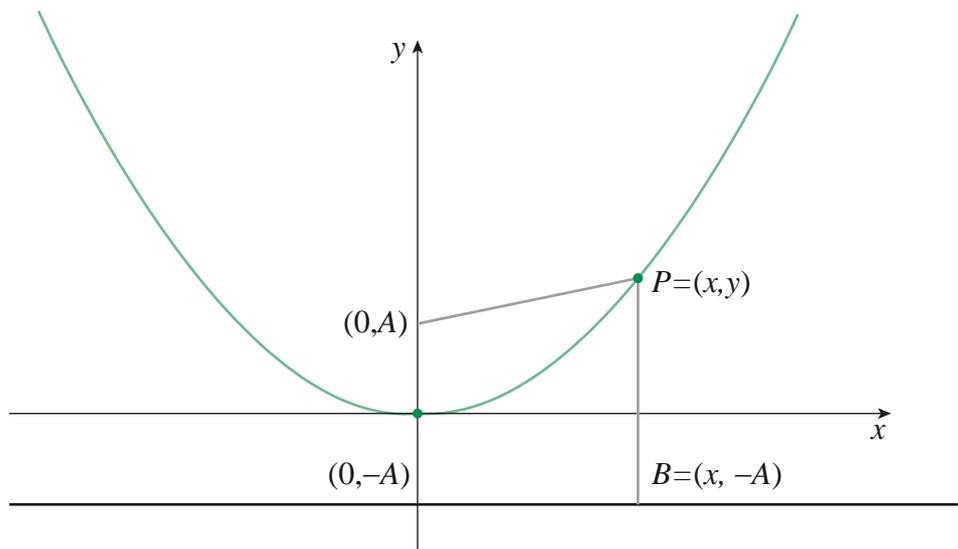


Figura 2.12 - Configuração de coordenadas associada a uma parábola, dados seu foco e diretriz.

Seja  $P = (x, y)$  um ponto da parábola. Pela propriedade definidora da parábola, temos a equação:  $d(P, F) = d(P, r)$ , isto é, a distância do ponto  $P$  ao foco  $F$  da parábola é igual à distância do mesmo ponto  $P$  à reta diretriz. Essa equação, em coordenadas, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + (y - A)^2} &= |y + A| \Rightarrow x^2 + (y - A)^2 = (y + A)^2 \\ \Rightarrow 4Ay &= x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{4A}x^2. \end{aligned}$$

Portanto, essa curva é o gráfico da função  $f(x) = \frac{1}{4A}x^2$ . Mais geralmente, se tivermos o gráfico de uma função quadrática  $f_0(x) = ax^2$ , esse gráfico será uma parábola cujo vértice está no ponto  $(0,0)$ , o foco se encontra no ponto  $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$  e a diretriz é a reta  $y = -\frac{1}{4a}$ . Note que o vértice da parábola é o ponto em que a função  $f_0$  se anula. Note, também, que se tivéssemos escolhido  $A < 0$ , então a parábola estaria com sua concavidade para baixo.

Vejamos, agora, o gráfico de uma função quadrática geral:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = \\ &= f_0\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Essa função nada mais é do que uma translação horizontal e a translação vertical da função  $f_0$ , portanto, seu gráfico também será uma parábola, resta-nos descobrir seu foco e diretriz. Como dissemos anteriormente, o vértice da parábola é o ponto em que a função  $f_0$  se anula, assim, o **vértice** da parábola terá

as coordenadas  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ . Uma vez encontrado o vértice,

o foco e a diretriz podem ser facilmente obtidos, conforme a discussão feita para a função  $f_0$ , sendo assim, o foco será o ponto

$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$  e a diretriz será a reta  $d$ , dada pela equação  $y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$ , conforme ilustrado na Figura 2.13.

O vértice da parábola que descreve o gráfico da função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  pode ser facilmente obtido através do cálculo diferencial, pois o vértice é um ponto de máximo ou de mínimo da função (dependendo do sinal do coeficiente do termo quadrático,  $a$ ). Sendo um ponto de máximo ou de mínimo da função, então a derivada da função se anula nesse ponto. Portanto  $f'(x) = 2ax + b$  é igual a zero no vértice. Disso deduzimos facilmente que a coordenada  $x$  do vértice será  $x_v = -\frac{b}{2a}$ . Substituindo o valor de  $x_v$  na função  $f$  teremos  $y_v = f(x_v) = \frac{4ac - b^2}{4a}$ . No texto evitamos utilizar os recursos do cálculo diferencial para que você possa utilizar estas deduções em sua prática de sala de aula, nos ensinamentos fundamental e médio.

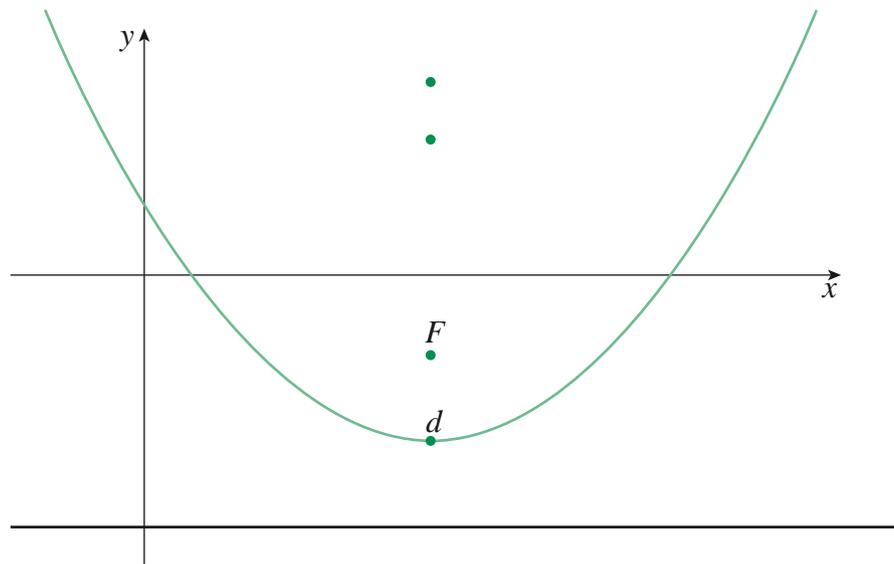


Figura 2.13 - Gráfico de uma função quadrática geral como uma parábola.

Uma vez tendo deduzido que o gráfico de uma função quadrática é sempre dado por uma parábola, temos que a trajetória de um projétil lançado obliquamente sujeito à atração gravitacional próximo à superfície da Terra é uma parábola. Isto porque, como feito no exemplo 2.7, a coordenada  $y$  da trajetória, que representava a altura do projétil em relação ao solo, tinha uma dependência funcional em relação à coordenada  $x$ , que representava o deslocamento horizontal do projétil, dada por  $y(x) = \text{tg}(\theta)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}x^2$ .

Como nesse caso, o coeficiente do termo quadrático da função é negativo, portanto a parábola que descreve a trajetória do projétil tem a concavidade voltada para baixo, como era de se esperar, tendo em vista a configuração do sistema físico.

Há, ainda no contexto de lançamento oblíquo, outro uso interessante de parábolas. As parábolas de segurança. O problema é o seguinte: imagine que se queira atravessar um avião com segurança através de um território em guerra e que possui no solo muitas baterias antiaéreas. Pois bem, a ideia é delimitar a região de alcance de um canhão antiaéreo, além do qual, nenhuma ameaça existiria. Considere um canhão localizado na origem do sistema de coordenadas do plano. Seja  $v_0$  a velocidade inicial dos projéteis disparados pelo canhão. Sabemos que se o lançamento for vertical, a altura máxima que o projétil pode atingir é  $h = \frac{v_0^2}{2g}$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade.

## Exercício

14) Verifique que esta é, realmente, a altura máxima.

Por outro lado, sabemos pelo exemplo 2.8 que o alcance horizontal máximo do projétil é obtido quando o ângulo de lançamento é exatamente igual a  $\frac{\pi}{4}$ . Nesse caso, o alcance horizontal máximo é igual a  $\frac{v_0^2}{g}$ . Como queremos uma curva limítrofe, isto é, uma curva que tangencie todas as trajetórias dos projéteis lançados a partir da origem e que delimite o plano em duas regiões disjuntas, de forma que dado um ponto em uma delas sempre exista algum tiro que possa atingir aquele ponto, enquanto qualquer ponto na outra região nunca seja atingido por qualquer tiro, a partir daquele canhão na origem. A Figura 2.14 ilustra esta situação.

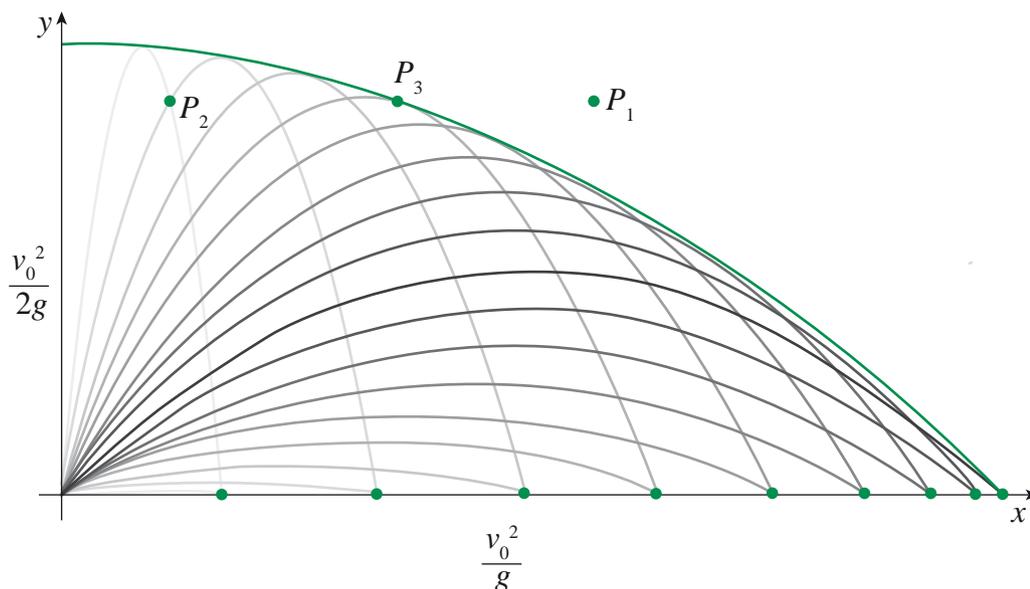


Figura 2.14 - Curva que delimita a zona de alcance de um canhão localizado na origem e cuja velocidade de disparo é igual a  $v_0$ . Note que a região do ponto  $P_1$  nunca é atingida por qualquer disparo, já os pontos na região de  $P_2$  sempre podem ser atingidos por mais de um (como veremos, exatamente dois) disparo a partir do canhão. Os pontos da curva somente podem ser atingidos por uma única trajetória de projétil. A que tangencia a curva.

Esse tipo de curva é denominado envoltória de uma família de curvas. Os métodos de obtenção direta de envoltórias envolvem a resolução de equações diferenciais, portanto está fora do propósito desse capítulo, que é o de utilizar apenas ferramentas de matemática elementar para a modelagem de sistemas físicos. Vamos propor uma curva que seja candidata à solução do problema

e depois, por verificação direta, veremos que esta curva possui as propriedades necessárias para esta envoltória.

**Proposição 2.1.** A parábola  $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$  é a envoltória das trajetórias dos projéteis (esta curva é denominada parábola de segurança) disparados a partir da origem com velocidade inicial  $v_0$ .

### Demonstração:

Primeiramente, vejamos qual a origem da equação desta parábola: Basicamente, o que queremos é uma parábola que tenha o vértice no ponto com coordenadas  $\left(0, \frac{v_0^2}{2g}\right)$  e que as raízes da função da qual a parábola é o gráfico sejam localizadas em  $x = \frac{v_0^2}{g}$  e  $x = -\frac{v_0^2}{g}$ . Então, teremos a equação da parábola dada por:

$$y = a \left( x - \frac{v_0^2}{g} \right) \left( x + \frac{v_0^2}{g} \right) = ax^2 - \frac{av_0^4}{g^2}.$$

Como o ponto  $\left(0, \frac{v_0^2}{2g}\right)$  faz parte da curva, então deduzimos facilmente que  $a = -\frac{g}{2v_0^2}$ , o que nos dá a equação da curva  $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2$ . Agora, verificamos que esta curva realmente é a envolvente da família de trajetórias dadas por  $y(x) = \operatorname{tg}(\theta)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}x^2$ . Essa equação ainda pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{2v_0^2 y}{gx^2} &= \operatorname{tg}(\theta) \frac{2v_0^2}{gx} - \sec^2(\theta) \Rightarrow \\ \operatorname{tg}(\theta)^2 - \operatorname{tg}(\theta) \frac{2v_0^2}{gx} + \left(1 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

A partir dessa equação, dado um ponto  $(x, y)$  no plano, vamos tentar calcular quais são os ângulos de disparo  $\theta$ , de tal forma que um projétil lançado a partir da origem, com velocidade inicial  $v_0$  e com esse ângulo possa atingir este ponto. Uma equação de segundo grau pode ter duas soluções, uma solução ou nenhuma solução, dependendo do valor do discriminante:

$$\Delta = \frac{4v_0^4}{g^2 x^2} - 4 \left( 1 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2} \right).$$

A equação possuirá exatamente uma solução quando  $\Delta = 0$ . Após uma simples manipulação algébrica, chegamos a  $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2$ , a qual é a equação da parábola de segurança. A equação não possui solução quando  $\Delta < 0$ , que equivale a  $y > \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2$ , ou seja, para pontos no plano que estão acima da parábola de segurança. Finalmente, a equação possui exatamente duas soluções quando  $\Delta > 0$ , isto equivale a  $y < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2$ , o que significa pontos no plano que estão abaixo da parábola de segurança. Portanto, a parábola de segurança é a envolvente da família de trajetórias.

■

Ainda há um surpreendente fato envolvendo os lançamentos balísticos. O lugar geométrico das alturas máximas de disparos a partir da origem, com a mesma velocidade inicial consiste de uma elipse. Isso será visto mais adiante, quando estivermos tratando desse tipo de curva em particular.

Parábolas também são muito utilizadas na manufatura de aparelhos óticos e de antenas de transmissão e captação de ondas eletromagnéticas. Isso se deve a uma importante propriedade ótica das parábolas: Os raios de luz que incidem sobre um espelho parabólico paralelamente ao seu eixo de simetria convergem para o foco da mesma. De igual modo, os raios de luz emitidos a partir do foco de uma parábola, quando refletidos sobre a curva, se propagam paralelamente ao eixo de simetria da parábola. Essa propriedade é ilustrada na Figura 2.15.

A demonstração desta propriedade das parábolas pode ser feita tão somente com o uso de matemática elementar: Considere uma parábola com foco no ponto  $F$ , diretriz dada pela reta  $d$  e eixo de simetria dado pela reta  $r$ , conforme ilustrado na Figura 2.16.

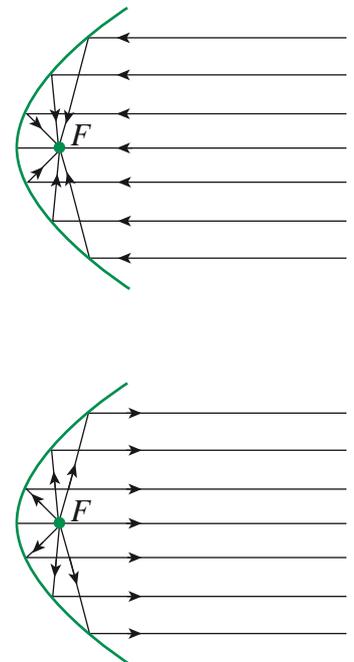


Figura 2.15 - Propriedades óticas da parábola.

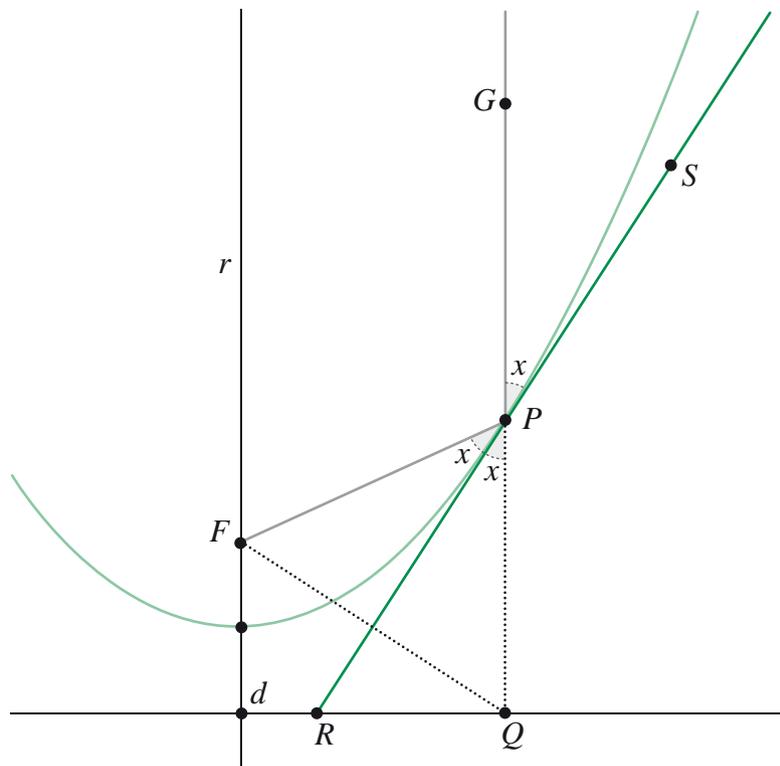


Figura 2.16 - Demonstração da propriedade óptica da parábola.

Seja um ponto  $P$  sobre esta parábola,  $\overline{PF}$  o segmento ligando este ponto ao foco e  $\overline{PQ}$  a reta perpendicular à diretriz passando pelo ponto  $P$ . Da propriedade definidora da parábola, temos que  $\overline{PF} \equiv \overline{PQ}$ , ou seja, o triângulo  $\Delta PQF$  é um triângulo isósceles. Seja  $\overline{PR}$  a reta tangente à parábola no ponto  $P$ . Se mostrarmos que esta reta é bissetriz do ângulo  $\angle FPQ$ , a propriedade estará demonstrada, pois  $\angle FPR \equiv \angle RPQ$  devido ao fato de  $\overline{PR}$  ser bissetriz do ângulo  $\angle FPQ$ . Também temos que  $\angle SPG \equiv \angle RPQ$ , pois são ângulos opostos pelo vértice. Assim,  $\angle FPR \equiv \angle SPG$ , o que significa que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão, ou seja, um raio paralelo ao eixo de simetria quando refletido na parábola (isto é, sobre a reta tangente à parábola no ponto de incidência) passa pelo foco da parábola. Portanto, vamos verificar essa propriedade da tangente à parábola em um ponto.

**Proposição 2.2.** A reta tangente a uma parábola em um ponto  $P$  é a bissetriz do ângulo determinado pela reta que une  $P$  ao foco e pela reta, perpendicular à diretriz que passa por  $P$ .

## Demonstração:

Primeiramente, considere a parábola como tendo a equação  $y = ax^2 + bx + c$ , sem perda de generalidade, podemos tomar  $a > 0$  em toda a demonstração, e sejam as coordenadas do ponto  $P$  dadas por  $(x_0, y_0)$ , também estamos considerando que  $P$  não é o vértice da parábola. Vamos verificar que a reta tangente à parábola por  $P$  tem equação  $y = y_0 + (2ax_0 + b)(x - x_0)$ . Para fazermos isso, basta provarmos que todos os pontos da parábola, exceto  $P$ , não estão sobre a reta e se encontram em um mesmo semiplano gerado por essa reta. No caso de  $a > 0$ , vamos ver que um ponto da parábola com a mesma coordenada  $x$  que um ponto da reta possui sua coordenada  $y$  maior que a do ponto correspondente na reta. Façamos a diferença:

$$\begin{aligned}y_{\text{parábola}} - y_{\text{reta}} &= ax^2 + bx + c - y_0 - (2ax_0 + b)(x - x_0) = \\ &= ax^2 + c - y_0 - 2axx_0 + 2ax_0^2 + bx_0 = \\ &= a(x - x_0)^2 - y_0 + ax_0^2 + bx_0 + c = \\ &= a(x - x_0)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Note que a última igualdade acima foi obtida devido ao fato de que o ponto  $P = (x_0, y_0)$  faz parte da parábola. Note também que essa diferença é estritamente maior que 0 para qualquer ponto diferente de  $P = (x_0, y_0)$ , que é o único ponto onde a reta e a parábola coincidem.

Como dissemos, o triângulo  $\Delta PQR$  é isósceles, portanto, se mostrarmos que a reta  $\overline{PR}$  é perpendicular à reta  $\overline{FQ}$ , mostraremos que  $\overline{PR}$  é bissetriz, pois conterá a altura do triângulo  $\Delta PQR$ , e como sabemos, em um triângulo isósceles, a altura referente à base coincide com a bissetriz do ângulo oposto à base. O segundo fato que devemos lembrar (reveja o livro de Geometria Analítica) é que se duas retas  $y = mx + n$  e  $y = px + q$ , com  $m \neq 0$  e  $p \neq 0$  são perpendiculares, então  $m = -\frac{1}{p}$ . Portanto, basta calcular o coeficiente angular da reta  $\overline{FQ}$ . Já vimos que as coordenadas do foco são dadas por  $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$  e o ponto  $Q$ , que é o pé da perpendicular à diretriz que passa pelo ponto  $P = (x_0, y_0)$ , tem como coordenadas  $Q = \left(x_0, \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}\right)$ . Assim, o coeficien-

*Isto facilmente é deduzido utilizando o cálculo diferencial. Como nesse capítulo queremos apenas utilizar matemática elementar, temos que propor uma reta candidata a reta tangente e depois provar que ela é de fato tangente. De qualquer forma, você pode introduzir o estudo da tangente à uma parábola no ensino médio fazendo os estudantes calcularem as equações de retas secantes à parábola passando pelo ponto dado e por um ponto bem próximo. Depois é só apelar para a intuição dos estudantes para fazerem o segundo ponto se aproximar do primeiro e verificar o que isso altera na equação da secante. Os estudantes chegarão sozinhos na equação da tangente quando os dois pontos forem iguais.*

te angular da reta  $\overrightarrow{FQ}$  é dado por:

$$m = \frac{y_F - y_Q}{x_F - x_Q} = \frac{\frac{4ac - b^2 + 1}{4a} - \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}}{-\frac{b}{2a} - x_0} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2a}}{-\frac{2ax_0 + b}{2a}} = -\frac{1}{2ax_0 + b}.$$

Portanto  $\overrightarrow{FQ} \perp \overrightarrow{PR}$ , o que implica que  $\overrightarrow{PR}$  é bissetriz, resultando finalmente na propriedade de reflexão da parábola. ■

### 2.3.2 Elipses

Elipses, como vimos anteriormente, são secções cônicas obtidas quando o plano de secção intersecta o cone segundo um ângulo com o plano da base menor que o ângulo que a geratriz do cone faz com a base. Também podemos definir elipse como o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (chamados focos) é constante. A equivalência entre essas duas definições, aparentemente sem qualquer relação, pode ser demonstrada utilizando-se as esferas de Dandelin. Podemos, ainda, traduzir essa propriedade de soma das distâncias em termos analíticos, de modo a obtermos a [equação da elipse](#). Na configuração padrão da elipse no plano cartesiano, com os eixos principais paralelos aos eixos coordenados e cujo centro se localiza em um ponto  $(x_0, y_0)$  do plano, conforme descrito na Figura 2.17, temos que a equação da elipse é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

*Veja em seu livro de Geometria Analítica os detalhes dessa demonstração.*

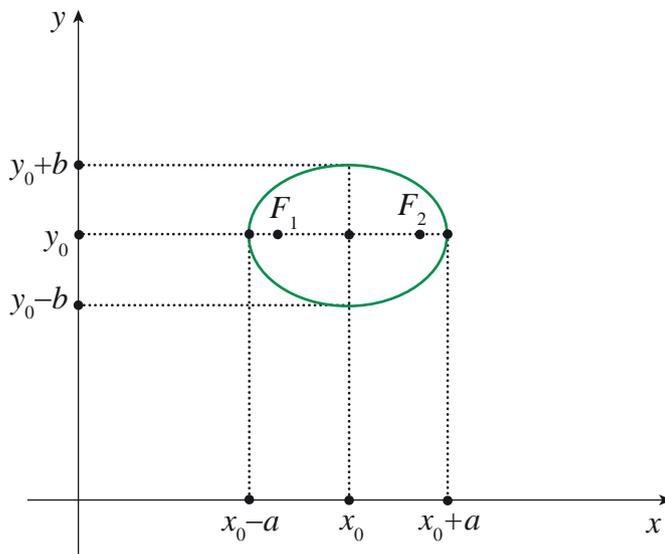


Figura 2.17 - Configuração padrão de uma elipse no plano cartesiano.

Vamos mostrar nesta subseção uma curiosa aparição de elipses ainda na modelagem de lançamentos balísticos, já discutidos amplamente na subseção anterior. Vimos que as coordenadas de um corpo atirado a partir do solo, com velocidade inicial  $v_0$  e segundo um ângulo de disparo igual a  $\theta$ , são dadas em função do tempo

como  $x(t) = v_0 \cos(\theta)t$  e  $y(t) = v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$ . Com isso, podemos

calcular as coordenadas do ponto de maior altura que o corpo pode atingir (o vértice da parábola que descreve a trajetória). O instante em que o corpo passa pela altura máxima é exatamente o instante onde a velocidade vertical,  $v_y = v_0 \sin(\theta) - gt$ , se anula,

ou seja,  $t_{\max} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g}$ . Substituindo o valor de  $t_{\max}$  nas funções

$x(t)$  e  $y(t)$ , obtemos as coordenadas do vértice da parábola que descreve a trajetória do corpo em movimento:

$$x_V = x(t_{\max}) = \frac{v_0^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{2g},$$

$$y_V = y(t_{\max}) = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{g} = \frac{v_0^2 (1 - \cos(2\theta))}{4g}.$$

É fácil ver que as coordenadas  $(x_V, y_V)$  desse ponto satisfazem à relação:

$$\frac{x_V^2}{4} + \left( y_V - \frac{v_0^2}{4g} \right)^2 = \frac{v_0^4}{16g^2},$$

ou ainda, fazendo  $b = \frac{v_0^2}{4g}$ , obtemos  $\frac{x_v^2}{4b^2} + \frac{(y_v - b)^2}{b^2} = 1$ , que é a equação de uma elipse, conforme ilustrada na Figura 2.18.

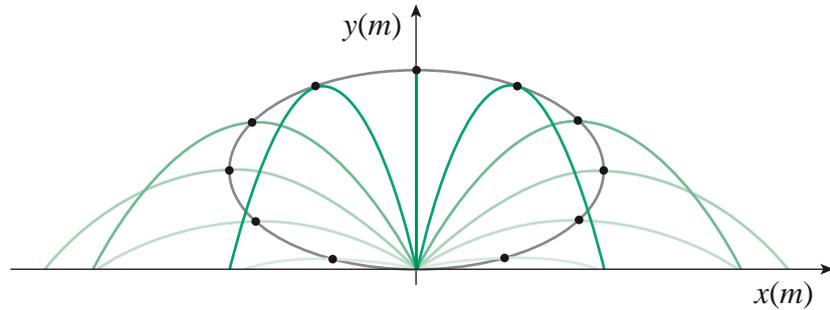


Figura 2.18 - Elipse formada pelos pontos de altura máxima das trajetórias de lançamento a partir da origem com velocidade  $v_0$ .

Elipses também apresentam uma propriedade óptica peculiar: Qualquer raio de luz, emitido a partir de um dos focos, após ser refletido sobre a elipse, passará pelo outro foco. Para demonstrarmos esse fato, vamos precisar de um pouco de cálculo, afinal, quando falamos em reflexão sobre a elipse, estamos nos referindo à reflexão com respeito à reta tangente à curva no ponto de incidência, conforme ilustrado na Figura 2.19.

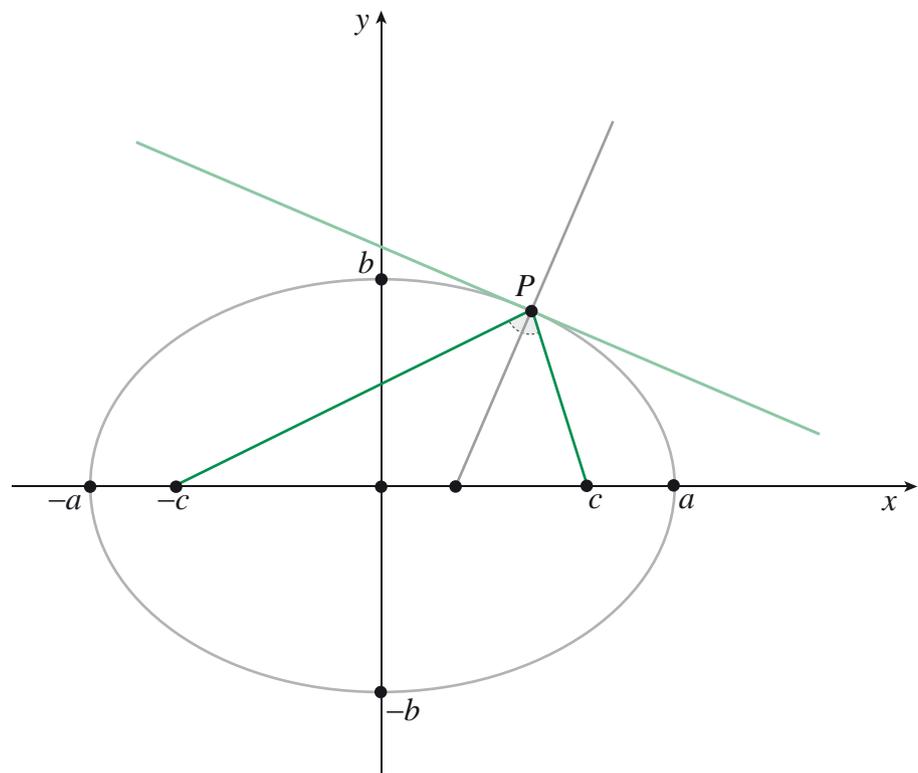


Figura 2.19 - Propriedade óptica da elipse.

Sem perda de generalidade, suponhamos que o centro da elipse seja a origem do sistema de coordenadas. Assim, a equação da elipse se escreve na forma simplificada como  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Os focos da elipse, nesse caso, se localizam nos pontos  $(c, 0)$  e  $(-c, 0)$ , onde  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ , e também, a soma das distâncias de qualquer ponto da elipse até os focos é igual a  $2a$ . Considere agora um ponto arbitrário da elipse,  $P = (x_0, y_0)$ . Vamos demonstrar este resultado por um método totalmente elementar: Esta demonstração se baseia no princípio que diz que a luz sempre se propaga pelo caminho mais curto entre dois pontos. Com esse princípio em mente, vamos determinar a trajetória da luz de um ponto  $A$  até um ponto  $B$ , refletindo sobre uma superfície refletora. Sem perda de generalidade, podemos considerar somente uma reta  $r$  no mesmo plano que a reta  $\overline{AB}$ , conforme ilustrado na Figura 2.20.

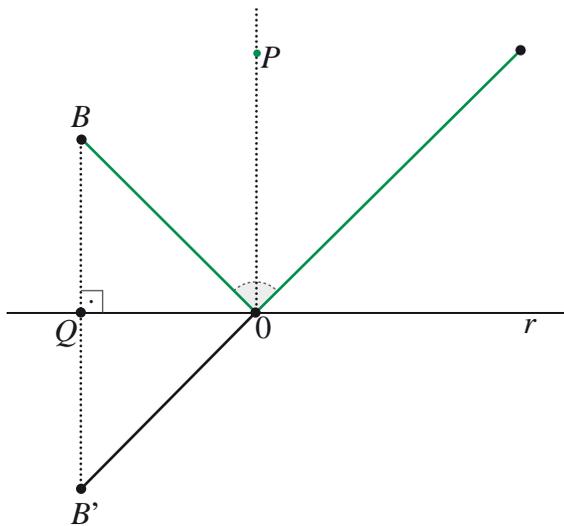


Figura 2.20 - Trajetória de um raio de luz entre dois pontos através de uma reflexão.

Para encontrarmos o ponto onde a luz incide sobre  $r$ , basta considerarmos o ponto  $B'$ , simétrico ao ponto  $B$  em relação à reta  $r$ . O segmento  $\overline{AB'}$  é o caminho mais curto entre os dois pontos. Esse segmento intersecta a reta  $r$  no ponto  $O$ . Vamos mostrar que a trajetória  $A, O, B$  é a trajetória mais curta entre os pontos  $A$  e  $B$  passando por  $r$ . Primeiramente, note que os triângulos retângulos  $\Delta OQB$  e  $\Delta OQB'$  são congruentes pelo caso LAL, pois  $\overline{OQ}$  é um lado comum,  $\overline{QB} \equiv \overline{QB'}$  e  $\angle OQB \equiv \angle OQB'$ , portanto,  $\overline{OB} \equiv \overline{OB'}$ , o que implica que o comprimento da trajetória  $A, O, B$  é igual ao comprimento do segmento  $\overline{AB'}$ , que é o caminho mais

curto entre estes dois pontos. Para qualquer outro ponto  $O' \in r$ , o comprimento da trajetória  $A, O', B$ , pelo mesmo raciocínio de congruência de triângulos utilizado anteriormente, seria igual ao comprimento da trajetória  $A, O', B' = AO' + O'B' > AB'$ , conforme ilustrado na Figura 2.21.

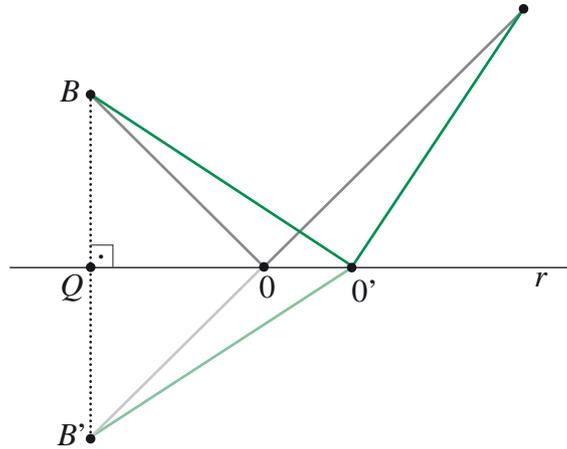


Figura 2.21. Trajetória mais curta entre dois pontos envolvendo uma reflexão.

Uma consequência imediata de a reflexão ser dada exatamente pela trajetória  $A, O, B$  é que o ângulo entre o raio incidente e a reta normal à superfície refletora no ponto de incidência é igual ao ângulo entre o raio refletido e a mesma reta normal. Verificando, de novo, na Figura 2.20, temos que a reta  $\overline{OP}$  é perpendicular à reta  $r$  pelo ponto  $O$ . O que queremos dizer é que  $\angle AOP \equiv \angle BOP$ , isto se dá pois, considerando um ponto  $R \in r$  tal que  $O$  fique entre  $Q$  e  $R$ , temos que  $\angle AOR \equiv \angle B'OQ$ , pois são opostos pelo vértice. Por outro lado, temos que  $\angle B'OQ \equiv \angle BOQ$ , pois  $\overline{OQ}$  está contido na bissetriz do ângulo  $\angle B'OB$  do triângulo isósceles  $\triangle B'OB$ . Portanto,  $\angle AOR \equiv \angle BOQ$ . Finalmente, temos que  $\angle AOR$  é ângulo complementar a  $\angle AOP$  (isto é, sua soma é igual a um ângulo reto) e também  $\angle BOQ$  é complementar a  $\angle BOP$ . Como complementos de ângulos congruentes são congruentes, então temos nosso resultado, ou seja,  $\angle AOP \equiv \angle BOP$ .

Voltando à elipse, considere a reta  $r$ , tangente à elipse pelo ponto  $P$ . Vamos determinar qual a trajetória de um raio de luz entre os focos  $F_1$  e  $F_2$ , refletido sobre a reta  $r$ . Suponha que essa reflexão ocorra em um ponto  $P' \in r$  diferente do ponto de tangência. Como  $r$  é tangente à elipse no ponto  $P$ , qualquer outro ponto dessa reta se localizará na região exterior à região delimitada pela

elipse. Consideremos a elipse com os mesmos focos,  $F_1$  e  $F_2$ , que passa pelo ponto  $P'$ , conforme ilustrado na Figura 2.22.

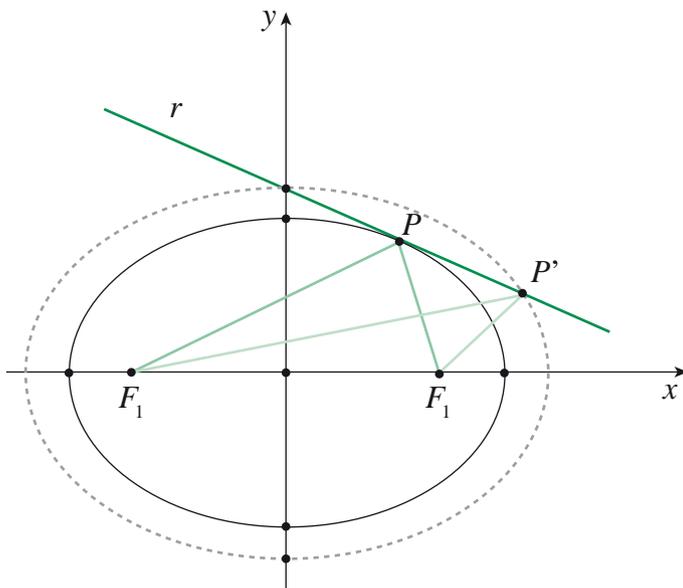


Figura 2.22 - Reflexão de um raio de luz sobre a reta tangente a um ponto da elipse.

Como  $P'$  está sobre uma elipse maior, mas com os mesmos focos que a elipse original, podemos concluir que  $P'F_1 + P'F_2 > PF_1 + PF_2$ , assim, o ponto sobre a reta tangente que minimiza o comprimento da trajetória de reflexão do raio de luz entre os pontos  $F_1$  e  $F_2$  é exatamente o ponto de tangência, que está sobre a elipse original. Essa propriedade de reflexão exibida pelas elipses também é válida se, no lugar da trajetória da luz, fosse considerada a trajetória do som. Essa propriedade “acústica” da elipse inspirou muitos arquitetos a construírem edifícios com características muito peculiares do ponto de vista acústico.

O salão oval da Casa Branca, em Washington DC, nos Estados Unidos, possui essa característica.

O último exemplo da ocorrência de elipses na modelagem matemática de fenômenos físicos que vamos mencionar é o das órbitas planetárias. O astrônomo alemão Johannes Kepler, no século XVII, utilizou dados observacionais obtidos ao longo de décadas por seu mestre, o astrônomo Tycho Brahe, para chegar à conclusão de que os planetas do sistema solar se moviam sob órbitas elípticas ao redor do Sol, sendo que o Sol ocupava um dos focos

da elipse. Essa conclusão é conhecida como primeira lei de Kepler e é uma lei empírica, isto é, baseada na análise de dados experimentais e fruto de um exercício numérico longo e trabalhoso. A explicação teórica de porque as órbitas planetárias possuíam o formato de uma elipse somente foi possível com a lei da gravitação universal, desenvolvida pelo matemático e físico inglês Sir Isaac Newton. A discussão detalhada da obtenção das órbitas planetárias, por meio da resolução de uma equação diferencial, será feita no próximo capítulo.

### 2.3.3 Hipérbolas

O terceiro exemplo de secções cônicas constitui-se das hipérbolas. Uma hipérbole é uma secção cônica que é produzida quando o plano de secção faz um ângulo com a base do cone menor que o ângulo entre a geratriz do cone e a base do mesmo. Uma hipérbole também pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois pontos fixados (os focos da hipérbole) é constante. A relação entre essas duas definições, aparentemente desconexas, também pode ser obtida com o auxílio de esferas de Dandelin. Nesse caso, cada uma das esferas estará inscrita em uma das folhas do cone. A partir da definição dada pela diferença entre as distâncias a dois pontos fixos, é possível escrever a equação de uma hipérbole no plano cartesiano. A equação da hipérbole na configuração padrão, que é a configuração com os eixos de simetria paralelos aos eixos coordenados e com centro de simetria no ponto  $(x_0, y_0)$  é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

A ocorrência de hipérbolas em modelagem de fenômenos ou sistemas físicos é mais sofisticada, em geral envolvendo métodos matemáticos mais avançados, como equações diferenciais. Um exemplo relevante, cujo tratamento matemático foge ao escopo deste capítulo, é o espalhamento de [Rutherford](#).

*O físico neozelandês Ernest Rutherford, (nascido em 1871 em Brightwater, Nova Zelândia, e morto em 1937 em Cambridge, Inglaterra), no ano de 1909, realizou um experimento bombardeando com partículas alfa (núcleos atômicos do elemento hélio) uma folha de ouro muito fina. Ele constatou que essas partículas eram espalhadas de forma a sugerir que os átomos de ouro que estavam sendo bombardeados constituíam-se, na verdade, de pequenos núcleos duros de carga elétrica positiva, com imensos espaços vazios ao redor deles, onde se distribuía uma carga elétrica negativa. Essa conclusão levou à formulação do primeiro modelo atômico, conhecido como modelo de Rutherford. No espalhamento Rutherford, as trajetórias das partículas alfa, quando espalhadas pelos núcleos atômicos, eram, de fato, hipérbolas.*

Hipérbolas também possuem uma propriedade de reflexão que pode ser traduzida da seguinte maneira: Se um raio de luz for emitido a partir de um dos focos da hipérbole e refletir sobre o ramo da hipérbole relativo ao outro foco, então o raio refletido se-

guirá uma trajetória contida na semirreta, originada no segundo foco, conforme ilustrado na Figura 2.23.

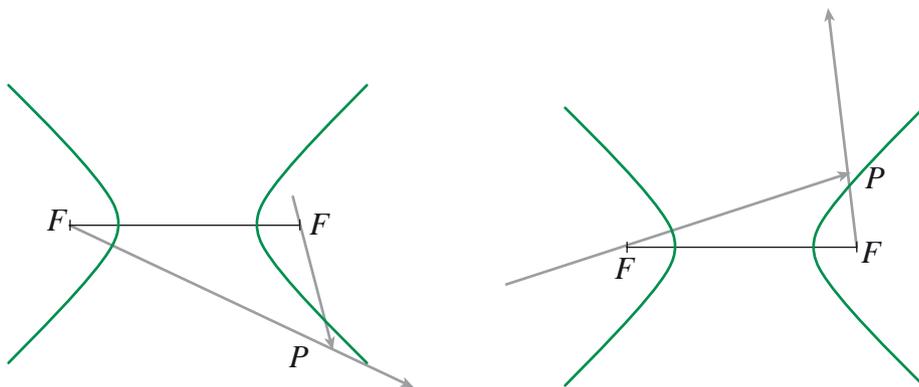


Figura 2.23 - Propriedade óptica da hipérbole.

Esta propriedade óptica é muito utilizada na construção de telescópios refletores, onde se combina um espelho parabólico e um espelho hiperbólico de forma que o foco da parábola coincida com um dos focos da hipérbole, conforme ilustrado na Figura 2.24.

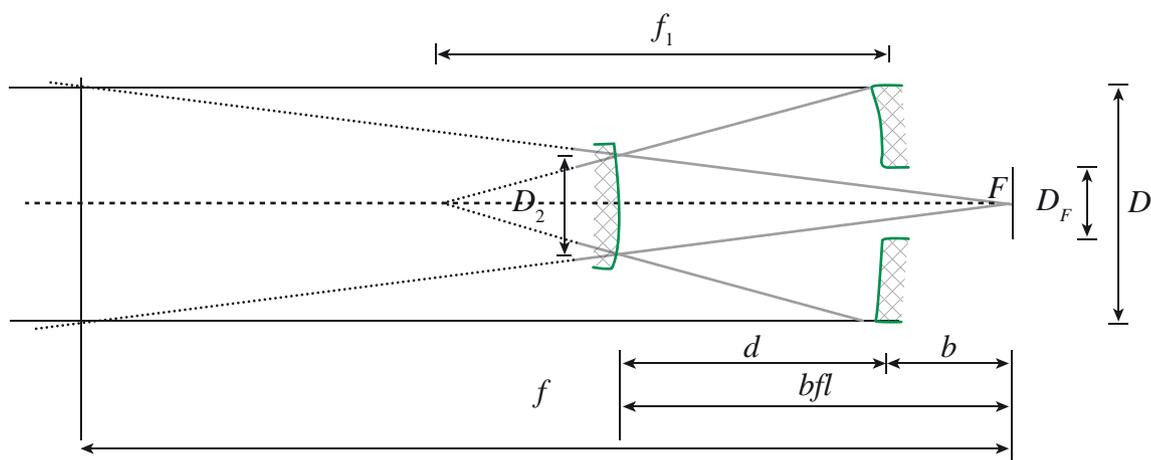


Figura 2.24 - Uso de espelhos hiperbólicos para a construção de telescópios refletores.

Gostaríamos de mostrar uma ocorrência de modelagem de um sistema físico onde as hipérbolas ocorrem de maneira natural: A propagação das ondas de choque de aviões supersônicos. Considere um avião em voo com uma velocidade constante  $v$ , maior que a velocidade de propagação do som no ar, que denotaremos por  $v_s$ . Essa situação está ilustrada na Figura 2.25. As circunferências indicam as frentes de ondas sonoras emitidas pelo avião. Note que o avião sempre chega antes que o som por ele emitido:

*A velocidade de propagação do som no ar seco e a uma temperatura ambiente de 20°C é de, aproximadamente, 343 m/s, ou seja, 1236 km/h.*

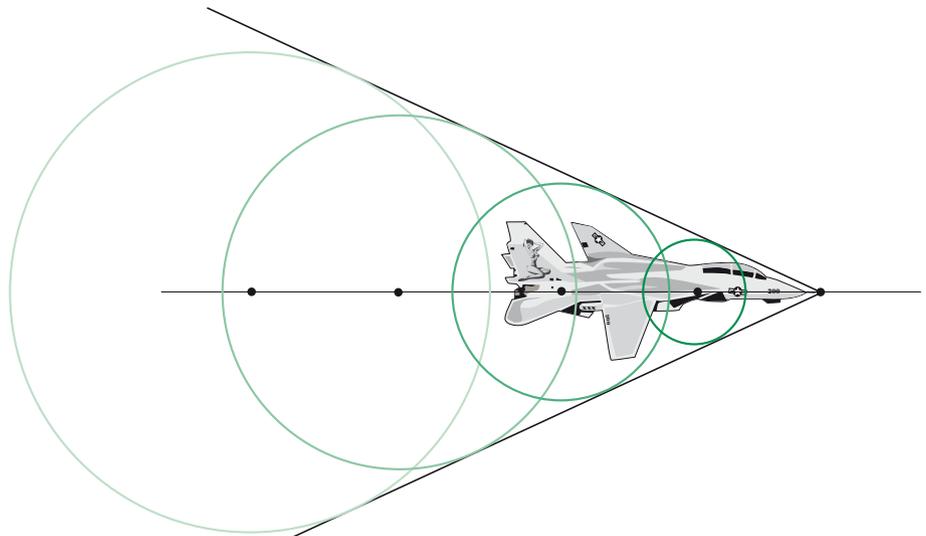


Figura 2.25 - Propagação do som emitido por um avião supersônico.

Primeiramente, vamos determinar qual é o lugar geométrico definido por todas as frentes de ondas sonoras emitidas pelo avião. Dado um ponto  $P$ , onde a aeronave se situe em um instante inicial, ele emite a partir desse ponto uma onda sonora que se propaga uniformemente, em todas as direções, portanto a frente da onda sonora emitida pela aeronave a partir de  $P$ , será sempre uma esfera com centro neste ponto. Após um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a onda sonora terá se propagado e sua frente de onda será uma esfera de centro em  $P$  e raio  $v_s \cdot \Delta t$ . Enquanto isso, a aeronave estará em uma posição  $O$ , cuja distância horizontal até o ponto  $P$  será de  $v \cdot \Delta t$ , conforme nos ilustra a Figura 2.26.

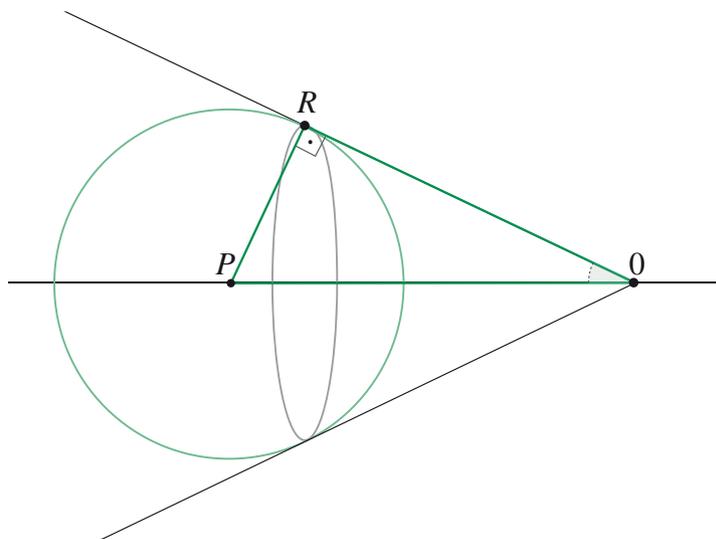


Figura 2.26 - As frentes de onda formam um cone.

Seja  $\overline{OR}$  uma reta tangente à esfera que descreve a frente de onda e que passa pela posição atual da aeronave. Da geometria básica, sabemos que o segmento  $\overline{PR}$  é perpendicular a essa reta tangente, por se tratar do raio da esfera. Podemos facilmente calcular o seno do ângulo  $\angle POR$ , cuja medida denotar-se-á por  $\theta$ :

$$\text{sen}(\theta) = \frac{PR}{PO} = \frac{v_s \cdot \Delta t}{v \cdot \Delta t} = \frac{v_s}{v} = \text{cte}.$$

Essa última expressão significa que, independentemente de quanto tempo tenha se passado após o som ter sido emitido a partir de um ponto, ou independentemente do ponto de emissão do som, esse ângulo será sempre o mesmo (admitindo um movimento da aeronave a velocidade constante). Portanto, o lugar geométrico das frentes de onda emitidas pela aeronave supersônica será um cone cuja geratriz fará um ângulo  $\theta = \arcsen \frac{v_s}{v}$ , com seu eixo (que corresponde à trajetória da aeronave). Esse cone é conhecido, na literatura física e de engenharia, como cone de [Mach](#).

A superfície do cone de Mach é denominada onda de choque e seu impacto pode ser altamente destrutivo. A onda de choque quando atinge o solo, produz uma curva limite entre a região onde o som da aeronave não é ouvido e a região onde o som é percebido. Essa curva limite é denominada limiar de audibilidade. Como a trajetória da aeronave é uma linha reta paralela ao plano do solo, então a curva do limiar da audibilidade será uma hipérbole, pois o plano de secção do cone é paralelo ao eixo de simetria. Portanto, o ângulo de inclinação desse plano de secção é maior que o ângulo da geratriz. Essa situação é ilustrada na Figura 2.27.

*Em referência ao físico e filósofo austríaco Ernst Mach (nascido em 1838, na cidade de Brno, República Tcheca e morto em 1916 no município de Vaterstetten, Baviera, Alemanha).*

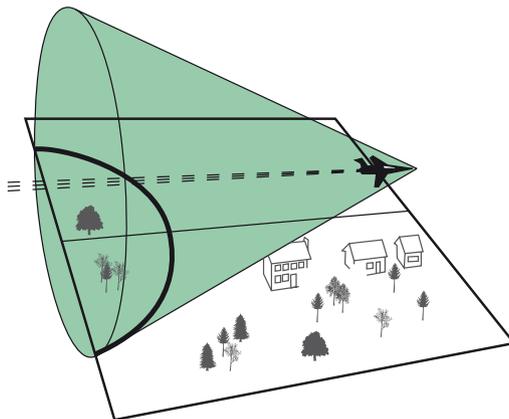


Figura 2.27 - Curva do limiar de audibilidade: A intersecção do cone de Mach com o solo.

Com esse exemplo, encerramos os exemplos de ocorrências de cônicas na modelagem matemática de fenômenos físicos com o uso somente de matemática elementar.

## Apêndice: A equação polar de uma cônica

Neste pequeno apêndice vamos deduzir a equação de uma cônica em coordenadas polares. Esta equação será de suma importância no capítulo seguinte, quando tratarmos do problema de determinação das órbitas de corpos celestes que se movem sob a influência da atração gravitacional. A solução da equação diferencial que rege aquele sistema físico é apresentada na forma de uma relação em coordenadas polares que pode ser reconhecida como a equação de uma secção cônica. A equação polar de uma cônica se baseia em uma característica comum a todas as secções cônicas, a excentricidade. Basicamente, a excentricidade é a razão entre a distância de um ponto da cônica até um dos focos e a distância desse mesmo ponto até uma reta determinada, que é chamada diretriz da cônica. O fato é que essa razão é a mesma para todos os pontos da curva, conforme veremos no teorema a seguir.

**Teorema 2.1.** Dada uma secção cônica qualquer, existe um ponto  $F$  (que é denominado foco da cônica) e uma reta  $d$  (que é denominada diretriz da cônica) no plano dessa cônica tal que, para todo ponto  $P$ , sobre esta secção cônica, a razão  $e = \frac{d(P, F)}{d(P, d)}$  assume sempre o mesmo valor (este número constante é denominado excentricidade da cônica).

### Demonstração:

Considere uma secção cônica em um cone de vértice  $O$  e seja  $P$  um ponto sobre esta curva, conforme ilustrado na Figura 2.28.

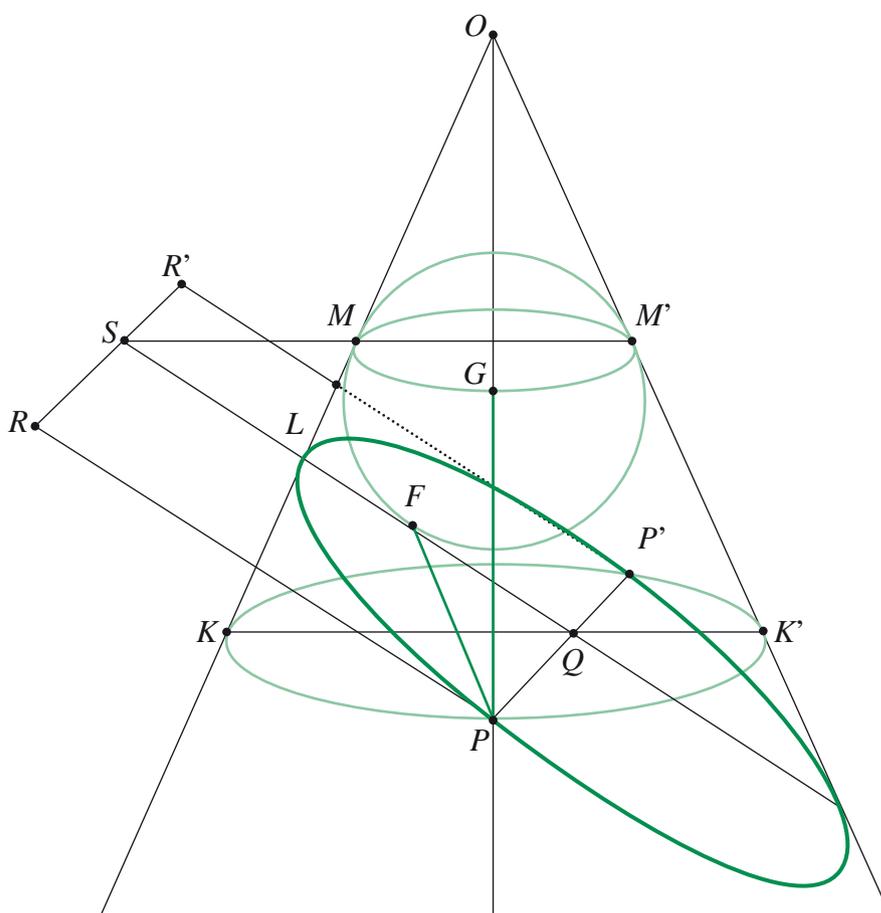


Figura 2.28 - Excentricidade de uma secção cônica.

Pelo ponto  $P$ , considere a circunferência determinada pelos pontos  $K, P, K'$ , que é uma base do cone passando por  $P$  (aqui estamos considerando um cone circular reto, isto é, as circunferências da base estão sempre contidas em planos perpendiculares ao eixo de simetria do cone). Essa circunferência intersecta a cônica em dois pontos,  $P$  e  $P'$ , de forma que os pontos  $K$  e  $K'$  determinem o diâmetro perpendicular à corda  $PP'$ . Seja ainda  $Q$  o ponto de intersecção entre  $PP'$  e  $KK'$  (Figura 2.28). Seja agora a esfera inscrita no cone que tangencia o plano da cônica no ponto  $F$  (esse é o foco). Essa mesma esfera tangencia a superfície do cone em uma circunferência  $M, G, M'$  em um plano paralelo à circunferência  $K, P, K'$ . Na circunferência  $M, G, M'$ , o segmento  $MM'$  é o diâmetro dessa circunferência, que é paralelo ao diâmetro  $KK'$  da circunferência  $K, P, K'$ , e o ponto  $G$  está na intersecção da geratriz  $OP$  com o plano da circunferência  $M, G, M'$ . Como  $F$  e  $G$  são pontos de tangência na esfera, então, por geometria elementar, temos que  $PF \equiv PG$  (Figura 2.28).

Completando os elementos dessa demonstração, considere a reta  $\overline{QF}$ . Esta vai intersectar o cone em um ponto  $L$ , conforme a figura acima (de fato, essa reta intersecta o cone em dois pontos, mas o outro ponto de intersecção não será relevante para nossa demonstração). O plano da cônica intersecta o plano da circunferência  $M, G, M'$  em uma reta, que vamos denotar por  $\overline{RS}$  (esta será a reta diretriz da cônica), onde  $R$  é o ponto de intersecção dessa reta comum aos dois planos (que sempre existe, pois dois planos distintos, quando se intersectam, determinam uma reta) com a reta perpendicular a essa a partir do ponto  $P$  (conforme figura) e  $S$  é a intersecção dessa reta comum aos dois planos com a reta  $\overline{QF}$ . Deixamos a seu encargo a verificação geométrica (razoavelmente elementar) de que a reta  $\overline{QF}$  está no mesmo plano que as retas  $\overline{MM'}$  e  $\overline{KK'}$  (pense no que é a secção da esfera por esse plano). Como os pontos  $M$  e  $K$  estão sobre a mesma geratriz do cone, então  $\overline{KM} \equiv \overline{PG}$ .

O plano da cônica intersecta o plano  $K, P, K'$ , na reta  $\overline{PP'}$  e intersecta o plano  $M, G, M'$  na reta  $\overline{RS}$ . Como os planos  $K, P, K'$  e  $M, G, M'$  são paralelos, concluímos que a reta  $\overline{PP'}$  é paralela à reta  $\overline{RS}$ . Por outro lado, a reta  $\overline{PP'}$  é perpendicular ao plano que contém as retas paralelas  $\overline{MM'}$  e  $\overline{KK'}$ , portanto,  $\overline{PP'}$  é perpendicular à reta  $\overline{QF}$ , que por sua vez, vai ser perpendicular à reta  $\overline{RS}$ . Concluindo, como a reta  $\overline{RS}$  é perpendicular à reta  $\overline{PR}$ , temos que  $\overline{QF}$  é paralela a  $\overline{PR}$ . Portanto, o quadrilátero  $P, Q, S, R$  é um retângulo, o que implica que  $\overline{QS} \equiv \overline{PR}$ .

Considere, agora, os triângulos  $\triangle QLK$  e  $\triangle SLM$ . Temos que  $\angle QLK \equiv \angle SLM$ , pois são ângulos opostos pelo vértice, temos também que  $\angle QKL \equiv \angle SML$ , pois as retas  $\overline{MM'}$  e  $\overline{KK'}$  são retas paralelas. Portanto, os triângulos  $\triangle QLK$  e  $\triangle SLM$  são semelhantes, assim:

$$\frac{KL}{ML} = \frac{QL}{SL} \Rightarrow \frac{KL}{ML} + 1 = \frac{QL}{SL} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{KL}{ML} + \frac{ML}{ML} = \frac{QL}{SL} + \frac{SL}{SL} \Rightarrow \frac{KM}{ML} = \frac{QS}{SL}.$$

Portanto, temos que

$$\frac{PF}{PR} = \frac{KM}{QS} = \frac{ML}{SL},$$

e como a razão  $\frac{ML}{SL}$  depende apenas do triângulo  $\Delta SLM$ , que está unicamente determinado pelos dados da cônica e não pelo ponto específico sobre a mesma, temos o resultado. Nesse caso, a excentricidade da cônica será exatamente  $e = \frac{ML}{SL}$ . ■

A excentricidade de uma cônica é um número positivo que varia de cônica para cônica. Você pode argumentar utilizando raciocínios de [geometria elementar](#) que para uma elipse temos que  $e < 1$ , para uma parábola vale a igualdade  $e = 1$  e para uma hipérbole, temos que  $e > 1$ .

*Em um triângulo qualquer ao maior ângulo se opõe o maior lado.*

Tendo em vista o resultado demonstrado acima, podemos deduzir a equação polar de uma cônica. Considere uma cônica cujo foco esteja localizado na origem do sistema de coordenadas e cuja diretriz seja a reta vertical  $x = -A$ , conforme ilustrado na Figura 2.29.

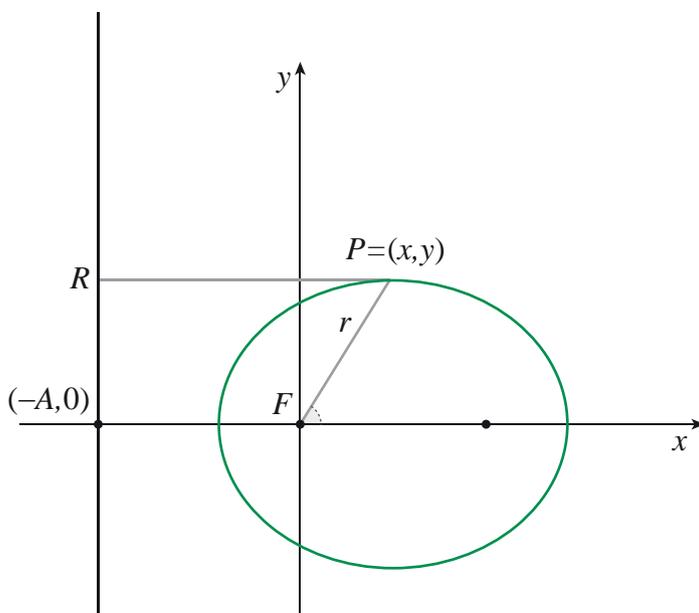


Figura 2.29 - Dedução da equação polar de uma cônica.

Seja  $P = (x, y)$  um ponto sobre a cônica. Sabemos que a razão  $e = \frac{PF}{PR}$  independe do ponto  $P$  em questão, portanto

$$e = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + A} = \frac{r}{r \cos(\theta) + A} \Rightarrow$$

$$er \cos(\theta) + eA = r \Rightarrow r(1 - e \cos(\theta)) = eA \Rightarrow$$

$$r = \frac{eA}{1 - e \cos(\theta)}.$$

Essa última equação é a equação da cônica em coordenadas polares (note que se  $A < 0$ , podemos ter uma variação no denominador da equação polar, obtendo-se uma soma ao invés de uma subtração). Como dissemos, a equação polar das cônicas será importante no próximo capítulo para identificarmos o formato das órbitas planetárias.

## Resumo

Neste capítulo, pudemos ver alguns exemplos do uso de funções elementares para a modelagem de problemas físicos. Entre os tópicos abordados vimos

- A modelagem matemática de fenômenos físicos possui duas vertentes principais: A primeira é a análise da configuração do sistema, isto é, da geometria dos elementos envolvidos no sistema físico. Nesta etapa, por exemplo, temos a escolha do sistema de coordenadas mais apropriado. A segunda consiste da análise física propriamente dita, como, por exemplo, a identificação das grandezas físicas que realmente são relevantes no sistema e o que pode ser desprezado em uma primeira aproximação bem como a dependência funcional entre as grandezas envolvidas.
- A dependência funcional entre as grandezas físicas deve ser extraída a partir da análise de dados experimentais, estas são denominadas leis empíricas.
- As funções de primeiro grau podem ser utilizadas para modelar problemas de variação (velocidade) constante. O raciocínio cinemático pode ser muito útil no tratamento de problemas matemáticos envolvendo proporcionalidade, inclusive problemas clássicos de regra de três simples e composta podem ser tratados utilizando velocidades e funções de primeiro grau.
- As funções quadráticas são utilizadas para tratar problemas

de segunda variação (aceleração) constante. O tipo de fenômeno físico mais comum que envolve aceleração constante é a queda livre de corpos sob a atração gravitacional.

- As secções cônicas são curvas de segundo grau que são muito utilizadas na modelagem de sistemas físicos elementares. Seus usos se estendem desde a mecânica clássica até ótica geométrica e acústica.

## Bibliografia comentada

[1] GARBI, G. G. **A rainha das ciências**. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

Esse livro é, como o próprio subtítulo indica, "Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática". Nesse livro, o autor trata de várias questões. De especial importância para o assunto tratado nesse capítulo é o capítulo sobre Apolônio de Perga e as secções cônicas. Imperdível!

[2] LIMA, E. L. **Coordenadas no plano**. Rio de Janeiro: SBM, 1992. (Coleção do Professor de Matemática).

Esse é um texto básico sobre geometria analítica no plano, certamente indispensável para todo professor de matemática do ensino médio que deseja integrar seu ensino de geometria analítica com outras questões relevantes de matemática. Certamente, é um texto que auxiliará em vários pontos discutidos ao longo desse capítulo.

[3] LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 1996. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1).

Esse também é um texto básico para professores do ensino médio. Em particular, esse volume lida com conteúdos programáticos da primeira série. A razão desse livro ser citado aqui é devido ao tratamento primoroso de funções elementares e riqueza de problemas de diversas áreas que utilizam essas funções. Como o conceito de função é central em toda a matemática, esse livro é fortemente recomendado para todo professor que deseje expor esse assunto, de suma importância, de forma séria e relevante no ensino médio.

[4] LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Ed.). **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

**Esse livro é uma coletânea de artigos sobre educação matemática, em especial focalizando o ensino de geometria, elaborado com experiências de ensino realizadas nos Estados Unidos. Especialmente bem escrito é o artigo sobre secções cônicas, com muitos detalhes sobre propriedades das cônicas.**



# 3 Equações Diferenciais Ordinárias



# 3 Equações Diferenciais Ordinárias

*Neste capítulo vamos: conceituar equações diferenciais ordinárias e mostrar sua utilização em Física; modelar fenômenos envolvendo equações diferenciais lineares de primeira ordem; estudar as propriedades de sistemas mecânicos conservativos, em particular o oscilador harmônico e o problema de Kepler; discutir o uso de métodos contínuos e discretos em Física.*

## 3.1 Motivações

Entre as grandes ferramentas matemáticas para a modelagem de sistemas físicos estão as equações diferenciais, tanto ordinárias, as quais serão discutidas neste capítulo, quanto parciais que serão abordadas nos capítulos seguintes. Para iniciarmos este capítulo sobre equações diferenciais ordinárias, vamos apresentar alguns problemas que envolvam sua utilização.

Em primeiro lugar, considere uma cultura de bactérias em laboratório. A reprodução das bactérias é assexuada. Cada indivíduo se divide em dois ou mais indivíduos idênticos. Esse processo denomina-se cissiparidade. Assim, quanto maior a população de bactérias, maior será a velocidade de reprodução, visto que existem mais indivíduos reproduzindo, ou seja, a taxa de crescimento populacional é proporcional ao número de indivíduos. Vamos supor que cada indivíduo dessa população possua a mesma capacidade reprodutiva. Assim, se denotarmos por  $N(t)$ , o número de indivíduos em um determinado instante de tempo  $t$ , então a velocidade de crescimento dessa população será dada pela derivada dessa função em relação ao tempo,  $N'(t)$ . Assim, supondo que o crescimento da população é proporcional ao número de indivíduos e que cada indivíduo possui a mesma capacidade reprodutiva, podemos escrever a lei de crescimento dessa população da seguinte forma:

$$N'(t) = \alpha \cdot N(t),$$

onde a constante  $\alpha$  codifica a homogeneidade da capacidade reprodutiva dos indivíduos dessa população. Para descrevermos a função que indica o número de indivíduos dessa população, em função do tempo, precisamos encontrar uma função real cuja primeira derivada é proporcional à própria função. Você já sabe da disciplina de [Cálculo II](#), que tal função será uma exponencial. Neste capítulo vamos desenvolver técnicas gerais de resolução para esse tipo de problema.

*Reveja seu material de Cálculo II.*

Um problema semelhante ao primeiro é o problema do decaimento radioativo. A resolução exata desse problema possui inúmeras aplicações, como por exemplo, o cálculo da idade de uma rocha ou então a datação fóssil. O fato é que, na natureza, existem certos elementos químicos cujos núcleos atômicos são instáveis e ao longo do tempo emitem partículas eletricamente carregadas (núcleos de Hélio, na radiação alfa, ou elétrons, na radiação beta) e com isto mudam o seu número atômico e se tornam outros elementos químicos mais estáveis, denominados descendentes. Ao examinar-se uma amostra em uma rocha, são verificadas as porcentagens relativas do elemento químico radioativo e seus descendentes. A taxa de decaimento de uma amostra também depende da quantidade do elemento presente na amostra. Tendo em vista que cada átomo, individualmente, tem a mesma probabilidade de emitir radiação e, portanto, decair em seus elementos descendentes, então se a massa em um determinado momento for igual a  $M(t)$ , a taxa de decaimento nesse instante de tempo será dada por:

$$M'(t) = -\kappa \cdot M(t),$$

onde a constante  $\kappa$  discrimina as características próprias do elemento radioativo a ser analisado e o sinal negativo indica que a massa desse elemento é uma função decrescente com o tempo. Na prática, essa constante de decaimento é determinada experimentalmente através da determinação do tempo de meia vida do elemento. O que se faz é colocar uma amostra de massa  $M_0$  do material e medir com precisão o tempo  $T$ , que decorrido para que essa amostra decaia até a metade da massa original do elemento radioativo, ou seja,  $M(T) = \frac{M_0}{2}$ . Então se substitui esses dados na

A solução dessa equação é dada pela função exponencial, que será denotada por  $\exp(x)$  na maioria das vezes, por questão de clareza na notação. Onde for possível, utilizaremos também a notação  $e^x$  para a mesma função. A questão é meramente estética, pois ao denotarmos a função exponencial de uma expressão muito grande, ocorrerá que os caracteres ficarão muito minúsculos se adotarmos a segunda notação como um expoente, de fato. Por isso a necessidade de utilizarmos a primeira notação.

solução da equação acima com a condição inicial  $M(0) = M_0$ , ou seja:

$$M(t) = M_0 \cdot \exp(-\kappa t). \quad (3.1)$$

Substituindo em (3.1) os dados obtidos da medida do tempo de meia vida, temos:

$$\frac{M_0}{2} = M_0 \cdot \exp(-\kappa T),$$

obtendo, assim:

$$-\kappa T = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2,$$

e, portanto:

$$\kappa = \frac{\ln 2}{T},$$

onde a função  $\ln x$  significa o logaritmo na base  $e$  de um número, ou seja seu logaritmo natural .

Um último exemplo para motivarmos o estudo das equações diferenciais é o da queda livre de corpos sujeitos à resistência do ar. Denotando por  $g$ , a aceleração da gravidade próxima à superfície da Terra, a pergunta a ser feita é: Qual função descreve a velocidade de queda de um corpo de massa  $m$  em queda livre, sujeito a uma força de resistência do ar no sentido contrário ao do movimento e com intensidade proporcional à velocidade,  $v$  do objeto? A Figura 3.1 mostra-nos esquematicamente a situação física envolvida.

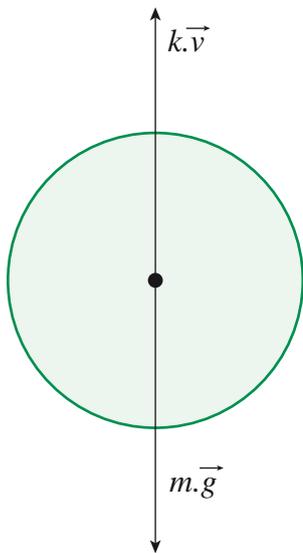


Figura 3.1 - Queda livre de um objeto sujeito à resistência do ar.

Consideremos, pois o caso: A força resultante agindo sobre o corpo de massa  $m$ , é igual à diferença entre a força gravitacional,  $m \cdot g$  e a força de resistência do ar,  $k \cdot v$ , onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade que depende, basicamente, da forma do objeto e como essa forma permite que o objeto se mova na atmosfera com mais ou menos resistência (por exemplo, um paraquedas oferece mais resistência que uma asa de avião ou uma esfera). Por outro lado, pela segunda lei de Newton, a força resultante sobre um corpo de massa  $m$ , é igual ao produto da massa pela acelera-

ção,  $v'$ , sendo assim, temos:

$$m \cdot v' = m \cdot g - k \cdot v,$$

que é a equação cuja solução nos dará a velocidade em função do tempo.

## 3.2 Definições e exemplos

Antes de qualquer coisa, precisamos definir nosso objeto de trabalho, ou seja, o que vem a ser uma equação diferencial ordinária, daqui para frente, denotada simplesmente por EDO .

**Definição 3.1.** Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma igualdade envolvendo uma função  $y$ , de uma variável independente  $t$  e suas derivadas em relação a essa variável independente. Em outras palavras, é uma igualdade do tipo

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Como foi dito, as EDOs não são as únicas equações diferenciais que podem existir. Também podemos ter equações diferenciais parciais (EDPs), que envolvem funções  $u$ , dependentes de duas ou mais variáveis independentes. Por exemplo  $u = u(x, y, z, t)$ , e as derivadas parciais dessa função  $u$ . As EDPs serão tratadas nos capítulos subsequentes.

Outra observação pertinente é com respeito ao nome da variável independente. Como a maioria dos problemas que vamos tratar, utilizando as equações diferenciais, são problemas de evolução temporal, nada mais adequado que denotarmos a variável independente por  $t$ . Porém, lembramos que a variável independente pode ter diversas interpretações, diferentes de simplesmente tempo. Dependerá do contexto do problema a ser tratado.

**Definição 3.2.** A ordem de uma equação diferencial é definida como a derivada de maior ordem da função que ocorre na EDO.

Vejamos alguns exemplos de EDOs:

- $yy''' - \text{sen}(t) \cdot y' + e^t = 0$ , essa é uma EDO de terceira ordem.
- $y^{(4)} + ty'' - t^2 y' + 20 = 0$ , essa é uma EDO de quarta ordem.
- $y'' = \text{sen}(y)$ , essa é uma EDO de segunda ordem.
- $y' = (1 - y)y$ , essa é uma EDO de primeira ordem.

**Definição 3.3.** Uma solução, ou curva integral, da EDO  $F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , é uma função  $\varphi = \varphi(t)$  satisfazendo à igualdade:

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0,$$

para todo  $t$  no domínio da função  $\varphi$ .

Verificar se uma dada função é, de fato, uma solução de determinada EDO, é tarefa fácil, basta saber derivar corretamente.

### Exercícios resolvidos

- 1) Mostre que as funções  $\text{sen}(t)$  e  $\text{cos}(t)$  são soluções da EDO

$$y'' = -y.$$

#### Resolução:

Tomando  $y = \text{sen}(t)$ , temos  $y' = \text{cos}(t)$  e  $y'' = -\text{sen}(t) = -y$ , satisfazendo, portanto, à EDO dada. Analogamente, tomando  $y = \text{cos}(t)$ , temos  $y' = -\text{sen}(t)$  e  $y'' = -\text{cos}(t) = -y$ , também satisfazendo à EDO dada.

- 2) Verifique que a função  $\varphi(t) = t^2 \ln t$ , é solução da EDO

$$t^2 y'' - 3ty' + 4y = 0.$$

#### Resolução:

Temos a função  $\varphi(t) = t^2 \ln t$ , cuja primeira derivada é:

$$\varphi'(t) = 2t \ln t + t^2 \cdot \frac{1}{t} = 2t \ln t + t,$$

e cuja segunda derivada é:

$$\varphi''(t) = 2 \ln t + 2t \cdot \frac{1}{t} + 1 = 2 \ln t + 3.$$

Finalmente, juntando todas as informações, temos que:

$$\begin{aligned} t^2 \varphi''(t) - 3t \varphi'(t) + 4\varphi(t) &= t^2(2 \ln t + 3) - 3t(t + 2t \ln t) + 4(t^2 \ln t) = \\ &= 2t^2 \ln t + 3t^2 - 6t^2 \ln t - 3t^2 + 4t^2 \ln t = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a função  $\varphi$  é, de fato, solução da EDO dada.

## Exercícios

- 1) Verifique, em cada item abaixo, se as funções dadas são, de fato, soluções da EDO indicada:
  - a)  $y'' - y = 0$ ;  $\varphi(t) = e^t$ ,  $\psi(t) = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ .
  - b)  $y''' + 2y' - 3y = 0$ ;  $\varphi(t) = e^{-3t}$ ,  $\psi(t) = e^t$ .
  - c)  $y^{(4)} + 4y''' + 3y = t$ ;  $\varphi(t) = \frac{t}{3}$ ,  $\psi(t) = e^{-t} + \frac{t}{3}$ .
  - d)  $2t^2 y'' + 3ty' - y = 0$ , com  $t > 0$ ;  $\varphi(t) = t^{\frac{1}{2}}$ ,  $\psi(t) = t^{-1}$ .
  - e)  $t^2 y'' + 5ty' + 4y = 0$ , com  $t > 0$ ;  $\varphi(t) = t^{-2}$ ,  $\psi(t) = t^{-2} \ln t$ .
  - f)  $y' - 2ty = 1$ ;  $\varphi(t) = e^{t^2} \int_0^t e^{-\lambda^2} d\lambda + e^{t^2}$ .
- 2) Determine para que valores de  $r$ , as EDOs a seguir possuem solução do tipo  $\varphi(t) = e^{rt}$ .
  - a)  $y' + 2y = 0$ .
  - b)  $y'' - y = 0$ .
  - c)  $y'' + y' - 6y = 0$ .
  - d)  $y''' - 3y'' + 2y' = 0$ .
- 3) Determine para que valores de  $r$ , as EDOs a seguir possuem solução do tipo  $\varphi(t) = t^r$ , para  $t > 0$ .
  - a)  $t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0$ .
  - b)  $t^2 y'' - 4ty' + 4y = 0$ .

Resolver uma EDO consiste em encontrar uma solução para a mesma. Mas como uma EDO envolve derivadas de uma função, obrigatoriamente o processo de resolução envolverá o cálculo de

integrais, ou seja, de primitivas de funções dadas. O número de integrais necessárias para se obter uma solução de uma EDO é exatamente igual à ordem dessa, assim, para se resolver uma EDO de ordem  $n$ , é necessário o cálculo de  $n$  integrais. Como o cálculo de primitivas sempre nos obriga a introduzirmos uma constante arbitrária, ao final da resolução de uma EDO de ordem  $n$ , teremos  $n$  constantes arbitrárias. Isso introduz um grau de indeterminação, afinal, a princípio, se queria determinar uma solução da EDO e termina-se encontrando uma infinidade delas. Para eliminarmos a arbitrariedade nas soluções e encontrarmos uma solução determinada é preciso especificar, a priori,  $n$  valores iniciais que correspondem ao valor da função em um determinado ponto e de todas as suas  $(n-1)$  primeiras derivadas. Temos, portanto, um problema de valores iniciais.

**Definição 3.4.** Um problema de valores iniciais de ordem  $n$  consiste em uma EDO de ordem  $n$ :

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

e uma coleção de  $n$  constantes:  $y_{00}, y_{10}, \dots, y_{(n-1)0}$ . Uma solução para esse problema de valores iniciais é uma função  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfazendo à igualdade:

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0,$$

para todo  $t \in ]a, b[$  e tal que exista um ponto  $t_0 \in ]a, b[$  de forma que  $\varphi(t_0) = y_{00}$ ,

$$\varphi'(t_0) = y_{10}, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = y_{(n-1)0}.$$

## Exercícios

- 4) Verifique que a função  $\varphi(t) = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ , satisfaz ao problema de valores iniciais da EDO  $y'' - y = 0$  com  $y_{00} = 1$  e  $y_{10} = 0$ , em  $t_0 = 0$ .
- 5) Verifique que a função  $\varphi(t) = t^{-1}$  satisfaz ao problema de valores iniciais dado pela EDO  $2t^2 y'' + 3ty' - y = 0$ , com  $y_{00} = 1$  e  $y_{10} = -1$ , em  $t_0 = 1$ .

Vamos expor alguns métodos de soluções de problemas de valores iniciais para a resolução de EDOs. No entanto, a maioria das EDOs importantes para a modelagem de fenômenos naturais não possuem um método de resolução analítico. Sendo assim, existe um imenso desenvolvimento de métodos numéricos para a resolução de EDOs.

Basicamente, métodos numéricos consistem em transformar o sistema contínuo descrito pela EDO em um **sistema discreto** cuja equação equivalente consiste de uma equação algébrica. Muito mais fácil de tratar. A função  $\varphi(t)$ , solução da EDO, é substituída por um vetor com uma quantidade finita de entradas,  $(\varphi_n)_{n=1}^N$ . Quanto maior a quantidade de entradas desse vetor solução, mais próximo ele será da função solução da EDO. Por outro lado, quanto maior o número de componentes do vetor na versão discretizada, mais difícil será o processo de resolução. Na prática, utilizam-se computadores para a resolução numérica de EDOs. O avanço tecnológico tem nos proporcionado computadores cada vez mais rápidos e potentes, possibilitando a resolução do sistema discreto associado com cada vez mais componentes, fazendo, assim, com que a solução numérica seja cada vez mais próxima da solução real.

*Na última seção deste capítulo, veremos um exemplo deste processo de discretização de uma equação diferencial ordinária.*

Uma pergunta pertinente é se realmente existem soluções para os problemas de valores iniciais determinados pelas EDOs. Isto nos remete ao Teorema de Existência e Unicidade de soluções. Vamos enunciar o teorema sem, no entanto, fornecer uma demonstração, pois esta fica fora do escopo dessa disciplina. Também enunciaremos apenas para o caso de problemas de valores iniciais de EDOs de primeira ordem:

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

os casos de EDOs de ordem superior também podem ser formulados transformando-se essa EDO em um sistema de EDOs de primeira ordem.

**Definição 3.5.** Uma função  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser Lipschitz se existir uma constante  $K > 0$ , tal que  $\forall x, y \in ]a, b[$ , tenhamos  $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ .

**Teorema 3.1.** (Teorema de Existência e Unicidade de soluções) Sejam  $I$  e  $J$  intervalos abertos em  $\mathbb{R}$ . Se  $f : I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , é uma função contínua satisfazendo à condição de ser Lipschitz na segunda variável, então, dados  $t_0 \in I$  e  $y_0 \in J$ , existe  $\delta > 0$  tal que no intervalo  $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[ \subseteq I$  exista uma única solução para o problema de valores iniciais

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Como exemplo de uma situação onde a unicidade de soluções deixa de ser válida, considere o problema de valores iniciais  $y' = y^{\frac{1}{3}}$ ,  $y(0) = 0$ .

É fácil ver que as soluções  $\varphi(t) = 0$  e  $\psi(t) = \left(\frac{2}{3} \cdot t\right)^{\frac{3}{2}}$  satisfazem ao problema de valores iniciais acima. O problema é que a função  $f(t, y) = y^{\frac{1}{3}}$  não é Lipschitz em  $y = 0$ , sendo assim, não satisfaz às hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade. Para verificar que a função não é Lipschitz, basta notar que a derivada de  $f$  em relação à variável  $y$  é igual a  $\frac{1}{3} \cdot y^{-\frac{2}{3}}$ , que tende ao infinito a medida que  $y$  tende a 0. Assim, é possível, para qualquer número  $K > 0$  escolhermos pontos  $y_1 < 0 < y_2$  de forma que  $\left| \frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2} \right| > K$ , de onde temos a impossibilidade da função  $f$  satisfazer à condição de Lipschitz em  $y = 0$ .

### 3.3 Problemas envolvendo EDOs de primeira ordem

Nesta seção, mostraremos exemplos de modelagem de problemas envolvendo tão somente equações de primeira ordem. Vamos tratar de dois casos. As lineares e as que eventualmente não são lineares, mas que envolvem uma leve mudança de variáveis que as torna de simples resolução. EDOs lineares de primeira ordem possuem, como veremos, um método de solução geral, enquanto as não lineares devem ser tratadas caso a caso, requerendo, em muitas situações, a introdução de métodos ad hoc, isto é, que servem somente para aquele tipo de equação.

### 3.3.1 Equações diferenciais ordinárias lineares

Uma característica das EDOs, muito importante para sua classificação, diz respeito ao critério de linearidade, isto é, podemos classificar as EDOs em lineares e não lineares. Muito embora EDOs lineares sejam uma classe restrita de equações, elas possuem métodos próprios de resolução e basicamente é possível saber tudo a respeito delas. Também para o estudo do comportamento local das soluções de EDOs em geral, é comum utilizar-se uma aproximação por uma EDO linear, que é muito mais simples de se resolver. Assim, as EDOs lineares constituem-se em uma ferramenta teórica auxiliar importantíssima para o estudo das EDOs.

**Definição 3.6.** Uma EDO linear de ordem  $n$  é uma EDO

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

de forma que a função  $F$  seja linear nas variáveis  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ , ou seja, uma EDO que possa ser escrita na forma

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = g(t).$$

Uma EDO linear é dita homogênea se  $g(t) = 0$ , caso contrário, ela é dita ser não homogênea.

#### Exercício

6) Verifique quais das EDOs abaixo são lineares:

a)  $y' = y(1 - y)$ .

b)  $y'' = \text{sen}(t)$ .

c)  $y'' = \text{sen}(y)$ .

d)  $\cosh(t) \cdot y''' + 2 \ln(1 + t^2) \cdot y' - t^{\frac{2}{3}} y = \text{sen}(t)$ .

e)  $yy'' - 3ty' = 0$ .

Nesta seção, vamos considerar apenas EDOs lineares de primeira ordem:

$$a_0(t)y' + a_1(t)y = g(t)$$

Note que a ordem da EDO linear somente está definida fora dos zeros da função  $a_0(t)$ . Assim, podemos considerar os domínios das soluções apenas em intervalos que não contenham zeros dessa função, portanto, podemos dividir a igualdade por  $a_0(t)$ , obtendo uma EDO com a seguinte forma:

$$y' + a(t)y = f(t).$$

Note que a equação acima também pode ser escrita como  $y' = f(t) - a(t)y = F(t, y)$ . Deixamos como exercício a verificação de que a função  $F(t, y) = f(t) - a(t)y$  é Lipschitz com relação à variável  $y$ , logo satisfaz às hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade de soluções. Portanto, podemos assegurar que os problemas de valores iniciais de EDOs lineares de primeira ordem, possuem uma única solução.

Trataremos agora do método de resolução geral de problemas de valores iniciais de EDOs lineares de primeira ordem com  $y(t_0) = y_0$ :

Um caso particular interessante ocorre quando  $a(t) = 0$ , neste caso, temos:

$$y' = f(t).$$

Integrando ambos os membros desta equação em relação à variável  $t$ , obtemos:

$$\int_{t_0}^t y'(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau.$$

Efetuada a mudança de variável na integral do primeiro membro, finalmente obtemos:

$$\int_{y_0}^{y(t)} dv = y(t) - y_0 = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau.$$

Vamos tratar agora do caso homogêneo, isto é, quando  $f(t) = 0$ :

$$y' + a(t)y = 0.$$

Nesse caso, podemos ainda escrever o problema de valores iniciais como:

$$y' = -a(t)y, \quad y(t_0) = y_0.$$

Como você deve ter notado, essa EDO é **separável**, podemos então escrever na seguinte forma:

$$\frac{y'}{y} = -a(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

*Reveja seu material de Cálculo II para EDOs separáveis.*

Integrando-se ambos os membros em relação a  $t$ , temos:

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(\lambda)}{y(\lambda)} d\lambda = -\int_{t_0}^t a(\lambda) d\lambda.$$

Efetuada-se uma mudança de variáveis no primeiro membro da igualdade acima, teremos:

$$\int_{y_0}^y \frac{du}{u} = -\int_{t_0}^t a(\lambda) d\lambda.$$

De onde obtemos, finalmente:

$$\ln y - \ln y_0 = \ln \frac{y}{y_0} = -\int_{t_0}^t a(\lambda) d\lambda,$$

ou ainda:

$$y = y_0 \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a(\lambda) d\lambda\right).$$

Para o caso não homogêneo, o método é bem simples. Consiste em transformarmos o primeiro membro da igualdade em uma derivada de única função. Para isto, multiplicamos a equação:

$$y' + a(t)y = f(t)$$

por uma função auxiliar  $\mu(t)$ , por hipótese, não nula, obtendo a expressão:

$$\mu(t)y' + \mu(t)a(t)y = \mu(t)f(t). \quad (3.2)$$

O que existe de especial nessa expressão? Basicamente, esse artifício nos permite encontrar a forma da função auxiliar  $\mu(t)$ , de forma que o primeiro membro da igualdade possa ser escrito como a derivada  $(\mu \cdot y)'$ . Mas

$$(\mu \cdot y)' = \mu y' + \mu' y.$$

Comparando com o primeiro membro da equação (3.2), podemos concluir que a função  $\mu(t)$  satisfaz à EDO auxiliar

$$\mu' = a \cdot \mu \Leftrightarrow \mu' - a \cdot \mu = 0,$$

que, como já vimos anteriormente, possui uma solução da forma explicitada pela expressão.

$$\mu(t) = A \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(\lambda) d\lambda\right).$$

Substituindo a solução  $\mu(t)$  na equação (3.2), teremos:

$$\frac{d}{dt}\left(A \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(\lambda) d\lambda\right) \cdot y\right) = A \cdot \exp\left(\int_{t_0}^t a(\lambda) d\lambda\right) f(t).$$

Note que, na expressão acima, podemos cancelar a constante  $A$  em ambos os membros da igualdade. Isso significa dizer que, a solução geral do problema de valores iniciais da EDO original não depende das condições iniciais da função auxiliar  $\mu(t)$  utilizada para integrarmos a equação. Integrando, agora, em relação a  $t$ , obtemos:

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau}\left(\exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(\lambda) d\lambda\right) \cdot y(\tau)\right) \cdot d\tau = \int_{t_0}^t \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(\lambda) d\lambda\right) f(\tau) \cdot d\tau,$$

ou ainda:

$$\exp\left(\int_{t_0}^t a(\lambda) d\lambda\right) \cdot y(t) - y_0 = \int_{t_0}^t \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(\lambda) d\lambda\right) f(\tau) \cdot d\tau,$$

resultando finalmente em:

$$y(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t a(\lambda) d\lambda\right) \cdot \left(y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(\lambda) d\lambda\right) f(\tau) \cdot d\tau\right). \quad (3.3)$$

Toda a discussão anterior pode ser resumida no seguinte teorema:

**Teorema 3.2.** A solução para o problema de valores iniciais da EDO linear de primeira ordem:

$$y' + a(t)y = f(t),$$

com a condição inicial  $y(t_0) = y_0$  é dada pela função:

$$y(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t a(\lambda)d\lambda\right) \cdot \left(y_0 + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} a(\lambda)d\lambda\right) f(\tau) \cdot d\tau\right).$$

## Exercício

- 7) Mostre que o caso homogêneo,  $f(t) = 0$ , também pode ser expresso como um caso particular da solução (3.3).

De posse desse resultado, podemos voltar a discutir os três problemas enunciados na seção 3.2, a título de motivação. Para evitarmos a simples utilização de fórmulas, vamos repetir o processo de resolução nesses casos particulares para fixar melhor as ideias.

## Exercícios resolvidos

- 3) Uma colônia de bactérias possui taxa de reprodução proporcional ao número de indivíduos, com constante de proporcionalidade  $\alpha$ . Sendo  $N_0$  o número de indivíduos dessa população em um instante inicial  $t_0 = 0$ , calcule  $N(t)$ , que corresponde ao número de indivíduos em função do tempo.

### Resolução:

Temos o seguinte problema de valores iniciais:

$$N' = \alpha N, \text{ com } N(0) = N_0. \quad (3.4)$$

Então, manipulando-se a equação acima, podemos escrevê-la na forma:

$$\frac{N'}{N} = \alpha.$$

Integrando-se ambos os lados da equação em relação à variável  $t$ , teremos:

$$\int_0^t \frac{N'(\tau)}{N(\tau)} \cdot d\tau = \int_0^t \alpha \cdot d\tau = \alpha t.$$

Efetuada-se a mudança de variáveis na integral do primeiro membro e levando em conta as condições iniciais estabelecidas em

(3.4), obtemos, finalmente:

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{d\nu}{\nu} = \ln \frac{N(t)}{N_0} = \alpha t ,$$

o que nos fornece o resultado final:

$$N(t) = N_0 \cdot \exp\{\alpha t\} .$$

- 4) O isótopo radioativo Tório 234 decai em elementos descendentes em uma taxa proporcional à sua massa. Uma amostra de Tório de 100mg foi reduzida a 82,04mg em uma semana. Determine a função  $M(t)$ , que indica a massa de Tório 234 em função do tempo e determine o tempo de meia-vida do Tório234.

**Resolução:**

A massa do elemento radioativo é dada pelo problema de valores iniciais

$$M' = -\kappa M , \text{ com, } M(0) = M_0 = 100$$

com as unidades de massa dadas em miligramas (mg) e as unidades de tempo dadas em dias. Realizando o mesmo processo de resolução do exercício anterior, chegamos à solução:

$$M(t) = 100 \cdot \exp\{-\kappa t\} .$$

Para determinarmos a constante de decaimento  $\kappa$ , temos que utilizar a informação que a massa depois de 7 dias é igual a 82,04mg e substituímos na solução da EDO, então, temos:

$$M(7) = 82,04 = 100 \cdot \exp\{-7\kappa\} .$$

Após algumas manipulações algébricas simples, obtemos:

$$\kappa = -\frac{\ln 0,8204}{7} \approx 0,02828 .$$

O resultado numérico pode ser obtido facilmente com o uso de calculadora. Observamos que o argumento da função exponencial deve ser adimensional, portanto, a constante de decaimento  $\kappa$  deve

ser medida em unidades inversas da unidade de tempo, em nosso caso, dias<sup>-1</sup>. Para calcularmos o tempo de meia-vida,  $T$ , temos que, de novo utilizarmos a solução e substituímos  $M(T) = 50$ , assim,

$$50 = 100 \cdot \exp\{-\kappa T\}.$$

Após algumas manipulações podemos reescrever a igualdade acima como

$$T = \frac{\ln 2}{\kappa} \approx \frac{\ln 2}{0,02828} \approx 24,5.$$

Como o tempo está sendo medido em dias, isso significa que o tempo de meia-vida do Tório 234 é de aproximadamente 24,5 dias.

- 5) Supondo que se deixa cair a partir do repouso um corpo de massa  $m$ , determine a velocidade  $v(t)$  em um instante  $t$ , sabendo-se que aceleração da gravidade próxima à superfície da Terra é igual a  $g$  e que o corpo sofre uma força de resistência do ar proporcional à velocidade, mas em sentido contrário ao movimento do objeto.

**Resolução:**

Vimos na seção 3.1 que a equação diferencial obedecida por esse corpo é dada por:

$$mv' + kv = mg.$$

Dividindo-se a igualdade acima por  $m$ , obtemos o seguinte problema de valores iniciais:

$$v' + \frac{k}{m}v = g, \text{ com } v(0) = 0.$$

Novamente, ao invés de simplesmente utilizarmos uma fórmula pronta para a solução, vamos fazer os passos da resolução para fixarmos as ideias. Fica como exercício a verificação de que, se substituímos os dados na fórmula (3.3), obteremos a mesma expressão. Primeiramente, temos que multiplicar a EDO acima por uma função  $\mu(t)$ , de forma a transformarmos o primeiro membro da igualdade em uma derivada total, assim, obtemos:

$$\mu v' + \frac{k}{m} \mu v = \mu g.$$

Observando essa equação, podemos concluir que, para que o primeiro membro seja igual a  $(\mu \cdot v)' = \mu v' + \mu' v$ , temos que ter:

$$\mu' = \frac{k}{m} \mu.$$

Vimos, anteriormente, que as condições iniciais sobre a função auxiliar  $\mu(t)$  não influem na solução geral da EDO inicial, portanto, podemos supor que  $\mu(0) = 1$ , obtendo, assim:

$$\mu(t) = \exp\left(\frac{k}{m} \cdot t\right).$$

Substituindo  $\mu(t)$  na EDO, teremos:

$$\frac{d}{dt} \left( \exp\left(\frac{k}{m} \cdot t\right) \cdot v \right) = \exp\left(\frac{k}{m} \cdot t\right) \cdot g.$$

Integrando-se ambos os lados dessa equação em relação à variável  $t$ , teremos:

$$\int_0^t \frac{d}{d\lambda} \left( \exp\left(\frac{k}{m} \cdot \lambda\right) \cdot v(\lambda) \right) \cdot d\lambda = g \int_0^t \exp\left(\frac{k}{m} \cdot \lambda\right) \cdot d\lambda,$$

o que, depois de substituirmos as condições iniciais dadas, finalmente resulta em:

$$\exp\left(\frac{k}{m} \cdot t\right) \cdot v(t) = \frac{mg}{k} \left( \exp\left(\frac{k}{m} \cdot t\right) - 1 \right),$$

ou ainda:

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left( 1 - \exp\left(-\frac{k}{m} \cdot t\right) \right). \quad (3.5)$$

Embora tenhamos resolvido o problema proposto, ainda restam-nos algumas considerações que podem ser feitas com respeito à função  $v(t)$ , obtida na fórmula (3.5). Em primeiro lugar, podemos perguntar: O que ocorreria se não houvesse resistência do ar? Nesse caso, teríamos que analisar o limite da função (3.5) quando  $k$  tende a zero. Esse é um bom momento para relembrarmos o que foi visto em Cálculo II sobre séries de potências. Expandindo a função exponencial em (3.5) em séries de potências, obtemos:

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left( 1 - \exp\left(-\frac{k}{m} \cdot t\right) \right) = \frac{mg}{k} \left( 1 - \left( 1 - \frac{k}{m} \cdot t + \frac{1}{2!} \left(\frac{k}{m} \cdot t\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{k}{m} \cdot t\right)^3 + \dots \right) \right) =$$

$$= \frac{mg}{k} \left( \frac{k}{m} \cdot t - \frac{1}{2!} \left(\frac{k}{m} \cdot t\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{k}{m} \cdot t\right)^3 - \dots \right) = gt - \frac{gt^2}{2} \cdot \frac{k}{m} + \frac{gt^3}{3!} \cdot \left(\frac{k}{m}\right)^2 - \dots$$

que no limite  $k \rightarrow 0$ , resulta em  $v(t) = gt$ , que é a expressão conhecida para um movimento uniformemente acelerado.

## Exercício

- 8) Obtenha a solução de movimento uniformemente acelerado integrando diretamente a EDO impondo  $k = 0$ .

Outra série de conclusões interessantes podemos tirar da solução (3.5) considerando o limite quando  $t \rightarrow \infty$ , que seria a velocidade limite, isto é, em uma queda livre com resistência do ar, o movimento não é uniformemente acelerado, mas tende a um movimento uniforme no limite. Calculando o limite, temos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{mg}{k} \left( 1 - \exp\left(-\frac{k}{m} \cdot t\right) \right) = \frac{mg}{k} = v_{\infty}.$$

Note que  $v_{\infty}$  pode ser bem pequena se duas coisas ocorrerem: Ou a massa é suficientemente pequena, e é por isso que se jogarmos uma formiguinha de um prédio de 30 andares, ela chega ilesa ao chão e continua se movendo normalmente. Ou a resistência do ar é muito grande, ou seja, a constante  $k$  no denominador é um número grande. É por isto que, quando abrimos um paraquedas (aumentamos o  $k$ ), a velocidade de queda é reduzida abruptamente a um nível seguro para um ser humano.

*Considerando-se que a aceleração da gravidade é sempre a mesma em todos os casos.*

## Exercícios

- 9) Resolva os seguintes problemas de valores iniciais de EDOs lineares de primeira ordem:
- $y' - y = 2t \cdot e^{2t}$ , com  $y(0) = 1$ .
  - $y' + 2y = t \cdot e^{-2t}$ , com  $y(1) = 0$ .
  - $y' + \frac{2}{t} \cdot y = \frac{\cos(t)}{t^2}$ , com  $y(\pi) = 0$  e  $t > 0$ .
  - $y' - 2y = e^{2t}$ , com  $y(0) = 2$ .

Considerando-se que a aceleração da gravidade é sempre a mesma em todos os casos.

e)  $ty' + 2y = \text{sen}(t)$ , com  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  e  $t > 0$ .

10) A equação de Bernoulli se escreve como  $y' + p(t)y = q(t)y^n$ , onde  $p(t)$  e  $q(t)$  são funções reais (contínuas) e  $y^n$  é, de fato, a  $n$ -ésima potência da função  $y$ , sendo  $n \in \mathbb{N}$ . Note que essa equação é linear somente para  $n = 0$  e  $n = 1$ , em todos os outros casos, ela é não linear.

- a) Resolva a equação de Bernoulli para os casos  $n = 0$  e  $n = 1$ .
- b) Mostre que, para os casos de  $n > 1$ , a substituição de variáveis  $u = y^{1-n}$ , torna a EDO linear em  $u$ .

11) O carbono 14 é um isótopo radioativo existente em certa proporção em todos os seres vivos. Após a morte, a proporção de carbono 14 vai diminuindo, pois o corpo deixou de absorvê-lo por processos naturais. Assim, ao analisar-se a proporção de carbono 14 existente em um fóssil, é possível determinar sua idade com certa precisão.

- a) Tendo em vista que o tempo de meia-vida do carbono 14 é aproximadamente 5745 anos, encontre a constante de decaimento,  $\kappa$ , desse isótopo.
- b) Em uma amostra orgânica verificou-se que a proporção de carbono 14 era 20% da proporção original (quando o organismo estava vivo). Determine aproximadamente a idade dessa amostra.

12) A lei de resfriamento de Newton diz que a taxa de variação de temperatura de um corpo exposto em um ambiente é diretamente proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do ambiente onde ele está localizado, ou seja, satisfaz uma EDO

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A),$$

onde  $T$  é a temperatura do corpo, que é uma função do tempo  $t$ ,  $k$  uma constante de proporcionalidade, que depende do corpo, e  $T_A$  a temperatura do ambiente, que podemos supor constante.

- a) Resolva o problema de valores iniciais dado pela EDO acima com  $T(0) = T_0$ .

- b) Suponha que a temperatura inicial de uma xícara de chá seja  $90^{\circ}\text{C}$  e que esteja em uma sala cuja temperatura ambiente é de  $20^{\circ}\text{C}$ . Depois de um minuto, a temperatura de xícara caiu para  $85^{\circ}\text{C}$ . Determine a constante de proporcionalidade  $k$  e determine quanto tempo será necessário para que a xícara atinja  $65^{\circ}\text{C}$ .
- 13) Um recipiente de volume  $V$ , inicialmente cheio de vinho, está acoplado a duas torneiras, ambas abertas. A primeira, injeta água a uma taxa constante em relação ao tempo. A segunda retira, com a mesma taxa, a mistura homogênea de água e vinho do recipiente. Calcule a concentração de vinho no recipiente como função do tempo.

### 3.3.2 Problemas mecânicos com EDOs de primeira ordem

Nesta seção, vamos discutir dois problemas mecânicos que envolvem EDOs de primeira ordem. O primeiro é o problema da velocidade de escape, cuja equação envolve a forma geral do campo gravitacional, que varia com o inverso do quadrado da distância. O segundo é o problema da propulsão de um foguete. Esse tipo de problema é conhecido como problema de massa variável. Pela segunda lei de Newton, temos que a força é a derivada primeira em relação ao tempo do momento linear. Como o momento linear é o produto da massa pela velocidade e a massa já não é mais constante, não podemos escrever a força resultante simplesmente como o produto da massa pela aceleração. O objetivo desta seção não é, de forma alguma, apresentar diversas classes de problemas de maneira sistemática, mas de mostrarmos que mesmo EDOs de primeira ordem, não somente as lineares, desempenham um papel importante na modelagem de problemas mecânicos.

#### Exercícios resolvidos

- 6) Considere um corpo de massa  $m$  arremessado verticalmente a partir da superfície da Terra com uma velocidade inicial  $v_0$ . Desprezando quaisquer forças de atrito e resistência do ar, mas considerando a força gravitacional da Terra dada pela lei de Newton:

$$F = -\frac{GMm}{(x+R)^2}, \quad (3.6)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional,  $M$  a massa da Terra,  $m$  a massa do corpo arremessado,  $R$  o raio da Terra e  $x$  a altura do corpo em relação à superfície da Terra. Determine a velocidade mínima que o corpo deve ser arremessado para que não retorne à Terra, isto é, determine sua velocidade de escape.

### Resolução:

Primeiramente, podemos fazer uma pequena modificação na lei de força para podermos escrevê-la em termos de uma menor quantidade de constantes. Lembrando que a aceleração da gravidade na superfície da Terra, denotada por  $g$ , é dada como:

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

podemos reescrever a lei de Newton da atração gravitacional (3.6) como:

$$F = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}.$$

Essa é a força exercida pelo campo gravitacional da Terra sobre o corpo de massa  $m$ . O sinal negativo é devido ao fato que a força gravitacional atua no sentido contrário ao movimento, como pode ser observado na Figura 3.2.

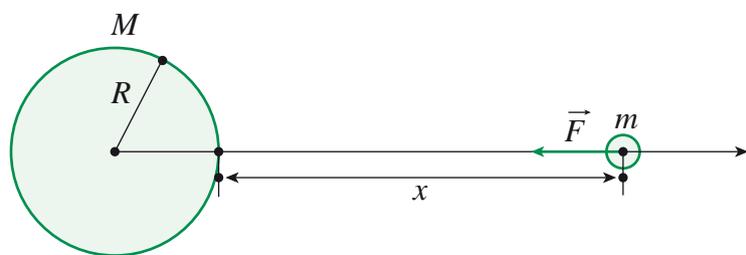


Figura 3.2 - Corpo em movimento sujeito à atração gravitacional da Terra.

Como a massa do corpo é constante, a força  $F$  é igual ao produto da massa pela aceleração, resultando, assim, na equação:

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}. \quad (3.7)$$

A equação (3.7), embora pareça, não é linear, pois temos que

$v = \frac{dx}{dt}$ , e  $x$  o corre no denominador do segundo membro. De fato, essa seria uma equação de segunda ordem, mas vamos fazer uma simplificação, considerando a velocidade como função da posição, que por sua vez, depende do tempo. Assim  $v = v(x(t))$  e suas derivadas se escrevem como:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

Substituindo na equação (3.7) obtemos:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}.$$

Integrando em relação a  $x$ , e lembrando que a condição inicial em  $x = 0$  era  $v(0) = v_0$ , obtemos, finalmente:

$$\int_{v_0}^{v(x)} v dv = -\int_0^x \frac{gR^2 dx}{(x+R)^2},$$

cuja solução é:

$$\frac{(v(x))^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = \frac{gR^2}{x+R} - gR,$$

ou ainda:

$$(v(x))^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R}. \quad (3.8)$$

A velocidade de escape é obtida impondo-se que  $v(x) \geq 0$  para todos os valores positivos de  $x$ , assim:

$$v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R} \geq 0 \Rightarrow v_0^2 \geq 2gR - \frac{2gR^2}{x+R} = 2gR \left( 1 - \frac{R}{x+R} \right) \geq 2gR$$

Portanto, a menor velocidade inicial possível, tal que no limite  $x \rightarrow \infty$  a velocidade tenda a zero é  $v_0 = \sqrt{2gR}$ . Essa é a velocidade de escape do campo gravitacional da Terra, que é de aproximadamente 11,1 km/s.

- 7) Considere o movimento de um foguete que expelle o jato de gases oriundo da queima de combustível a uma velocidade constante  $u$  e cuja taxa de queima de combustível também é constante. Determine a velocidade do foguete como função do tempo.

### Resolução:

Primeiramente, consideremos a massa inicial do foguete,  $m_0$ . Essa massa consiste da soma da massa do combustível com a massa do veículo espacial propriamente dito. Nesse momento inicial, o foguete está em repouso. Em um instante  $t$  qualquer, a massa total do foguete é  $m$  e sua velocidade é igual a  $v$  (novamente, o movimento pode ser considerado unidimensional), conforme nos ilustra a Figura 3.3.

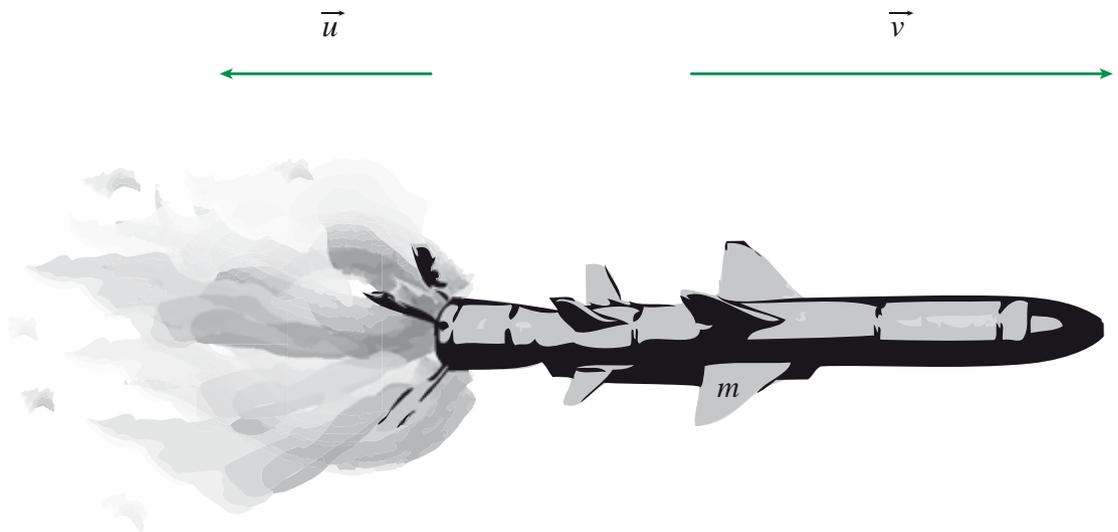


Figura 3.3 - Movimento de um foguete.

Após um intervalo de tempo  $\Delta t$ , o foguete terá expelido uma quantidade  $-\Delta m$  de combustível (por convenção,  $\Delta m < 0$  e estará se movendo a uma velocidade  $v + \Delta v$ . Como não há forças externas agindo sobre o veículo, temos pela segunda lei de Newton que  $\dot{p} = 0$ , ou seja, o momento total do sistema foguete + gases expelidos é constante no tempo. Sendo assim, o momento linear no instante  $t + \Delta t$  será igual ao momento no instante  $t$ :

$$p(t + \Delta t) = p(t).$$

Os gases expelidos possuem, aproximadamente, velocidade  $v_g = v - u$  (essa aproximação é considerada tomando-se o intervalo de tempo  $\Delta t$  muito pequeno). Assim, teremos:

$$(-\Delta m)(v - u) + (m + \Delta m)(v + \Delta v) = mv.$$

Simplificando a expressão acima e desprezando o termo  $\Delta m \cdot \Delta v$ ,

por ser muito pequeno em relação aos outros termos, temos finalmente que:

$$-u \cdot \Delta m = m \cdot \Delta v .$$

Ou, ainda, para colocarmos na forma de equação diferencial, podemos escrever que:

$$-u \frac{\Delta m}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -u \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -u\dot{m} = m\dot{v} .$$

Essa equação diferencial pode ser facilmente integrada. Considerando-se  $t_0 = 0$ , teremos:

$$-\int_0^t \frac{u\dot{m}}{m} dt = \int_0^t \dot{v} dt \Rightarrow -\int_{m_0}^{m(t)} \frac{u dm}{m} = \int_0^{v(t)} dv .$$

Integrando, temos:

$$u \ln \left( \frac{m_0}{m(t)} \right) = v(t) .$$

Note que a velocidade final que o foguete pode atingir está limitada ao logaritmo da razão entre a massa inicial,  $m_0$ , e a massa final,  $m_f$ , que corresponde ao foguete sem combustível. É por essa razão que se costuma dividir o foguete em estágios, de forma que ao terminar o combustível de cada estágio, uma parte do próprio veículo espacial é expelida, de forma a se atingir uma velocidade final maior.

*Dizemos que um termo é muito pequeno em relação aos outros em uma equação se considerarmos as unidades das grandezas envolvidas e verificarmos que este é, pelo menos, uma ordem de grandeza menor que os outros.*

## Exercícios

- 14) Um corpo de massa  $m$  é lançado a partir do nível do mar para cima com velocidade  $v_0$ , que não excede à velocidade de escape  $v_e = \sqrt{2gR}$ . Desprezando a resistência do ar e considerando a variação da atração gravitacional com a altitude, calcule a altitude máxima que o corpo consegue atingir.
- 15) Calcule a velocidade de escape de um corpo lançado para cima, mas de uma altitude tal que sua distância ao centro da Terra seja  $x_0 = \xi R$ , com  $\xi > 1$ . Considerando o raio da Terra de aproximadamente 6000km, determine a altura em relação à superfície da Terra que devemos lançar um corpo de forma que sua velocidade de escape seja 85% da velocidade

de escape na superfície da Terra.

- 16) Seja um foguete em movimento vertical, agora sob a influência do campo gravitacional na superfície da Terra (considere a aceleração da gravidade igual a  $g$  durante todo o movimento). Mostre que a velocidade do foguete será dada por:

$$v(t) = -gt + u \ln \left( \frac{m_0}{m(t)} \right),$$

ou ainda, em função da massa, como:

$$v(m) = -\frac{g}{\alpha} (m_0 - m) + u \ln \left( \frac{m_0}{m} \right),$$

onde  $\alpha = \dot{m}$ , é a taxa constante de queima de combustível.

- 17) Um foguete está no espaço com massa total  $m_0$  e velocidade  $v_0$ . Considerando que a velocidade de ejeção dos gases pelo foguete é de  $u = \frac{v_0}{2}$ , qual a fração de sua massa que o foguete deve queimar de forma que a velocidade dobre?

### 3.4 Sistemas mecânicos conservativos

Nesta seção, iremos estudar alguns sistemas mecânicos que possuem a propriedade de conservação de energia, isto é, a energia total do sistema, consistindo da soma da energia cinética com o potencial é uma constante ao longo das trajetórias físicas do sistema. Dito de outra maneira, os sistemas conservativos são dados por equações diferenciais para as quais a energia total permanece constante ao longo de suas curvas integrais. Em particular, a força não deve depender explicitamente do tempo, ou seja, sistemas conservativos são sistemas autônomos. Para se ter uma ideia da razão de se exigir que os sistemas conservativos sejam autônomos, imagine um corpo inicialmente em repouso e portanto com energia cinética inicial nula, sujeito a uma força que atua sobre ele apenas por um intervalo específico de tempo. Como a força é proporcional à aceleração, após a aplicação da força, o corpo estará a uma velocidade constante não nula e livre de qualquer força agindo sobre ele. Assim, sua energia total final consistirá apenas da energia cinética, a qual será diferente da energia cinética inicial, logo o sistema não é conservativo.

Você deve ter notado que, devido à segunda lei de Newton, as equações diferenciais que descrevem sistemas mecânicos são, em geral, de segunda ordem. Na seção anterior, abordamos alguns sistemas mecânicos que apresentam simplificações e mudanças de variáveis que permitem escrever equações de movimento como equações de movimento como EDOs de primeira ordem. Nesta seção, todas as EDOs serão de segunda ordem, logo as condições iniciais sempre deverão incluir uma posição e uma velocidade inicial.

Basicamente, um sistema será conservativo se a força for a derivada de uma função potencial. Vamos verificar isto para sistemas mecânicos unidimensionais e em dimensões maiores. Para sistemas mecânicos unidimensionais, isto é, para movimentos que dependem de apenas uma variável espacial  $x$ , ou seja, movimentos que ocorrem sobre uma linha reta ou sobre uma curva específica, temos que a posição  $x(t)$ , de um corpo de massa  $m$  satisfaz à equação de movimento dada por:

$$m\ddot{x} = F(x),$$

onde a força depende tão somente da posição, pois supomos que o sistema mecânico seja autônomo, como discutido anteriormente. Suponhamos, agora que a força seja dada pela expressão:

$$F(x) = -U'(x).$$

Assim, temos:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = m\dot{x}\ddot{x} + U'(x)\dot{x} = (m\ddot{x} - F(x))\dot{x} = 0,$$

onde a última igualdade decorre da equação de movimento. Portanto, a energia  $E(t)$  ao longo do movimento é uma constante, ou ainda, o sistema é conservativo.

Para sistemas mecânicos com mais de uma dimensão, a posição é dada por um vetor  $\vec{x}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ , e a força também é uma grandeza vetorial, logo a equação de movimento será uma equação vetorial dada por:

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{x}).$$

A condição para ser conservativo agora será dada da seguinte forma:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x}).$$

Essa é a condição equivalente a dizer que a força é igual a menos a derivada de uma função potencial. A energia total do sistema também pode ser escrita como:

$$E(t) = \frac{m}{2} \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\|^2 + U(\vec{x}) = \frac{m}{2} \left\langle \frac{d\vec{x}}{dt}, \frac{d\vec{x}}{dt} \right\rangle + U(\vec{x}).$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\|^2 + U(\vec{x}) \right) = m \left\langle \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}, \frac{d\vec{x}}{dt} \right\rangle + \left\langle \nabla U(\vec{x}), \frac{d\vec{x}}{dt} \right\rangle = \\ &= \left\langle m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \nabla U(\vec{x}), \frac{d\vec{x}}{dt} \right\rangle = \left\langle m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} - \vec{F}(\vec{x}), \frac{d\vec{x}}{dt} \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a energia é constante ao longo das trajetórias, ou seja, o sistema é conservativo.

Sistemas conservativos, tanto unidimensionais quanto em dimensão maior, permitem uma simplificação substancial na resolução das equações de movimento, uma vez que a equação de Newton

$$m\ddot{x} = F(x),$$

pode ser substituída por uma equação de primeira ordem:

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + U(x) = E.$$

Desenvolvendo a equação acima, teremos:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))},$$

ou ainda, considerando a condição inicial  $x(t_0) = x_0$ ,

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\lambda))}} = \int_{t_0}^t d\tau. \quad (3.9)$$

Nas subseções seguintes, veremos dois exemplos importantes de sistemas conservativos. O primeiro é o oscilador harmônico simples, ou sistema massa-mola e o segundo é o movimento dos corpos sujeitos à atração gravitacional, conhecido na literatura como problema de Kepler. O oscilador harmônico é um sistema mecânico muito simples e cuja solução exata pode ser facilmente obtida. A simplicidade e versatilidade o tornam um modelo padrão para uma aproximação de muitos outros sistemas físicos mais complexos. O movimento sob um campo gravitacional é um caso particular de movimento sob campos centrais que possuem propriedades geométricas muito peculiares.

### 3.4.1 Oscilador harmônico

O oscilador harmônico simples, ou sistema massa mola, é um dos sistemas físicos mais comuns em toda a física teórica. Suas múltiplas aparições em diversos contextos, tanto da física clássica como da física quântica, tornam o oscilador harmônico extremamente útil na modelagem de fenômenos físicos. Considere um corpo de massa  $m$ , preso a uma das extremidades de uma mola com coeficiente de elasticidade  $k$ . Suponha ainda que a mola seja suficientemente grande, de forma que suas deformações sejam de uma ordem de grandeza inferior ao seu comprimento. Isto é necessário para garantirmos que a resposta da mola à deformação obedeça a uma lei linear em relação à deformação, pois se a mola se deforma muito, a lei de força elástica da mola se torna muito mais complexa. Vamos supor, também, que as forças de atrito, tanto entre as superfícies de contato como do meio externo, (resistência do ar) sejam desprezíveis para todas as considerações que serão feitas.

Na posição de equilíbrio, a mola terá um comprimento  $L$ , e o corpo de massa  $m$  preso à mola estará na posição  $x_0 = 0$ , como descrito na Figura 3.4.

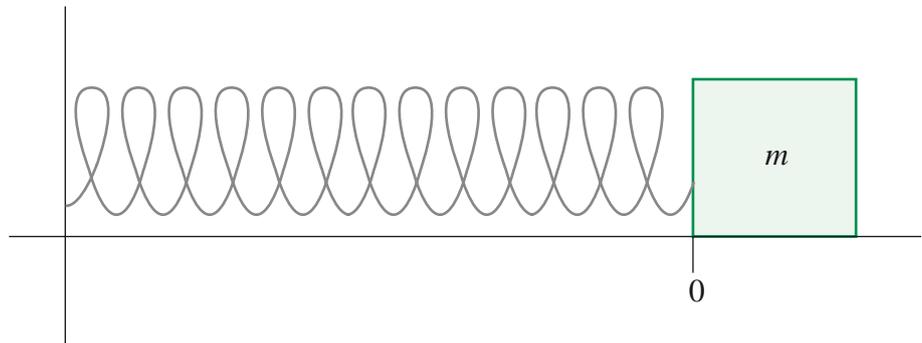


Figura 3.4 - Posição de equilíbrio de um sistema massa-mola.

Ao puxarmos o corpo preso à mola até uma posição  $x > 0$ , a mola adquirirá um novo comprimento, igual ao seu comprimento inicial somado à sua deformação, ou seja,  $L + x > L$ . A resposta elástica da mola se dará no sentido contrário ao da deformação, de forma a restabelecer sua configuração de equilíbrio e sua intensidade será igual ao produto do coeficiente de elasticidade da mola pelo deslocamento, ou seja,  $F = -k \cdot x$ , conforme ilustrado na Figura 3.5.

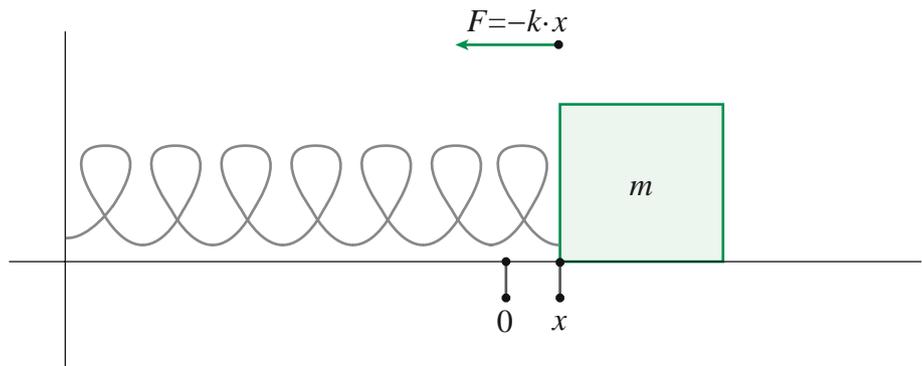


Figura 3.5 - Deformação da mola por um deslocamento  $x > 0$ .

Ao comprimirmos o corpo preso à mola até a posição  $x < 0$ , a mola adquirirá um novo comprimento, igual ao seu comprimento inicial somado à sua deformação, ou seja,  $L + x < L$ . A resposta elástica da mola também se dará no sentido contrário ao da deformação, de forma a restabelecer sua configuração de equilíbrio e sua intensidade, novamente, será igual ao produto do coeficiente de elasticidade da mola pelo deslocamento, ou seja,  $F = -k \cdot x$ , conforme ilustrado na Figura 3.6.

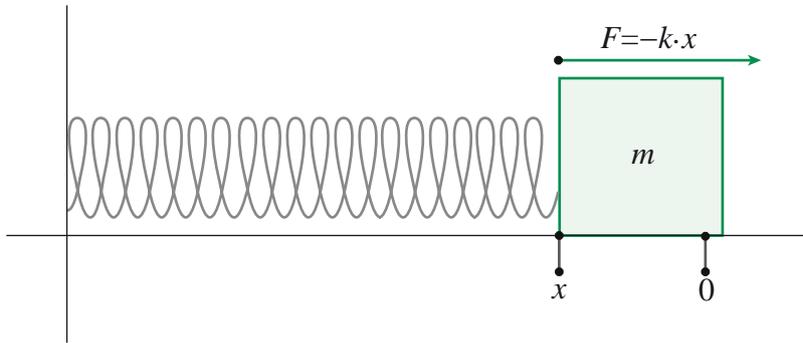


Figura 3.6 - Deformação da mola por um deslocamento  $x < 0$ .

De qualquer maneira, a lei de força da mola sempre atuará no sentido contrário à deformação da mesma. Note que o comprimento de equilíbrio,  $L$  da mola não é relevante em quaisquer considerações sobre a dinâmica do movimento de um corpo preso a ela. Portanto, um corpo de massa  $m$ , preso a uma mola de coeficiente de elasticidade  $k$  em uma posição  $x(t)$ , em um determinado instante  $t$ , é submetido a uma força de resposta elástica da mola igual a  $-k \cdot x(t)$ , resultando na equação de movimento

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (3.10)$$

Nosso objetivo é resolver a equação (3.10). O fato de que o oscilador harmônico simples é um sistema conservativo será ressaltado imediatamente na resolução, ao descobrirmos o potencial que dá origem à força. Primeiramente, multiplicamos a equação (3.10) pela velocidade,  $\dot{x}$ , obtendo:

$$m\ddot{x} \cdot \dot{x} = -kx \cdot \dot{x},$$

ou ainda:

$$m\ddot{x} \cdot \dot{x} + kx \cdot \dot{x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) = 0.$$

Isto implica que a energia total:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2},$$

é constante ao longo do movimento e que a força elástica é derivada do potencial

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}.$$

Substituindo esse potencial na fórmula (3.9), considerando a condição inicial  $x(0) = x_0$ , teremos:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{k\lambda^2}{2} \right)}} = \int_0^t d\tau.$$

Reescrevendo, obtemos:

$$t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{k}{m} \left( \frac{2E}{k} - \lambda^2 \right)}} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} t = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\lambda}{\sqrt{\left( \frac{2E}{k} - \lambda^2 \right)}}.$$

A integral no segundo membro pode ser facilmente resolvida utilizando-se a mudança de variável  $\lambda = \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen}(\theta)$ , com isto, temos:

$$\sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta_0 = \operatorname{arcsen} \left( x(t) \cdot \sqrt{\frac{k}{2E}} \right),$$

onde  $\theta_0 = \operatorname{arcsen} \left( x_0 \cdot \sqrt{\frac{k}{2E}} \right)$ . Portanto, a solução geral será:

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t + \theta_0 \right). \quad (3.11)$$

Outra forma de se apresentar a solução (3.11) é desenvolver o seno utilizando a fórmula de soma de arcos:  $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a) \cdot \cos(b) + \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(a)$ , obtendo uma expressão da forma

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega)t + B \cos(\omega)t,$$

onde  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  e os coeficientes  $A$  e  $B$  são determinados a partir de condições iniciais (verifique a forma destes coeficientes aplicando diretamente a forma de soma de arcos à expressão (3.8)).

O oscilador harmônico simples é um modelo versátil em física, pois serve de aproximação para muitos outros sistemas físicos interessantes. Considere, por exemplo, um pêndulo, que consiste

basicamente de um corpo de massa  $m$  presa a uma das extremidades de um fio de comprimento  $l$  cuja outra extremidade está fixada em um ponto que, doravante, chamaremos de ponto de apoio. O movimento se dá pela ação da força gravitacional sobre o corpo pendurado no fio, conforme nos ilustra a Figura 3.7.

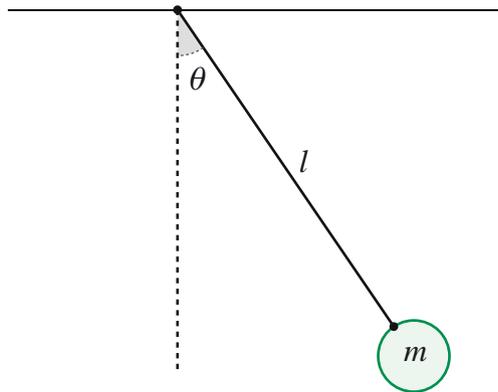


Figura 3.7 - Pêndulo simples.

Seja  $\theta$  o ângulo entre o fio e a reta vertical que passa pelo ponto de apoio. Durante o movimento, que será circular ao redor do ponto de apoio, a única grandeza variável será esse ângulo  $\theta$ , portanto, as equações de movimento visam encontrar uma expressão para o ângulo em função do tempo:  $\theta = \theta(t)$ . A força gravitacional,  $m \cdot g$ , se divide em duas componentes. Uma tangencial ao movimento circular,  $\vec{F}_T$  e outra normal,  $\vec{F}_N$ . Essa última é contrabalaneada pela tensão  $\vec{T}$  do fio, como ilustrado na Figura 3.8.

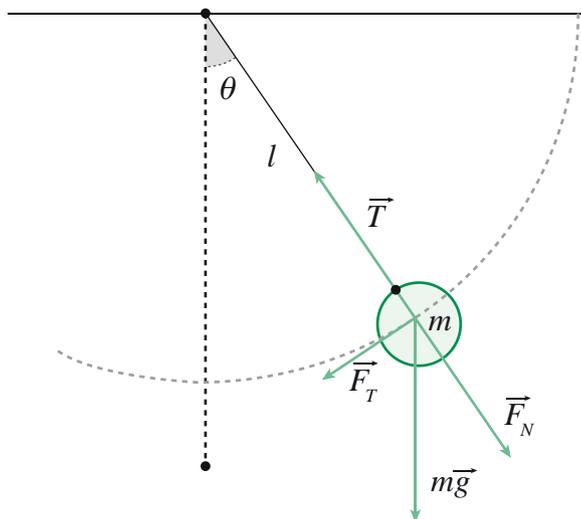


Figura 3.8 - Decomposição da força gravitacional nas componentes tangencial e normal ao movimento circular.

Dessa configuração, podemos deduzir facilmente que  $\vec{F}_T = mg \text{sen}(\theta) \hat{e}_T$ , onde  $\hat{e}_T$  é o vetor unitário tangente à circunferência de movimento e que aponta no sentido anti-horário. Por outro lado,  $\vec{F}_T = m\vec{a}_T = -ml\ddot{\theta}\hat{e}_T$ . Assim, temos a equação de movimento

$$m\ddot{\theta} = -\frac{mg}{l} \text{sen}(\theta).$$

É fácil ver que a força resultante dessa equação unidimensional, (pois o único grau de liberdade desse sistema é o ângulo  $\theta$ ) é igual a menos a derivada da função potencial  $U(\theta) = -\frac{mg}{l} \cos(\theta)$ , portanto, o pêndulo simples é um sistema conservativo, logo, podemos aplicar diretamente a fórmula (3.9), obtendo:

$$t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \frac{mg}{l} \cos(\vartheta) \right)}}.$$

O problema para se obter a solução da equação de movimento nesse caso é que esta última integral não pode ser expressa em termos de funções elementares. Portanto, o conhecimento das soluções de um pêndulo simples só pode ser obtido de forma aproximada. Uma das aproximações interessantes consiste em se considerar o regime de pequenas oscilações, isto é, quando o ângulo  $\theta$  é muito próximo de 0. Nesse caso, as potências de ordem superior de  $\theta$ , isto é  $\theta^2$ ,  $\theta^3$ , etc., podem ser desprezadas, por serem muito menores que  $\theta$ . Utilizando a expansão em série de Taylor da função seno:

$$\text{sen}(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots,$$

podemos considerar a aproximação  $\text{sen}(\theta) \approx \theta$ . Assim, a equação de movimento do pêndulo simples se escreve simplesmente como:

$$m\ddot{\theta} = -\frac{mg}{l} \theta,$$

que pode ser reconhecida facilmente como a equação do oscilador harmônico simples.

Nessa discussão sobre o oscilador harmônico, pode-se, ainda, considerar os casos em que forças dissipativas, como a resistência do ar e o atrito mecânico entre superfícies de contato, atuam no sistema. Esses são os osciladores harmônicos amortecidos. Também é possível estudar o caso em que forças externas impulsionam o movimento harmônico. Esses são os osciladores harmônicos forçados. Nos dois casos, o sistema deixa de ser conservativo, pois no primeiro caso há uma perda de energia por causa da dissipação e no segundo caso, há um ganho de energia devido à força externa que induz o movimento. Muito embora esses sistemas mecânicos não sejam conservativos, vamos apresentá-los na sequência, pois seu estudo envolve técnicas importantes de resolução de EDOs lineares de segunda ordem.

## Exercícios

- 18) Mostre que o período de uma oscilação completa do oscilador harmônico simples é dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

- 19) Uma forma eficiente de se determinar o coeficiente de elasticidade de uma mola é utilizá-la como um dinamômetro, ou seja, um instrumento de medição de peso. Considere uma mola, na qual é pendurado um corpo de 1kg, e com esse peso ela estica 2cm de sua posição inicial, até entrar em equilíbrio com o peso. Calcule o coeficiente de elasticidade da mola, sabendo-se que o peso de um corpo é a força que a gravidade exerce sobre este e é igual ao produto da massa pela aceleração da gravidade, que é dada por  $g = 10\text{m/s}^2$ .
- 20) Utilizando o regime de pequenas oscilações, calcule o período de uma oscilação completa do pêndulo simples.

Há duas variações em cima do oscilador harmônico simples que devemos considerar. A primeira é incluímos efeitos devido a forças de atrito. Esse sistema se denomina oscilador harmônico amortecido. A segunda possibilidade é considerarmos forças externas agindo sobre o sistema massa-mola, com ou sem atrito. Esse tipo de sistema é denominado oscilador harmônico forçado. Em ambos os casos, o sistema deixa de ser conservativo, pois no

oscilador harmônico amortecido a energia é dissipada em forma de calor devido ao atrito, enquanto no oscilador harmônico forçado a energia é transferida ao sistema por algum mecanismo externo. Mas por que estudarmos esse tipo de sistema, uma vez que não são conservativos? Em primeiro lugar, porque esse tipo de sistema é mais comum nas situações físicas reais. Em segundo lugar, porque estes sistemas exemplificam técnicas importantes de resolução de EDOs lineares.

Considere um corpo de massa  $m$ , preso a uma mola de coeficiente de elasticidade  $k$ , em movimento oscilatório originado pela resposta elástica da mola à deformação da mesma causada pelo deslocamento do corpo. Suponha, ainda, que o movimento esteja sujeito a forças de atrito, tanto de superfície quanto de resistência do ar, e cuja lei de força é proporcional à velocidade do corpo. Assim, temos, pela segunda lei de Newton:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x},$$

com  $c > 0$ , ou ainda:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (3.12)$$

Essa EDO de segunda ordem é a equação do oscilador harmônico amortecido. Para se resolver esse tipo de equação, primeiramente se estabelece uma tentativa, a função exponencial, afinal, a função exponencial é a única função que possui todas as suas derivadas proporcionais a si mesma, assim, uma combinação linear entre a função e suas duas primeiras derivadas somente pode ser igual a zero se a função  $x = x(t)$  for do tipo exponencial. Sendo assim, podemos propor  $x(t) = e^{\lambda t}$ , de onde temos  $\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$ , e  $\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ . Para resolvermos a equação (3.12) tudo que temos que fazer é determinar o coeficiente  $\lambda$ . Isto se torna uma tarefa relativamente fácil, pois substituindo  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  e  $\ddot{x}(t)$  em (3.12) temos:

$$e^{\lambda t} (m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0.$$

Como a função exponencial nunca se anula em todo seu domínio, obtemos a equação algébrica:

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0,$$

cujas raízes são:

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}, \quad e \quad \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

Com respeito a essas soluções, temos que considerar separadamente três casos possíveis:

**Caso 1:** As raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e distintas. Isto equivale a dizer que  $c^2 - 4km > 0$ . Note que, nesse caso, temos que ambas as raízes são negativas, pois  $c^2 - 4km < c^2$ , logo  $\sqrt{c^2 - 4km} < c$ . Assim, ambas as funções,  $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ , como  $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$  são soluções da equação (3.12). Como a equação (3.12) é linear, qualquer combinação linear de soluções também é solução, logo a solução mais geral para a equação é  $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$ , onde as constantes  $A$  e  $B$  são determinadas por condições iniciais de posição e velocidade, pois se trata de uma EDO de segunda ordem.

Note ainda que a solução geral é igual à soma de duas funções exponenciais com expoente negativo, portanto temos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , sem que a mesma função adquira o valor nulo para qualquer instante de tempo. Fisicamente, significa que não há movimento oscilatório e que o corpo tende **assintoticamente** à posição de equilíbrio da mola, esse é o chamado superamortecimento.

*Dizemos que uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tende assintoticamente a um valor  $L$  se o limite  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  existe e é igual a  $L$ .*

**Caso 2:** As raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e iguais. Isso equivale a dizer que  $c^2 - 4km = 0$  e que  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2m} < 0$ . Nesse caso, é fácil ver

que a função  $x_2(t) = te^{-\frac{c}{2m}t}$  também é solução de (3.12): Derivando, teremos que  $\dot{x}_2(t) = \left(1 - \frac{c}{2m}t\right)e^{-\frac{c}{2m}t}$  e  $\ddot{x}_2(t) = \left(-\frac{c}{m} + \frac{c^2}{4m^2}t\right)e^{-\frac{c}{2m}t}$ .

Substituindo na equação (3.12) temos:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_2(t) + c\dot{x}_2(t) + kx_2(t) &= \left(-c + \frac{c^2}{4m}t\right)e^{-\frac{c}{2m}t} + \left(c - \frac{c^2}{2m}t\right)e^{-\frac{c}{2m}t} + kte^{-\frac{c}{2m}t} = \\ &= \left(-\frac{c^2}{4m} + k\right)te^{-\frac{c}{2m}t} = \left(\frac{-c^2 + 4km}{4m}\right)te^{-\frac{c}{2m}t} = 0. \end{aligned}$$

Assim, a solução geral para esse caso é dada por  $x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{c}{2m}t}$ , onde, novamente, as constantes  $A$  e  $B$  são determinadas por con-

dições iniciais de posição e velocidade. Note que a solução também tende assintoticamente para a posição de equilíbrio da mola, no entanto, pode haver um instante no qual o sistema passe pela posição de equilíbrio, em  $t_E = -\frac{A}{B}$ , desde que  $A \cdot B < 0$ . Esse é o caso do amortecimento crítico.

**Caso 3:** As raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são complexas e conjugadas. Isto equivale a dizer que  $c^2 - 4km < 0$ . Neste caso, as soluções seriam:

$$x_1(t) = \exp\left\{-\frac{c}{2m} + i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}\right\} \text{ e } x_2(t) = \exp\left\{-\frac{c}{2m} - i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}\right\}.$$

Para evitarmos trabalhar com funções de variável complexa, podemos trabalhar com a fórmula de Euler,  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$ . Assim, facilmente verificamos que  $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  e  $\text{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ , e portanto com uma combinação linear das funções  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , podemos deduzir que a solução geral da equação (3.12) neste caso é dada por:

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \left( A \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}\right) + B \text{sen}\left(t\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}\right) \right),$$

onde, novamente, os coeficientes  $A$  e  $B$  são determinados por condições iniciais de posição e velocidade. Note que temos um movimento oscilatório, mas as amplitudes das oscilações diminuem com o tempo, tendendo assintoticamente a 0. Esse é o caso do subamortecimento.

Veja também que, para o caso sem atrito, isto é quando  $c = 0$ , temos que a solução acima coincide com a solução do oscilador harmônico simples:

$$x(t) = A \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + B \text{sen}\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

Você deve estar se perguntando: Por que dissemos que a solução geral da EDO (3.12) era, em todos os casos, a combinação linear das duas soluções encontradas? Por que tínhamos tanta certeza que havia outra solução no caso em que as duas raízes eram iguais? Por que sabemos que não existe mais algum tipo de solução di-

ferente para esta EDO? Bem, é uma série de questões interessantes e importantes na teoria de equações diferenciais ordinárias lineares, infelizmente, não teremos muito espaço neste material para descrevermos todos os detalhes. Basicamente, todos os nossos procedimentos se baseiam em dois fatos: Primeiramente, o espaço de soluções de uma EDO linear de segunda ordem é um espaço vetorial de dimensão 2, assim, basta encontrar duas funções que sejam linearmente independentes para termos uma base para esse espaço de funções. Em segundo lugar, para sabermos se duas funções reais  $f_1$  e  $f_2$  são linearmente independentes, basta verificar que a função determinante Wronskiano, definida como:

$$W(f_1, f_2)(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix},$$

seja diferente de 0 para todo  $x$  no domínio das funções. Para uma discussão mais detalhada da teoria envolvida, aconselhamos a referência:

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

## Exercícios

- 21) Dada a solução geral, calcule a velocidade e a aceleração do oscilador harmônico superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido.
- 22) Descreva a solução geral de um oscilador harmônico com amortecimento crítico e posição inicial  $x(0) = x_0$  e velocidade inicial  $\dot{x}(0) = 0$ .
- 23) Calcule as energias cinética e potencial do oscilador harmônico sub amortecido com posição inicial  $x(0) = x_0$  e velocidade inicial  $\dot{x}(0) = v_0$ , e mostre que a energia total não se conserva.
- 24) Calcule o determinante Wronskiano de  $f_1(t) = e^{at}$  e  $f_2(t) = e^{bt}$ , com  $a \neq b$ .
- 25) Calcule o determinante Wronskiano de  $f_1(t) = e^{at}$  e  $f_2(t) = te^{at}$ .
- 26) Calcule o determinante Wronskiano de  $f_1(t) = \cos(at)$  e

$$f_2(t) = \text{sen}(at).$$

Finalmente, vamos explorar o movimento do oscilador harmônico, simples ou com amortecimento, sob a influência de alguma força externa. Esse é o oscilador harmônico forçado. Suponha que se tenha um corpo de massa  $m$  preso a uma mola de constante elástica  $k$  e sujeita a uma força de atrito proporcional à velocidade, com coeficiente de atrito  $c$ . Suponha ainda que exista uma força dependente do tempo,  $F(t)$ , atuando diretamente sobre o corpo para colocá-lo em movimento. Assim, a equação diferencial que descreve o movimento do corpo se escreverá como:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t). \quad (3.13)$$

Essa EDO linear de segunda ordem é dita ser não homogênea, enquanto a equação (3.12) é chamada homogênea. Enquanto as soluções de uma EDO linear de segunda ordem homogênea formam um espaço vetorial de dimensão 2, as soluções da equação não homogênea formam um espaço afim de dimensão 2, que basicamente é um espaço vetorial de mesma dimensão somado a um vetor particular. Assim, a solução geral de uma EDO linear não homogênea é dada como:

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t),$$

onde  $x_H(t)$  é a solução da equação homogênea (3.12), cujo processo de obtenção foi discutido logo acima nessa seção, e  $x_p(t)$  é uma solução particular da não homogênea. Nos parágrafos seguintes, discutiremos um dos processos de obtenção desta solução particular. O método de variação de parâmetros.

O método de variação de parâmetros consiste em considerar uma combinação linear entre duas soluções linearmente independentes da equação homogênea,  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , mas onde os coeficientes também são funções dependentes do tempo, assim

$$x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t). \quad (3.14)$$

Calculando a primeira derivada de (3.14) temos:

$$\dot{x}_p(t) = \dot{u}_1(t)x_1(t) + u_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{u}_2(t)x_2(t) + u_2(t)\dot{x}_2(t),$$

mas, como precisamos apenas de uma solução particular da não homogênea, podemos fazer escolhas arbitrárias para simplificarmos o processo de resolução, assim, podemos tomar, em particular, a condição:

$$\dot{u}_1(t)x_1(t) + \dot{u}_2(t)x_2(t) = 0.$$

Que nos fornece a seguinte expressão para a primeira derivada:

$$\dot{x}_p(t) = u_1(t)\dot{x}_1(t) + u_2(t)\dot{x}_2(t),$$

e, conseqüentemente para a segunda derivada:

$$\ddot{x}_p(t) = \dot{u}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{u}_2(t)\dot{x}_2(t) + u_1(t)\ddot{x}_1(t) + u_2(t)\ddot{x}_2(t).$$

Substituindo  $x_p(t)$  na equação (3.13), temos:

$$m\ddot{x}_p + c\dot{x}_p + kx_p = F(t),$$

ou seja:

$$m(\dot{u}_1\dot{x}_1 + \dot{u}_2\dot{x}_2) + u_1(m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1) + u_2(m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2) = F(t),$$

e como  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são soluções da equação homogênea (3.12), temos, finalmente que:

$$m(\dot{u}_1\dot{x}_1 + \dot{u}_2\dot{x}_2) = F(t).$$

Obtemos, finalmente, um sistema linear:

$$\begin{cases} \dot{u}_1x_1 + \dot{u}_2x_2 = 0 \\ \dot{u}_1\dot{x}_1 + \dot{u}_2\dot{x}_2 = \frac{F(t)}{m} \end{cases}$$

cujas soluções é facilmente obtida como:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(t) &= -\frac{x_2(t)F(t)}{m \cdot W(x_1, x_2)(t)}, \\ \dot{u}_2(t) &= \frac{x_1(t)F(t)}{m \cdot W(x_1, x_2)(t)}, \end{aligned}$$

onde  $W(x_1, x_2)(t)$  é o determinante Wronskiano das soluções  $x_1(t)$

e  $x_2(t)$ . Integrando-se em relação ao tempo, finalmente obtemos os coeficientes variáveis da solução particular:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_1(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{x_2(\tau)F(\tau)d\tau}{m \cdot W(x_1, x_2)(\tau)}, \\ u_2(t) &= u_2(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{x_1(\tau)F(\tau)d\tau}{m \cdot W(x_1, x_2)(\tau)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como exemplo de aplicação do método de variação de parâmetros, vamos considerar o caso de um oscilador harmônico simples, isto é, sem amortecimento ( $c = 0$ ) sujeito a uma força externa do tipo oscilatória,  $F(t) = a \cos(\omega t)$ . Denote por  $\omega_0$  a frequência característica do oscilador harmônico, ou seja:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Vamos considerar dois casos: O caso em que a frequência  $\omega$  é diferente frequência característica  $\omega_0$  e o caso em que  $\omega = \omega_0$ . Em ambos os casos, as soluções da equação homogênea são  $x_1(t) = \cos(\omega_0 t)$  e  $x_2(t) = \sin(\omega_0 t)$ . O determinante Wronskiano das duas funções é facilmente calculado, resultando em  $W(x_1, x_2)(t) = \omega_0$ . As funções  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ , são calculadas segundo as fórmulas (3.15), resultando em:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_1(0) - \frac{a}{m\omega_0} \int_0^t \sin(\omega_0 \tau) \cos(\omega \tau) d\tau = \\ &= u_1(0) + \frac{a}{2m\omega_0} \int_0^t \{ \sin((\omega - \omega_0)\tau) - \sin((\omega + \omega_0)\tau) \} d\tau = \\ &= u_1(0) - \frac{a}{2m\omega_0} \left\{ \frac{\cos((\omega - \omega_0)t)}{(\omega - \omega_0)} - \frac{\cos((\omega + \omega_0)t)}{(\omega + \omega_0)} - \frac{2\omega_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \right\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_2(t) &= u_2(0) + \frac{a}{m\omega_0} \int_0^t \cos(\omega_0 \tau) \cos(\omega \tau) d\tau = \\ &= u_2(0) + \frac{a}{2m\omega_0} \int_0^t \{ \cos((\omega - \omega_0)\tau) + \cos((\omega + \omega_0)\tau) \} d\tau = \\ &= u_2(0) + \frac{a}{2m\omega_0} \left\{ \frac{\sin((\omega - \omega_0)t)}{(\omega - \omega_0)} + \frac{\sin((\omega + \omega_0)t)}{(\omega + \omega_0)} \right\}. \end{aligned}$$

Como as constantes  $u_1(0)$  e  $u_2(0)$  irão, respectivamente, multiplicar

as soluções  $x_1$  e  $x_2$  da equação homogênea, e como os coeficientes dessas soluções são determinados por condições iniciais, podemos, sem perda de generalidade, considerar  $u_1(0) = -\frac{a}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$  e  $u_2(0) = 0$ . Assim, a solução geral se escreve como:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \\
 & -\frac{a}{2m\omega_0} \left\{ \frac{\cos((\omega - \omega_0)t)}{(\omega - \omega_0)} - \frac{\cos((\omega + \omega_0)t)}{(\omega + \omega_0)} \right\} \cos(\omega_0 t) + \\
 & +\frac{a}{2m\omega_0} \left\{ \frac{\sin((\omega - \omega_0)t)}{(\omega - \omega_0)} + \frac{\sin((\omega + \omega_0)t)}{(\omega + \omega_0)} \right\} \sin(\omega_0 t) .
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Podemos ir um pouco além, e impormos as condições iniciais  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ . Deixamos para você, como exercício, a verificação de que essas condições iniciais implicam em:

$$A = \frac{a}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}, \quad B=0. \tag{3.17}$$

Após algumas simples manipulações trigonométricas na solução (3.16), que também são deixadas como exercício, finalmente obtemos a solução:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{a}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} (\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)) = \\
 = & -\frac{2a}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \operatorname{sen} \left[ \left( \frac{\omega - \omega_0}{2} \right) t \right] \operatorname{sen} \left[ \left( \frac{\omega + \omega_0}{2} \right) t \right] .
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Se as frequências  $\omega$  e  $\omega_0$  forem próximas, isto é, se a diferença entre elas for muito menor que sua soma, então temos o fenômeno conhecido como batimento, ou amplitude modulada. Esse fenômeno pode ser verificado por pessoas que tocam instrumento de cordas. Ao afinarmos um violão, comparamos o som de duas cordas tocando a mesma nota. Se o violão está levemente desafinado, então verifica-se um som que oscila em intensidade. Se aumentamos a desafinação, verificamos que a oscilação fica mais rápida, até que finalmente fica imperceptível. Isso ocorre quando a diferença entre as frequências e sua soma difere muito pouco de um múltiplo de  $2\pi$ .

O que ocorre quando o violão está afinado? Se você toca a mesma

nota em duas cordas diferentes, então você percebe que naturalmente a intensidade do som aumenta. Dizemos que as cordas estão em ressonância. Ressonância é o próximo caso a ser analisado e ocorre quando a frequência  $\omega$  da força externa é igual à frequência característica,  $\omega_0$ , do oscilador. Nesse caso, os coeficientes (3.15) da solução particular da não homogênea se escrevem como:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u_1(0) - \frac{a}{m\omega_0} \int_0^t \text{sen}(\omega_0\tau) \cos(\omega_0\tau) d\tau = \\ &= u_1(0) - \frac{a}{2m\omega_0} \int_0^t \text{sen}(2\omega_0\tau) d\tau = \\ &= u_1(0) + \frac{a}{2m\omega_0} \left\{ \frac{\cos(2\omega_0 t)}{2\omega_0} - \frac{1}{2\omega_0} \right\}, \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= u_2(0) + \frac{a}{m\omega_0} \int_0^t \cos^2(\omega_0\tau) d\tau = \\ &= u_2(0) + \frac{a}{2m\omega_0} \int_0^t \{1 + \cos(2\omega_0\tau)\} d\tau = \\ &= u_2(0) + \frac{a}{2m\omega_0} \left\{ t + \frac{\text{sen}(2\omega_0 t)}{2\omega_0} \right\}. \end{aligned}$$

Novamente podemos, sem perda de generalidade, considerar  $u_1(0) = \frac{a}{4m\omega_0^2}$  e  $u_2(0) = 0$ . Portanto, a solução geral se escreve como:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \text{sen}(\omega_0 t) + \\ &+ \frac{a}{4m\omega_0^2} \cos(2\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + \\ &+ \frac{a}{2m\omega_0} \left\{ t + \frac{\text{sen}(2\omega_0 t)}{2\omega_0} \right\} \text{sen}(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ainda, para simplificarmos, vamos considerar as condições iniciais  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  que fixam as constantes  $A$  e  $B$ . Deixamos ao seu encargo verificar que:

$$A = -\frac{a}{4m\omega_0^2}, \quad B = 0. \quad (3.20)$$

Após algumas manipulações trigonométricas, podemos verificar

que a solução (3.19) com as condições iniciais dadas se escreve como:

$$x(t) = \frac{at}{2m\omega_0} \text{sen}(\omega_0 t) . \quad (3.21)$$

Note que a amplitude aumenta linearmente com o tempo, portanto, após determinado período de tempo a amplitude do movimento harmônico excede ao tamanho natural da mola, provocando uma alteração no regime elástico da mola e uma posterior ruptura. O efeito da ressonância é muito importante e deve ser previsto pelos engenheiros na construção civil para se evitar desastres causados por fenômenos naturais. O exemplo mais famoso de um acidente provocado pelo efeito de ressonância é o caso da queda da ponte de Tacoma, construída sobre o estreito de Tacoma, no estado de Washington, Estados Unidos. A ponte entrou em ressonância após ser atingida por ventos de 65km/h , entrando em colapso logo a seguir. Você pode assistir ao vídeo desse fascinante fenômeno no endereço:

- <http://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw>

Para concluirmos, devemos lembrar que as equações apresentadas acima, para o oscilador harmônico, são análogas às equações que descrevem o comportamento de circuitos elétricos envolvendo indutores, resistores e capacitores, chamados circuitos RLC, ou circuitos analógicos. Os primeiros computadores analógicos, surgidos na década de 40 do século passado, se baseavam nesse princípio, assim, era possível simular sistemas mecânicos reais “programando” um circuito que fosse análogo, isto é, que tivesse as mesmas propriedades. Temos, ainda, que dizer que o oscilador harmônico é um modelo paradigmático na física. Com isso, veremos dizer que uma variedade de fenômenos e sistemas físicos pode ser modelada por meio de osciladores harmônicos. A utilização de osciladores harmônicos, por exemplo, pode modelar as propriedades térmicas dos sólidos, as propriedades óticas dos materiais, a radiação de corpo negro, a interação entre o campo eletromagnético e as partículas eletricamente carregadas, entre outros fenômenos naturais.

## Exercícios

- 27) Verifique que as condições iniciais  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  na solução (3.16) fixam as constantes  $A$  e  $B$  conforme dado em (3.17).
- 28) Utilize as fórmulas de soma de arco em trigonometria para concluir que a solução geral (3.16) com as condições iniciais acima toma realmente a forma (3.17).
- 29) Verifique que as condições iniciais  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  na solução (3.19) fixam as constantes  $A$  e  $B$  conforme dado em (3.20).
- 30) Utilize as fórmulas de soma de arco em trigonometria para concluir que a solução geral (3.19) com as condições iniciais acima toma realmente a forma (3.21).
- 31) Resolva, utilizando o método de variação de parâmetros, o caso de um oscilador harmônico super amortecido sujeito a uma força externa dada por:

$$F(t) = a \operatorname{sen}(\omega t).$$

### 3.4.2 Movimento sob atração gravitacional

Desde a antiguidade, corpos celestes povoam o imaginário do ser humano. A ideia que a posição dos astros no céu possa ter alguma conexão com o destino das pessoas é quase tão antiga quanto à civilização. Havia, no entanto, uma classe de corpos celestes que intrigava ainda mais os estudiosos da antiguidade. Certos astros pareciam se mover, no decorrer do ano, em relação ao pano de fundo das estrelas fixas no firmamento. Esses corpos celestes foram denominados planetas (*πλανήτης* -planetes, que significa “aquele que vagueia”), pois eram errantes na abóboda celeste. O movimento dos planetas é extremamente complexo, se observado da superfície da Terra. A primeira teoria completa sobre o movimento dos planetas foi elaborada por Cláudio Ptolomeu, no século II da era cristã. Essa teoria é conhecida na literatura como sistema geocêntrico. Basicamente, Ptolomeu considerava, como todos de sua época, a Terra como o centro do universo, sendo que o Sol, a Lua, os planetas e as estrelas, orbitavam ao redor da Terra. O comportamento errático do movimento dos planetas era explicado com o auxílio de epiciclos, isto é, esferas secundárias que orbitavam ao redor da esfera celeste e sobre as quais orbitavam os

planetas. Assim, o movimento complexo dos planetas seria o resultado da composição de dois, ou mais, movimentos circulares, formando curvas que são denominadas epicicloides.

Somente no início do século XVI é que houve uma revolução na forma como compreendemos o movimento dos planetas. Foi o astrônomo polonês Nicolau Copérnico que propôs uma inversão no modo com que os corpos celestes se distribuem no espaço. Segundo a teoria de Copérnico, conhecida como sistema heliocêntrico, o Sol ocupava o centro do universo, sendo que a Terra e os outros planetas orbitavam ao redor dele. O movimento caótico dos planetas então seria resultado do movimento relativo entre o movimento da Terra e do planeta em questão. A teoria heliocêntrica foi aperfeiçoada graças aos esforços do astrônomo alemão Johannes Kepler, que a partir de dados observacionais colhidos por ele mesmo e por seu mestre, o astrônomo Tycho Brahe, concluiu que as órbitas dos planetas são de fato elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da elipse, e não circulares, como se acreditava até então. Mas ainda faltava uma explicação plausível sobre a causa dos movimentos planetários observados pelos astrônomos. A compreensão dos mecanismos que impulsionam o movimento dos corpos celestes, bem como a queda livre dos corpos sobre a superfície da Terra, foi conquistada graças ao gênio do maior físico de todos os tempos, Sir Isaac Newton. Foi Newton que elaborou a teoria que explicava completamente a dinâmica da atração gravitacional entre os corpos e com o auxílio de um forte aparato matemático, foi capaz de explicar as órbitas planetárias como resultado do movimento causado pela gravitação universal.

*Para a época, a ideia de que poderiam existir inúmeros outros sistemas solares e que o universo seria homogêneo, não havendo, portanto, um ponto privilegiado ao qual poderíamos chamar de centro, era uma ideia ainda impensável. O filósofo italiano Giordano Bruno, nascido em Nola, Itália, em 1548, foi executado em Roma, no Campo dei Fiori em 17 de fevereiro de 1600, sob a acusação de heresia, entre outras coisas, por propor que o universo pudesse conter outros sistemas solares, com outros planetas habitados, outros seres inteligentes, etc.*

Nosso objetivo nessa seção é mostrar como se pode obter a forma das órbitas planetárias a partir da resolução de uma EDO determinada pela lei da gravitação universal de Newton. Antes, porém, precisamos estabelecer algumas notações que serão úteis no decorrer da seção. Em primeiro lugar, como as grandezas envolvidas são grandezas vetoriais no espaço euclidiano tridimensional, vamos denotá-las por letras em negrito:

O vetor posição:  $\vec{r} = (x, y, z)$ .

- O vetor velocidade:  $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (v_x, v_y, v_z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ .
- O vetor momento linear:  $\vec{p} = m \cdot \vec{v} = (p_x, p_y, p_z) = (m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z})$ .

- O vetor momento angular:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (L_x, L_y, L_z) = (yp_z - zp_y, zp_x - xp_z, xp_y - yp_x).$$

Enquanto os módulos das grandezas vetoriais serão denotados pelas mesmas letras que a grandeza vetorial, mas no formato normal:

- O raio, módulo do vetor posição:  $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
- A velocidade total:  $v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ .
- O momento linear total:  $p = \|\vec{p}\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ .
- O momento angular total:  $L = \|\vec{L}\| = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$ .

Com o auxílio destas definições prévias, podemos ainda definir o raio vetor unitário,  $\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ . Esse vetor é importante para expressarmos a atração gravitacional, que é dada pela lei de Newton:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (3.22)$$

onde  $G$  é a constante da gravitação universal,  $M$  será a massa do Sol, que estará localizado na origem do sistema de coordenadas e  $m$  é a massa do planeta cuja órbita queremos determinar. O sinal negativo na lei de força apenas nos diz que a força é atrativa.

Se considerarmos a força gravitacional, dada pela fórmula (3.22), em todos os pontos do espaço, obteremos um campo vetorial, que será chamado de campo gravitacional. Esse campo é um exemplo de campo de forças central, isto é, um campo de forças cuja lei de formação somente mantém a dependência do raio, ou seja, um campo da forma  $\vec{F} = F(r)\hat{\mathbf{e}}_r$ . Os campos de força centrais possuem uma propriedade muito importante, a conservação do momento angular, conforme veremos no resultado abaixo.

**Teorema 3.3.** Um corpo se movendo sob a influência de um campo de forças central mantém seu momento angular constante ao longo de sua trajetória.

### Demonstração.

Considere um corpo de massa  $m$  se movendo sob a influência de um campo de forças central dado pela expressão  $\vec{F} = F(r)\hat{e}_r$ . Seja  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  o vetor posição em cada instante  $t$ . Ao longo de sua trajetória, seu momento angular será dado por:

$$\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{p}(t).$$

Derivando-se a expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt}(t) &= \dot{\vec{r}}(t) \times \vec{p}(t) + \vec{r}(t) \times \dot{\vec{p}}(t) = \\ &= \dot{\vec{r}}(t) \times m\dot{\vec{r}}(t) + \vec{r}(t) \times \vec{F}(t) = \\ &= m(\dot{\vec{r}}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)) + \vec{r}(t) \times F(r(t)) \frac{\vec{r}(t)}{r(t)} = \\ &= m(\dot{\vec{r}}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)) + \frac{F(r(t))}{r(t)} (\vec{r}(t) \times \vec{r}(t)) = 0. \end{aligned}$$

Disso, temos o resultado desejado.

□

Da conservação do momento angular, podemos inferir duas consequências imediatas:

**Corolário 3.1.** Em um movimento sob um campo de forças central, as trajetórias permanecem sempre no mesmo plano.

### Demonstração.

Seja  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  o vetor posição em cada instante  $t$  e  $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$  a posição em um momento fixado. Seja ainda  $\vec{L}$  o vetor momento angular do corpo, que sabemos ser um vetor constante, e avaliemos a função:

$$f(t) = \langle \vec{r}(t) - \vec{r}_0, \vec{L} \rangle.$$

É fácil ver que o seu valor em  $t = t_0$  é igual a 0. Vejamos agora o que ocorre com a derivada em relação ao tempo da função  $f(t)$ :

$$\frac{df}{dt}(t) = \langle \dot{\vec{r}}(t), \vec{L} \rangle + \langle \vec{r}(t) - \vec{r}_0, \dot{\vec{L}} \rangle = 0,$$

onde o primeiro termo se anula devido ao fato de o momento angular ser sempre um vetor perpendicular ao plano gerado pelo vetor posição e pelo vetor velocidade em cada ponto e o segundo termo se anula pois o momento angular é constante. Portanto, os vetores  $\vec{r}(t) - \vec{r}_0$  estão no plano perpendicular ao vetor momento angular para todo instante  $t$ , o que garante que a trajetória está localizada sobre esse plano.

□

Para verificarmos a segunda das consequências, vamos fazer algumas simplificações. Como a trajetória do corpo em movimento é plana, podemos, sem perda de generalidade, escolher as coordenadas de forma que o plano  $(x, y)$  coincida com o plano da órbita e o eixo  $z$  esteja na direção do vetor momento angular. Em segundo lugar, como o campo de forças é do tipo central, podemos trabalhar com coordenadas polares no plano da órbita. Assim, a trajetória poderá ser escrita como uma curva em coordenadas polares  $r = r(\theta)$ . A segunda consequência direta da conservação do momento angular refere-se às áreas dos setores centrais determinados pelo raio vetor, isto é, o raio que liga a origem do sistema de coordenadas ao corpo em movimento, conforme nos ilustra a Figura 3.9.

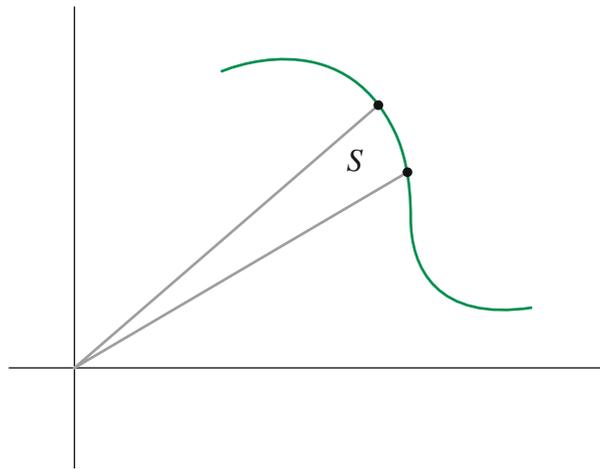


Figura 3.9 - Setor central de uma curva em coordenadas polares.

**Corolário 3.2.** (Segunda lei de Kepler) O raio vetor de um corpo movendo-se sob um campo de forças central varre áreas iguais de setores centrais em intervalos de tempo iguais.

### Demonstração.

Primeiramente, lembremo-nos que a área de um setor central de uma curva, em coordenadas polares entre dois ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , é dada pela expressão:

$$A(S) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\vartheta) d\vartheta.$$

Se o ângulo  $\theta$  depende do tempo, podemos fixar um instante  $t_0$  e definir, a partir da expressão acima, a área como uma função do tempo:

$$A = A(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t r^2(\theta(\tau)) \dot{\theta}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t r^2(\tau) \dot{\theta}(\tau) d\tau.$$

Se derivarmos  $A(t)$  em relação ao tempo, teremos  $\frac{dA}{dt}(t) = r^2(t) \dot{\theta}(t)$ . Só nos resta verificar que  $\frac{dA}{dt}$  é uma função constante, que é equivalente a dizer que o raio vetor varre áreas iguais em tempos iguais. Isso será verificado devido à conservação do momento angular.

A expressão do vetor momento angular escrito em coordenadas polares é dada por:

$$L = r \times mv = m \cdot \det \begin{pmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ r \cos(\theta) & r \sin(\theta) & 0 \\ \dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \cdot \dot{\theta} & \dot{r} \sin(\theta) + r \cos(\theta) \cdot \dot{\theta} & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, r^2 \dot{\theta}).$$

Assim, temos que  $L = mr^2 \dot{\theta}$ , que é constante, uma vez que o vetor momento angular é constante. Portanto  $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{m}$  também é constante, como queríamos provar.

□

Os três últimos resultados são válidos para qualquer campo de força central, mas o campo gravitacional dado pela fórmula (3.22) possui uma propriedade extra: também é um campo conservativo. É fácil ver, e deixamos ao seu encargo a verificação dos detalhes, que o campo vetorial dado em (3.22) é escrito como, menos o

gradiente da função potencial:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

Assim, a energia total se escreve como:

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r) = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}. \quad (3.23)$$

Desenvolvendo a expressão da velocidade total em coordenadas polares, uma vez que o vetor velocidade é dado por:

$$v = (\dot{r} \cos(\theta) - r \sin(\theta) \cdot \dot{\theta}), \dot{r} \sin(\theta) + r \cos(\theta) \cdot \dot{\theta},$$

temos que  $v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}$ . Substituindo em (3.23), obtemos:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V(r), \quad (3.24)$$

onde  $V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$  é o potencial efetivo do sistema. Note que esse potencial efetivo nos ajuda a entender porque os planetas não caem definitivamente sobre o Sol, uma vez que a força gravitacional é atrativa. Quando o raio  $r$  se torna muito pequeno, o termo do potencial que depende do momento angular fica dominante, isso significa que o corpo começa a girar mais rapidamente ao redor do centro de atração (o Sol). O aumento dessa velocidade tangencial faz com que o corpo tenda a ser arremessado para fora dessa órbita na direção tangencial, logo o corpo se afasta do Sol, aumentando o raio, fazendo assim com que o termo relativo à atração gravitacional volte a ser dominante, não deixando o corpo escapar. Esse equilíbrio sutil, entre o momento angular e a atração gravitacional, é que faz com que o corpo permaneça em uma órbita ao redor do centro de atração gravitacional.

A partir da expressão (3.24), podemos concluir que:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r))} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2 r^2} + \frac{2GM}{r}}.$$

A órbita do corpo em movimento sob ação do campo gravitacional será dada como uma curva em coordenadas polares, que escreveremos como  $\theta = \theta(r)$ , assim:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(r))}}.$$

Integrando a expressão acima com relação a  $r$ , teremos (considerando, sem perda de generalidade, o ângulo inicial  $\theta_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \int_{r_0}^r \theta'(\rho) d\rho = \int_{r_0}^r \frac{\frac{L}{m\rho^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(\rho))}} d\rho = \\ &= \int_{r_0}^r \frac{\frac{L}{m\rho^2}}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2\rho^2} + \frac{2GM}{\rho}}} d\rho = \\ &= \frac{L}{m} \int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r_0}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{L^2\lambda^2}{m^2} + 2GM\lambda}} = \\ &= \frac{L}{m} \int_{\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r_0}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\left(\frac{2E}{m} + \left(\frac{GMm}{L}\right)^2\right) - \left(\frac{L\lambda}{m} - \frac{GMm}{L}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Fazendo uma substituição de variáveis na última integral da forma:

$$\left(\frac{L\lambda}{m} - \frac{GMm}{L}\right) = \sqrt{\frac{2E}{m} + \left(\frac{GMm}{L}\right)^2} \cos(\alpha)$$

e fazendo:

$$\theta_0 = \arccos \frac{\frac{L}{mr_0} - \frac{GMm}{L}}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \left(\frac{GMm}{L}\right)^2}},$$

teremos:

$$\theta(r) = \arccos \frac{\frac{L}{mr} - \frac{GMm}{L}}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \left(\frac{GMm}{L}\right)^2}} = \arccos \frac{\frac{L^2}{GMm^2r} - 1}{\sqrt{\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3} + 1}}.$$

Introduzindo as seguintes designações:

$$P = \frac{L^2}{GMm^2r}, \quad e = \sqrt{\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3} + 1},$$

obtemos:

$$\theta = \arccos \frac{\frac{P}{r} - 1}{e},$$

ou seja:

$$r = \frac{P}{1 + e \cdot \cos(\theta)}, \quad (3.25)$$

*Veja a última seção do capítulo anterior para mais detalhes.*

que é a equação polar de uma **cônica**, com o fator  $e$  conhecido como excentricidade. Se a energia total é menor que 0, isso implica que  $e < 1$ , então temos uma elipse, nesse caso, um dos focos da elipse corresponde exatamente à origem do sistema de coordenadas. Se a energia total é exatamente igual a 0, então temos uma parábola. Finalmente, para energias totais positivas, temos a excentricidade  $e > 1$ , que corresponde a uma hipérbole.

## Exercícios

32) Verifique que, de fato, a força gravitacional  $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{e}_r$ , é

igual a menos o gradiente da função potencial  $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ .

33) A partir da equação da elipse dada em (3.25) (com  $e < 1$ ) determine o comprimento dos semieixos menor e maior da **elipse**.

*Veja a última seção do capítulo anterior para mais detalhes.*

34) Utilizando a relação que existe entre a área varrida pelo raio vetor e o momento angular, determine uma expressão para o período de órbita de um planeta em órbita elíptica com semieixos  $a$  e  $b$ .

35) Utilize os exercícios 2) e 3) e as expressões de  $P$  e  $e$  obtidas como solução da equação de movimento, para mostrar que o quadrado do período de órbita de um planeta é diretamente proporcional ao cubo do semieixo maior.

36) Faça os detalhes da integração para a obtenção da equação polar da órbita.

### 3.5 O discreto e o contínuo

Muitos problemas físicos reais envolvem equações diferenciais cuja solução analítica não pode ser obtida de forma direta. Nesse caso, tornam-se necessários métodos aproximados de obtenção de soluções. Um dos métodos utilizados é a linearização do problema original e o tratamento via perturbações, isto é, a equação diferencial original e suas soluções podem ser obtidas a partir da solução do problema linearizado por meio de séries de potências de um parâmetro de perturbação. A precisão será tão mais acurada quanto maior for a quantidade de termos calculados na série. Esse procedimento já foi apresentado no tratamento do pêndulo simples. Outro método utilizado é tentar diretamente uma solução de série de potências, utilizando a equação diferencial e as condições iniciais para obter uma relação de recorrência entre termos da série. Novamente, a precisão dependerá do número de termos calculados na série. Esse método, em particular, só funciona quando na EDO não existem termos com funções transcendentais.

No entanto, a maioria dos problemas envolvendo EDOs requer a utilização de computadores como instrumentos auxiliares na obtenção de soluções. As soluções computacionais, ou soluções numéricas, muito embora não sejam totalmente exatas, oferecem duas vantagens no que tange às aplicações. Em primeiro lugar, fornecem dados numéricos, com a precisão necessária para a análise do problema, seja ele a propagação de uma mancha de óleo no mar, a distribuição das forças em uma ponte metálica ou a estimativa de controle de uma determinada praga em uma plantação. Em segundo lugar, a velocidade de cálculo dos computadores nos permite obter essas soluções em tempo hábil e com os dados numéricos, dependendo da precisão, podemos ainda fazer representações gráficas das soluções da equação, mesmo que não saibamos exatamente qual a função que corresponde à solução exata do problema.

Para implementarmos uma solução numérica, é necessário adaptarmos os dados da equação para o modo adequado para o tratamento computacional. Um computador é uma máquina finita, assim processos infinitários e contínuos não são entendidos pela máquina. Não existem limites, derivadas e integrais para um

computador, somente casas decimais até o limite da memória da máquina e operações aritméticas elementares. Assim, é necessário o processo de discretização do problema. Vamos exemplificar com um problema de valores iniciais simples:

$$x' = \lambda x \quad , \quad x(0) = x_0 .$$

É claro que esse problema pode ser resolvido diretamente, sem o auxílio de métodos numéricos. Nosso objetivo é apenas dar-mos um exemplo de como fazemos a resolução numérica sem entrarmos nos detalhes técnicos envolvidos. Os métodos numéricos de resoluções de equações diferenciais, tanto ordinárias como parciais, constituem-se em um ramo importantíssimo da matemática, com muitos resultados profundos e técnicas elaboradas. Nos capítulos posteriores, você irá ver outras técnicas utilizadas para a resolução computacional de equações diferenciais parciais (EDPs).

Voltemos ao problema em questão: Nosso objetivo é calcular o valor de  $x(t)$ , para algum  $t > 0$ . Então dividamos o intervalo  $[0, t]$  em  $n$  subintervalos iguais, todos de comprimento  $\frac{t}{n}$ . Agora, definamos os valores:

$$x_1 = x\left(\frac{t}{n}\right), \quad x_2 = x\left(\frac{2t}{n}\right), \dots, \quad x_k = x\left(\frac{kt}{n}\right), \dots, \quad x_n = x\left(\frac{nt}{n}\right) = x(t) .$$

Como dissemos, as derivadas não podem ser calculadas em uma máquina, assim, precisamos aproximar as derivadas por diferenças finitas. Por exemplo, suponhamos que queiramos calcular a derivada em  $\frac{kt}{n}$ , devemos fazer a seguinte aproximação:

$$x'\left(\frac{kt}{n}\right) = \frac{x_k - x_{k-1}}{\left(\frac{t}{n}\right)} .$$

Assim, a EDO original fica:

$$\lambda x_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{\left(\frac{t}{n}\right)} ,$$

e após uma simples manipulação algébrica, obtemos:

$$x_k = \frac{x_{k-1}}{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)}, \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

Essa é uma relação recursiva que nos permite escrever  $x_k$  em função da condição inicial  $x_0 = x(0)$ :

$$x_k = \frac{x_{k-1}}{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)} = \frac{x_{k-2}}{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^2} = \frac{x_{k-3}}{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^3} = \dots = \frac{x_0}{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^k}.$$

Assim, teremos:

$$x(t) = x_n = \frac{x_0}{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n}.$$

Como dissemos, a precisão será melhor à medida que o número de divisões for maior, ou seja, à medida que  $n$  for maior. Nesse exemplo, podemos calcular exatamente o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , mas lembre-se, isso o computador não pode fazer:

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_0}{\left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n} = \frac{x_0}{e^{-\lambda t}} = x_0 \cdot e^{\lambda t}.$$

Você deve ter notado que ao passarmos de um regime contínuo para um discreto, obtemos uma simplificação substancial, pois as equações diferenciais se tornam equações de diferenças, cuja resolução, em geral, envolve um processo recursivo, ou seja, conhecidas as condições iniciais, é possível conhecer completamente todas as variáveis envolvidas.

A discretização também é útil na modelagem de problemas físicos para a obtenção da equação que rege o fenômeno. Em geral, um processo contínuo se torna menos acessível à nossa intuição que um processo discreto. Assim, discretizamos o problema, para entendermos seus mecanismos de funcionamento. A seguir, voltamos ao contínuo, para então escrevermos a equação diferencial, ordinária ou parcial, que descreve o problema. Eventualmente, podemos ter que retornar ao regime discreto para podermos obter alguma solução para o problema.

Vejamos um exemplo de modelagem de um fenômeno contínuo utilizando a discretização como ferramenta heurística:

*A heurística trata do processo de pensamento envolvido na resolução de problemas, inclusive, tentativas e erros, conjecturas, hipóteses, comparações, reduções a casos mais simples, etc. Em geral, a redação final de um texto de matemática não explicita a heurística utilizada no desenvolvimento deste ou daquele tópico, deixando a impressão que matemática é uma ciência que já nasce acabada, sem a possibilidade de erros e praticada somente por seres sobre humanos.*

Considere um recipiente de volume  $V$ , inicialmente cheio de vinho. No recipiente existem duas torneiras, uma que deposita água no recipiente a uma vazão  $r$  (unidades de volume/unidade de tempo). A segunda torneira retira a mistura homogênea do recipiente com a mesma vazão (considere desprezível o tempo necessário para tornar a mistura homogênea). Calcule a concentração de vinho, isto é, a razão entre o volume de vinho e o volume total da mistura, em um instante  $t$ . O que o problema requer é, basicamente, que se calcule o volume de vinho em função do tempo  $v(t)$ , uma vez que a concentração será somente a razão  $\frac{v(t)}{V}$ . Note que esse problema possui a complicação que o volume de vinho varia instantaneamente, assim, podemos tratar esse problema com uma versão discretizada: Agora, no recipiente de volume  $V$ , a cada intervalo de tempo  $\Delta t$ , derrama-se uma quantidade de água igual à que seria depositada pela torneira durante o mesmo período de tempo, caso estivesse aberta, no caso  $r \cdot \Delta t$ , e retira-se um vasilhame com a mesma quantidade da mistura homogênea de água e vinho (novamente, consideramos que imediatamente ao colocar-se a água a mistura já se torna homogênea).

No instante  $t$ , temos o volume de vinho igual a  $v(t)$  e a concentração igual a  $\frac{v(t)}{V}$ . No instante  $t + \Delta t$ , temos o volume de vinho  $v(t + \Delta t)$ , que será igual a  $v(t)$  menos a quantidade de vinho que foi retirada, que corresponde a  $r \cdot \Delta t \cdot \frac{v(t)}{V}$ . Assim, teremos:

$$v(t + \Delta t) = v(t) - \frac{r \cdot \Delta t \cdot v(t)}{V},$$

ou ainda:

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = -\frac{r}{V} v(t).$$

Você já deve ter notado, nesse momento, que ao retornarmos para o regime contínuo, ou seja, ao fazermos o limite  $\Delta t \rightarrow 0$  e considerando os dados do problema, obteremos o problema de valores iniciais:

$$v' = -\frac{r}{V} v, \quad v(0) = V,$$

cuja solução é facilmente obtida, sendo igual a:

$$v(t) = V \cdot \exp\left(-\frac{r}{V}t\right).$$

Para encerrarmos, devemos lembrar também que, em física, muitas vezes o processo contrário também pode ser útil, ou seja, utiliza-se o regime contínuo para estudar o comportamento de sistemas discretos. Esse procedimento, que não teremos a oportunidade de abordar nesse livro, é frequentemente utilizado no estudo de sistemas de muitos corpos, nos quais o comportamento individual de cada um dos corpos envolvidos não interessa tanto, mas apenas os processos coletivos. Exemplo comum deste tipo de sistema são os gases. Um gás é um sistema com um número muito grande de partículas em movimento, mas o que nos interessa não é a posição e a velocidade individual de cada uma de suas moléculas e, sim, o resultado coletivo desse movimento, como pressão, temperatura, etc. Para muitos desses cálculos, é significativamente mais simples considerar o sistema como algo contínuo, como um fluido, ao invés de considerá-lo como um sistema discreto de muitas partículas. Esse regime contínuo ao qual o gás é reduzido denomina-se limite termodinâmico.

## Bibliografia comentada:

[1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

**Essa é uma referência básica para quem está interessado em aprender técnicas de resolução de equações diferenciais. Além das apresentadas nesse capítulo, o livro trata de resolução de EDOs por séries de potências, transformada de Laplace, métodos numéricos e ainda aborda o início da teoria de EDPs e de séries de Fourier.**

[2] BUTKOV, E. **Física matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1988.

**Esse livro oferece um compêndio de técnicas utilizadas em Física Matemática, aborda tópicos que vão desde o cálculo vetorial e funções de variável complexa até EDOs e EDPs, bem como diversas técnicas de resolução. Discute-se também a teoria de funções**

especiais que surgem na resolução de certas EDOs e EDPs.

[3] MACHADO, K. D. *Equações diferenciais aplicadas à física*. 3. ed. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2004.

Esse é um livro escrito por um físico para mostrar o uso de equações diferenciais, tanto EDOs quanto EDPs, na modelagem de problemas físicos. O livro aborda basicamente os mesmos conteúdos da referência [1], mas os cálculos são desenvolvidos com mais detalhes.

[4] WATARI, K. *Mecânica clássica*. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2003. v. 1-2.

Essa referência trata dos problemas mecânicos abordados nesse capítulo, além de muitos outros, que por questão de espaço, não podemos abordar. A vantagem desse livro é a riqueza de detalhes apresentada nos cálculos, muito além de qualquer referência básica de mecânica clássica utilizada nos cursos de Física.

[5] ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. 1. ed. São Paulo: Pioneira, 2003.

Esse é um livro de matemática aplicada, onde os exemplos de equações diferenciais são abordados de forma a resolver problemas reais. Muito bom para quem deseja ver o poder das equações diferenciais para a modelagem matemática do dia a dia. O livro também aborda equações diferenciais sob três perspectivas: a analítica, no sentido de encontrar soluções exatas (quando isso é possível), a qualitativa, no estudo do comportamento das soluções garantido por teoremas de existência, unicidade e estabilidade, e por fim, a numérica, mais comum quando se trata de problemas reais com aplicações.



## 4 Equação da Corda Vibrante



## 4 Equação da Corda Vibrante

*A equação da corda vibrante pertence a uma vasta classe de equações da Física Matemática chamada classe de equações hiperbólicas. Equações desse tipo descrevem processos de vibrações em diferentes problemas da Física: ondas sonoras na Acústica, ondas eletromagnéticas na Eletrodinâmica, ondas do mar na Oceanografia, etc. Neste capítulo vamos considerar um exemplo simples de uma equação da onda unidimensional – uma equação da corda vibrante.*

### 4.1 Dedução da equação da corda vibrante

Consideremos uma corda de comprimento  $L$  que, devido a uma força de tensão horizontal  $T$ , ocupa na posição de equilíbrio o intervalo  $[0, L]$ , do eixo  $OX$ . Quando a corda entra em vibração, seus pontos se afastam da posição de equilíbrio. Vamos supor que a vibração de todos os pontos da corda ocorra num mesmo plano, com o sistema de coordenadas  $(x, u)$  e seja  $u(x, t)$  o deslocamento transversal ao eixo  $X$ , do ponto da corda com abscissa  $x$ , no instante do tempo  $t$ .

Vamos supor que a corda tem densidade linear constante  $\rho$ , é fina (podemos desprezar a força de gravidade) e é flexível (em qualquer ponto da corda a força de tensão é direcionada ao longo da tangente em qualquer instante do tempo  $t$ ). Vamos supor também que a corda está sujeita a uma força vertical (carga) com a densidade linear (força por unidade de comprimento)  $F(x, t)$ . Vamos considerar aqui somente pequenas vibrações da corda e vamos supor que  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \ll 1$ .

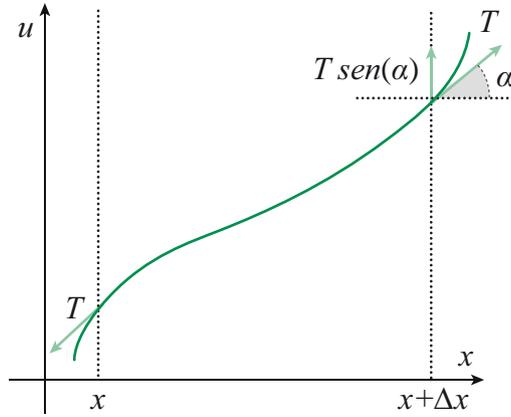


Figura 4.1

Nesse caso, para o comprimento de um elemento da corda entre os pontos  $x_1$  e  $x_2$  temos:

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2} dx \simeq \int_{x_1}^{x_2} 1 dx = x_2 - x_1,$$

portanto, o módulo da força de tensão  $|T|$  não depende de  $(x, t)$  e não há movimento na direção  $x$ , ou seja, somente vamos considerar vibrações transversais.

Para deduzir a equação que descreve vibrações transversais da corda, consideramos um intervalo arbitrário  $(x, x + \Delta x)$  da corda e aplicamos a 2ª Lei de Newton, para as projeções sobre o eixo  $u$ , de todas as forças aplicadas à corda. A força total aplicada a esse elemento resulta das componentes da força de tensão, aplicados nos extremos  $x$  e  $x + \Delta x$  e da componente da força externa. No extremo direito, a projeção de  $T$  sobre o eixo vertical é  $T \text{sen}(\alpha)$  (Figura 4.1), mas para pequenas vibrações  $\alpha \ll 1$  e, portanto:

$$T \text{sen}(\alpha) \approx T \tan(\alpha) = T \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Como no outro extremo temos uma força análoga, podemos escrever que a componente vertical da força da tensão é:

$$T \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T \frac{\partial u}{\partial x}(x, t);$$

Logo, a componente vertical da força total é:

$$T \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \int_x^{x + \Delta x} F(\xi, t) d\xi.$$

Aplicando à integral o Teorema do Valor Médio podemos reescrever a última expressão como:

$$T \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + F(\xi^*, t)\Delta x,$$

sendo  $x < \xi^* < x + \Delta x$ . A massa do elemento da corda é  $\rho\Delta x$  e a aceleração vertical é  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ . Portanto, da segunda lei de Newton, temos:

$$\rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = T \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + F(\xi^*, t)\Delta x$$

ou

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{T \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} + F(\xi^*, t).$$

Aplicando o limite nesta última equação quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , obtemos a equação da corda vibrante:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad T > 0.$$

Esta equação geralmente é escrita na forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad T > 0 \quad (4.1)$$

onde  $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$  e  $f = \frac{F}{\rho}$  e é conhecida como a equação da corda vibrante ou **equação da onda** (unidimensional).

Para definir o processo de vibração da corda infinita ( $-\infty < x < +\infty$ ), precisamos acrescentar condições iniciais à equação (4.1), ou seja, precisamos definir o perfil da corda  $\phi$  e a velocidade da corda  $\psi$  no instante inicial  $t = 0$ . Assim obtemos o problema de Cauchy ou problema de valor inicial (PVI):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (4.3)$$

No caso de uma corda limitada, além de condições iniciais, precisamos acrescentar à equação (4.1) condições de contorno. Essas

dependem de condições físicas dos extremos da corda. Por exemplo, quando ambas as extremidades da corda estão presas, temos as condições de contorno do 1º gênero homogêneas:

$$u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, t > 0. \quad (4.4)$$

Quando conhecemos o movimento dos extremos de corda, temos as condições de contorno do 1º gênero não homogêneas:

$$u(0,t) = \alpha(t), u(L,t) = \beta(t), t > 0, \quad (4.5)$$

sendo  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  funções dadas.

Para uma corda com extremos livres, temos as condições de contorno do 2º gênero homogêneas:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, t > 0, \quad (4.6)$$

e quando extremos não estão fixos, mas sujeitos a ação de uma força dada, temos condições de contorno do 2º gênero não homogêneas:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \alpha(t), \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \beta(t), t > 0, \quad (4.7)$$

sendo  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  funções dadas. E, finalmente, para uma corda com extremidades flexíveis (uma força elástica proporcional ao deslocamento do extremo que força a corda a ficar na posição de equilíbrio), temos as condições de contorno do 3º gênero:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \mu[u(0,t) - \alpha(t)], \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -\mu[u(L,t) - \beta(t)], t > 0, \quad (4.8)$$

sendo  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  funções dadas e  $\mu$  o coeficiente que caracteriza a flexibilidade das extremidades.

Por exemplo, quando  $\mu \rightarrow \infty$  (extremo preso), as condições (4.8) passam a ser condições do 1º gênero e quando  $\mu \rightarrow 0$  (extremo solto), passam a ser condições do 2º gênero. Combinando a equação (4.1) com as condições iniciais (4.3) e com uma das condições de contorno acima introduzidas, obtemos diferentes problemas de valor inicial e de contorno (PVIC) para a equação da onda. Por

exemplo, vibrações da corda com uma extremidade  $x = 0$  fixa e outra  $x = L$  solta são descritas pelo seguinte PVIC:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < L,$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

## Exercícios

**Nota:** Exercícios marcados com asterisco são optativos.

- 1) Uma corda flexível de comprimento  $l$  e presa num extremo, devido a seu peso, ocupa posição vertical no estado de equilíbrio. Deduza a equação e a fórmula do PVIC que descreve pequenas vibrações dessa corda vertical para o caso em que o outro extremo da corda está solto.
- 2) \*Consideremos a corda pesada do exercício anterior e suponha que essa corda gira em torno de um eixo vertical com velocidade angular constante  $\omega$ . Deduza a equação e a fórmula do PVIC que descreve pequenas vibrações da corda em relação ao eixo vertical.
- 3) Deduza a equação das vibrações de uma corda fina e flexível que se encontra num meio resistente (por exemplo, dentro da água), supondo que a força de resistência ao movimento da corda é proporcional à velocidade desta.

## 4.2 Problema de Cauchy para uma corda infinita – Método de d'Alembert

Nesta seção estudaremos a propagação das ondas numa corda infinita. Como mostrado acima, o problema de vibração de uma corda infinita é descrito pelo seguinte problema de Cauchy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (4.9)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (4.10)$$

onde  $\phi$  determina o perfil inicial da corda e  $\psi$  determina a velocidade inicial. Para encontrar a solução geral da equação (4.9), efetuamos a seguinte troca de variáveis:

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at,$$

Usando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = a \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Substituindo essas expressões para segundas derivadas na equação (4.9) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) - a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) = \\ &= -4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \end{aligned}$$

ou:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Reescrevendo essa última equação como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0$$

é fácil ver que  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  é uma função que depende somente de  $\eta$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, \eta) = f(\eta),$$

portanto, integrando essa última equação em  $\eta$ , obtemos:

$$u(\xi, \eta) = \int \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, \eta) d\eta = \int f(\eta) d\eta = F(\eta) + G(\xi)$$

sendo  $F(\eta) = \int f(\eta) d\eta$  e  $G(\xi)$  uma constante de integração arbi-

trária que depende de  $\xi$ . Voltando às variáveis iniciais, obtemos uma solução geral da equação da onda (4.9), dada pela forma:

$$u(x,t) = F(x-at) + G(x+at), \quad (4.11)$$

onde  $F$  e  $G$  são funções arbitrárias. Agora precisamos encontrar essas funções de tal forma que a solução (4.11) satisfaça as condições iniciais (4.10). Para isso, vamos substituir (4.11) em (4.10):

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = \phi(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = -aF'(x) + aG'(x) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Seja  $x_0 \in \mathbb{R}$  um número arbitrário. Integrando a última equação no intervalo  $(x_0, x)$ :

$$G(x) - F(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(s) ds + C,$$

sendo  $C$  uma constante arbitrária. Resolvendo o sistema:

$$F(x) + G(x) = \phi(x),$$

$$G(x) - F(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(s) ds + C,$$

encontramos:

$$F(x) = \frac{1}{2} \phi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(s) ds - \frac{C}{2},$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(s) ds + \frac{C}{2}.$$

Substituindo essas expressões para  $F$  e  $G$  na equação (4.11), obtemos:

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \left[ \int_{x_0}^x \psi(s) ds - \int_{x_0}^{x-at} \psi(s) ds \right],$$

ou:

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds. \quad (4.12)$$

Essa é a fórmula de d'Alembert que fornece (4.12) como solução do PVI (4.9) – (4.10).

**Exemplo 4.1** Usando a fórmula de d'Alembert resolva o PVI seguinte:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u(x,0) = x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2x.$$

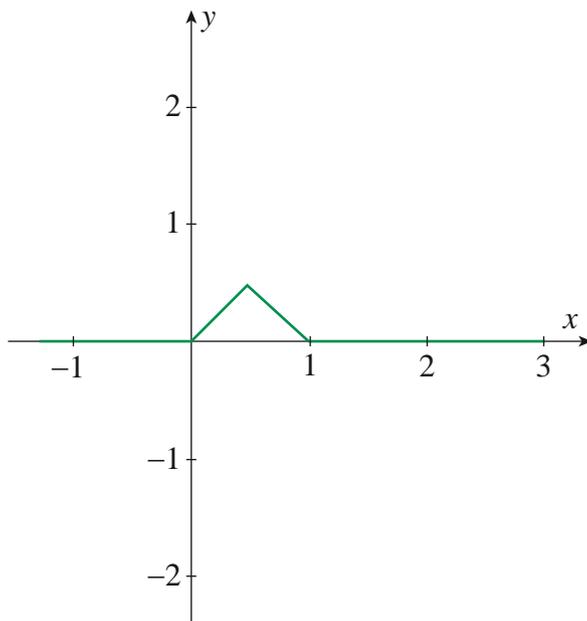


Figura 4.2 - Perfil inicial da corda.

**Resolução:**

Substituindo em (4.12)  $\phi = x^2$  e  $\psi = 2x$ , temos:

$$u(x,t) = \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 2s ds = \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2} + \frac{1}{2} s^2 \Big|_{x-t}^{x+t} =$$

$$= \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2} + \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2} = (x+t)^2.$$

Abaixo, apresentamos os exemplos da propagação das ondas numa corda para diferentes condições iniciais, usando o software Winplot [2].

**Exemplo 4.2** Vamos supor que uma corda infinita tem o perfil inicial triangular, como na Figura 4.2, e solta no instante  $t = 0$  (velocidade inicial igual a zero).

Como já vimos acima, o perfil da corda  $u(x,t)$ , no instante  $t$ , é definido como a solução do problema de valor inicial (4.9) – (4.10).

No nosso caso, a velocidade inicial da corda é nula ( $\psi = 0$ ) e a solução (4.12) é dada pela soma das duas ondas:

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2};$$

uma  $\phi(x-at)$ , se propaga para a direita e a outra  $\phi(x+at)$ , para a esquerda, com a velocidade  $a$ . O perfil de cada uma das ondas é definido no tempo inicial  $t = 0$  e é igual a  $\frac{1}{2}\phi(x)$ . A equação do impulso inicial triangular é:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x \leq 0.5, \\ 2(1-x), & 0.5 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Supomos para simplicidade que  $a = 1$ , então a equação da onda que vai para a direita é:

$$\phi(x-t) = \begin{cases} 0, & x-t \leq 0, \\ 2(x-t), & 0 < x-t \leq 0.5, \\ 2(t+1-x), & 0.5 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}, \text{ ou}$$

$$\phi(x-t) = \begin{cases} 0, & x \leq t, \\ 2(x-t), & t < x \leq t+0.5, \\ 2(t+1-x), & t+0.5 < x \leq t+1, \\ 0, & x > t+1. \end{cases}$$

Da mesma maneira, a onda que se propaga para a esquerda tem a equação:

$$\phi(x+t) = \begin{cases} 0, & x \leq -t, \\ 2x, & -t < x \leq -t+0.5, \\ 2(1-x), & -t+0.5 < x \leq -t+1, \\ 0, & x > -t+1. \end{cases}$$

Agora, só resta definir essas funções no Winplot e, fazendo a animação, observar a propagação da onda. Na Figura 4.3, apresentamos a posição da onda  $u(x,t)$ , junto com suas componentes  $0.5\phi(x-t)$  e  $0.5\phi(x+t)$ , em diferentes instantes do tempo  $t$ .

Como se pode ver, a onda inicial se decompõe em duas ondas iguais, as quais, mantendo seu perfil, se propagam à esquerda e à direita sobre a reta.

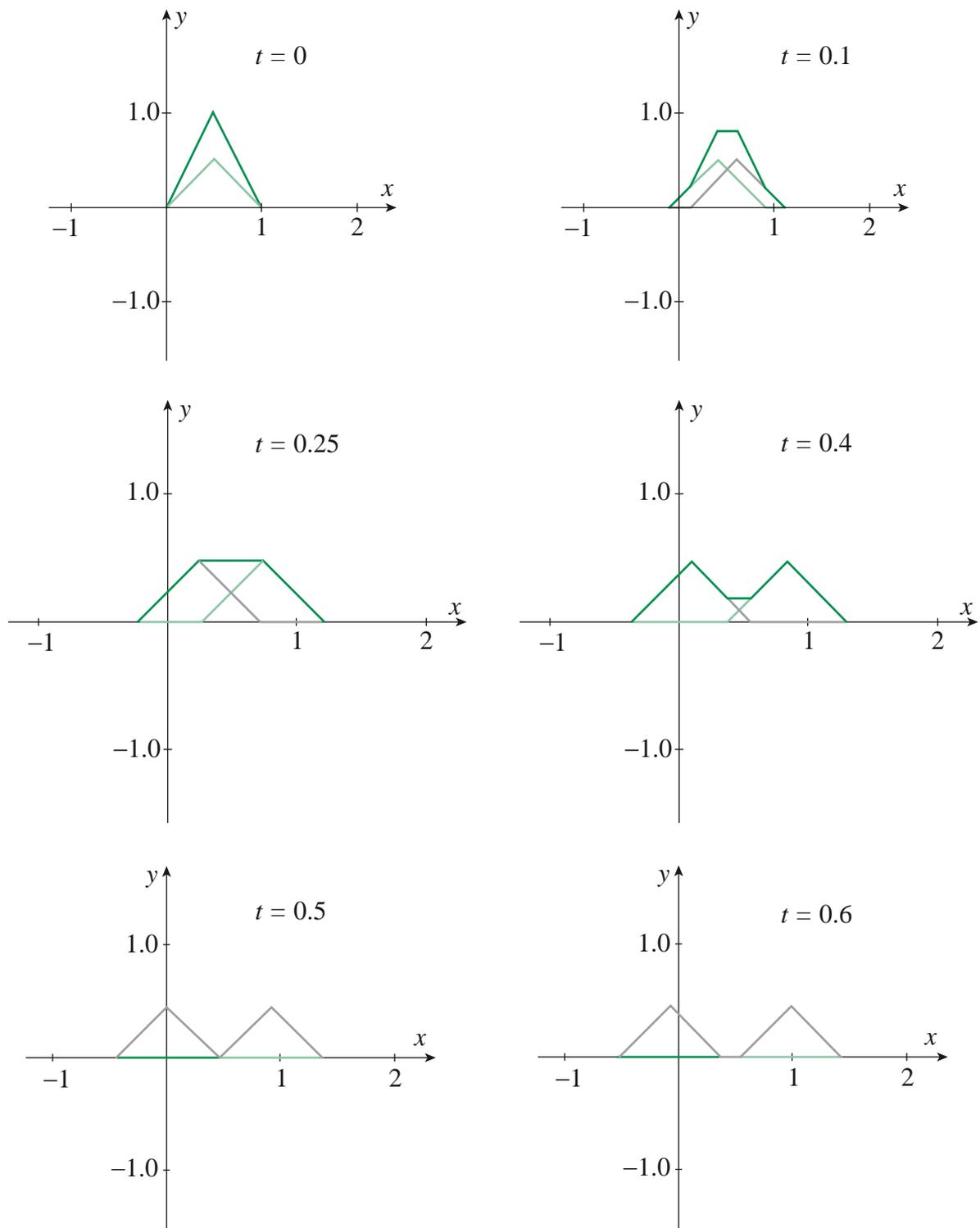


Figura 4.3 - Propagação da onda triangular.

**Exemplo 4.3** Vamos supor que uma corda infinita coincide com o eixo dos  $x$  no instante  $t = 0$  e tem o perfil da velocidade inicial

$\psi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Logo que ( $\phi = 0$ ), da equação (4.12) temos:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_{x-at}^{x+at} \frac{1}{1+s^2} ds = \frac{1}{2} \arctan(s) \Big|_{x-at}^{x+at} = \frac{1}{2} (\arctan(x+at) - \arctan(x-at)).$$

Supomos, para simplicidade, que  $a = 1$  e vamos plotar no Winplot o perfil da onda  $u(x,t)$ , em diferentes instantes do tempo  $t$  (Figura 4.4). Aqui, ao contrário do exemplo anterior, aparece só uma onda, que muda seu perfil com o percorrer do tempo, expandindo para todo o eixo.

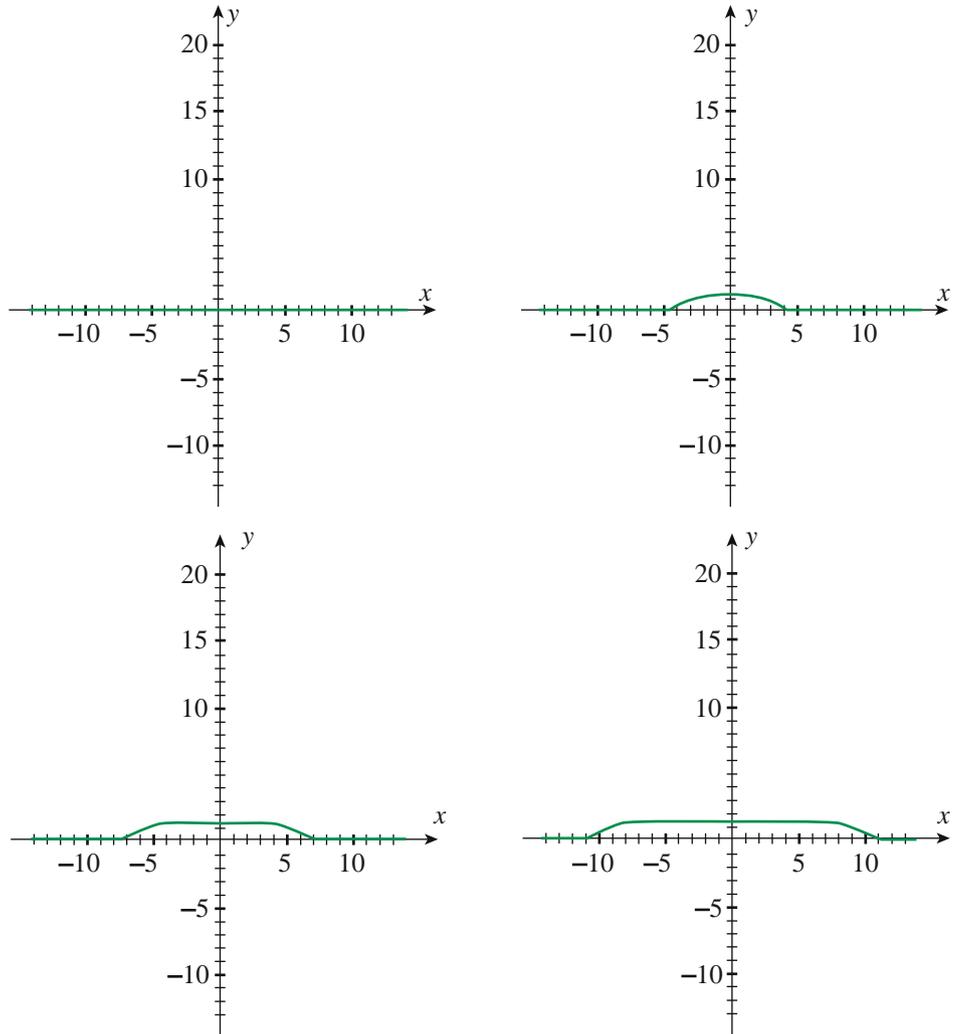
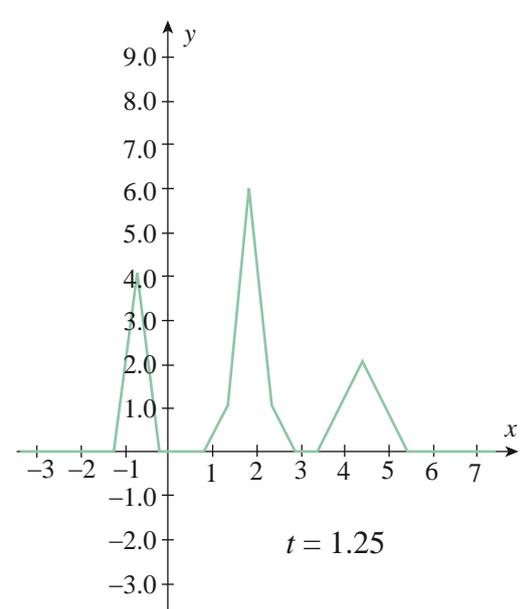
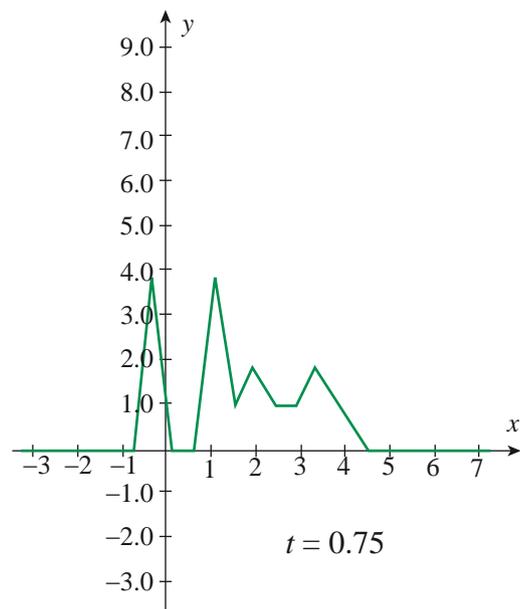
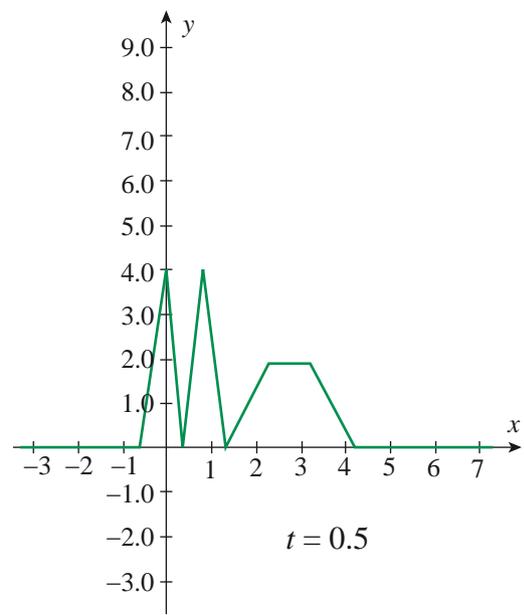
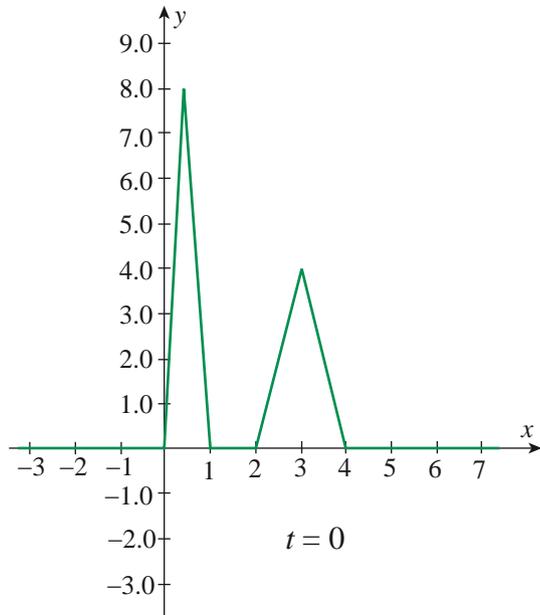


Figura 4.4 - Propagação da onda com a velocidade inicial  $\psi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . De cima para baixo e da esquerda para a direita:  $t = 0$ ,  $t = 3$ ,  $t = 6$  e  $t = 10$ .

**Exemplo 4.4** Neste exemplo consideremos a simulação de um fenômeno físico que se chama a interferência das ondas num caso simplificado de uma dimensão. Vamos supor que numa corda infinita, no instante  $t = 0$ , temos duas ondas triangulares, como é apresentado na Figura 4.5 e que a velocidade inicial da corda é igual a zero. Nesse caso, podemos usar a solução apresentada para cada onda triangular no Exemplo 4.2, e somando essas, obter a solução do problema.



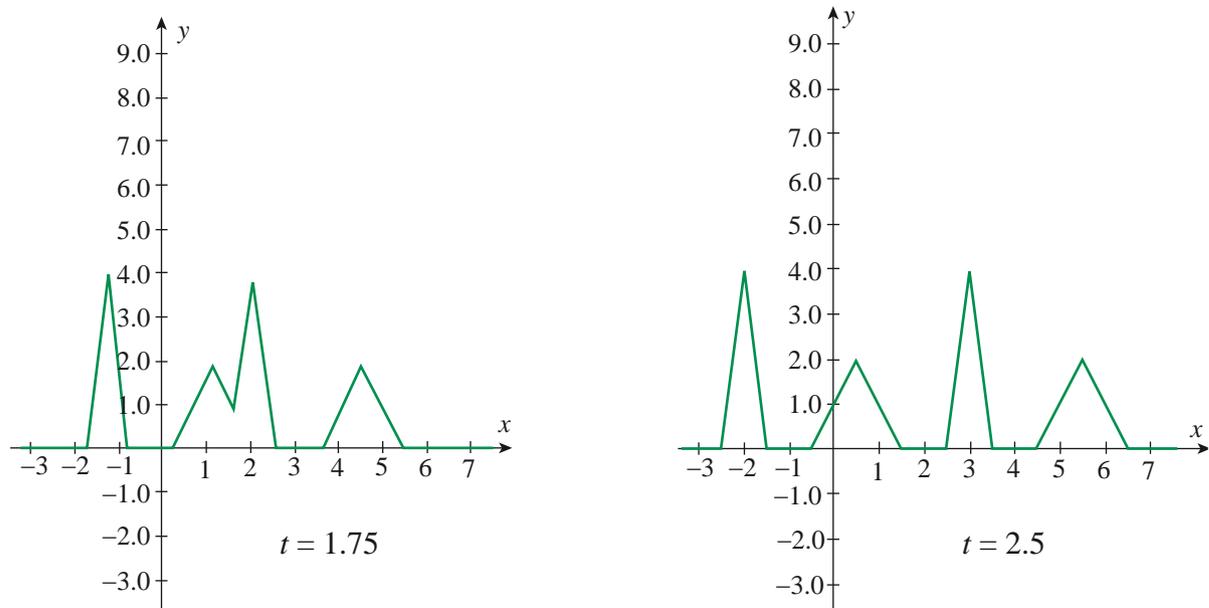


Figura 4.5. Interferência das ondas. De cima para baixo e da esquerda para a direita:  $t = 0, t = 0.5, t = 0.75, t = 1.25, t = 1.75$  e  $t = 2.5$ .

O resultado da simulação para diferentes valores de tempo pode ser observado na Figura 4.5. Como podemos ver, cada onda se decompõe em duas, como no exemplo 4.2; essas ondas interagem entre si, alterando sua forma, mas depois de passar uma por outra, recuperam a forma inicial e continuam indo para a esquerda e para a direita.

## Exercícios

4) Usando a fórmula de d'Alembert, resolva o PVI seguintes:

a)  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u(x, 0) = \text{sen}(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0;$

b)  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u(x, 0) = e^x, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0;$

c)  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, u(x, 0) = \text{sen}(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x + \cos(x).$

5) Programe em Winplot os exemplos 4.2, 4.3 e 4.4, e confira seus resultados com os apresentados nas Figuras 4.3, 4.4 e 4.5.

6) Use Winplot para fazer animação da vibração da corda com os seguintes dados iniciais:

- a) Perfil inicial apresentado na Figura 4.6(a), velocidade inicial igual a zero;
- b) Perfil inicial apresentado na Figura 4.6(b), velocidade inicial igual a zero.

Experimente diferentes valores dos parâmetros  $L$ ,  $h$  e  $c$ .

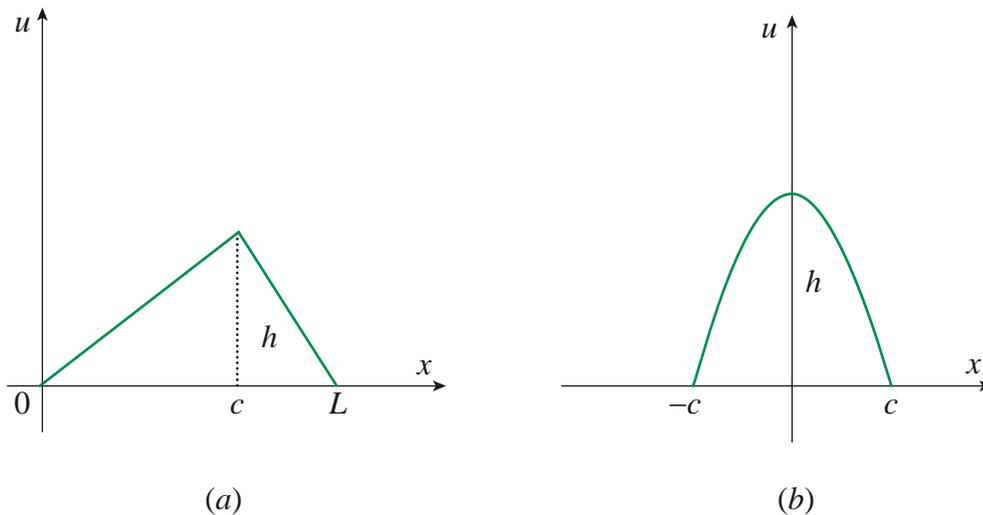


Figura 4.6

- 7) Use Winplot para fazer animação da vibração da corda com os perfis iniciais do exemplo anterior e com as velocidades iniciais:
  - a)  $\psi(x) = x^2$ ;
  - b)  $\psi(x) = \text{sen}(\pi x)$ ;
  - c)  $\psi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .
- 8) Use Winplot para fazer a animação da interferência das ondas, apresentadas na Figura 4.6(a) e na Figura 4.6(b), para velocidade inicial da corda igual a zero. Experimente diferentes valores dos parâmetros  $L$ ,  $h$  e  $c$  e diferentes posições das ondas, uma em relação à outra.

### 4.3 Vibrações de uma corda limitada – Método de separação de variáveis

Consideremos agora uma corda limitada de comprimento  $L$ , com extremos  $x = 0$  e  $x = L$  fixos. As vibrações dessa corda, como vi-

mos acima, são descritas pelo seguinte PVIC:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (4.13)$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \quad 0 < x < L, \quad (4.14)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.15)$$

onde as funções  $\phi$  e  $\psi$  determinam o perfil inicial e a velocidade inicial da corda.

Para encontrar a solução da equação (4.13) notemos que essa é linear, ou seja, se  $u_1$  e  $u_2$  são duas soluções dessa equação, então a soma  $u_1 + u_2$  também é uma solução:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(u_1 + u_2)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2(u_1 + u_2)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, vamos procurar a solução geral do problema (4.13) – (4.15) como uma soma de soluções particulares  $U$ , que satisfazem a equação (4.13) e as condições de contorno (4.15):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t) - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (4.16)$$

$$U(0,t) = U(L,t) = 0, \quad t > 0. \quad (4.17)$$

Para resolver esse problema, usaremos o método de separação de variáveis, ou seja, vamos procurar  $U$  como o produto de duas funções, tal que uma função depende somente de  $x$  e a outra somente de  $t$ :

$$U(x,t) = X(x)T(t).$$

Substituindo essa expressão para  $U$  na equação (4.13), temos:

$$X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0.$$

Para “separar” variáveis, vamos dividir esta equação por  $X(x)T(t)$ :

$$\frac{X(x)T''(t)}{X(x)T(t)} - a^2 \frac{X''(x)T(t)}{X(x)T(t)} = 0 \Rightarrow \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

A última equação somente é válida quando cada um dos termos à esquerda e à direita é igual a uma constante, ou seja:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu$$

sendo  $\mu$  uma constante (aqui escolhemos o sinal menos por comodidade de exposição). Então precisamos resolver as duas equações a seguir:

$$T'' + \mu a^2 T = 0, \quad X'' + \mu X = 0, \quad (4.18)$$

sujeitas as condições de contorno (4.17):

$$X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0, \quad t > 0,$$

que implica:

$$X(0) = X(L) = 0$$

(se  $T(t) = 0, t > 0$  então  $U(x,t) = X(x)T(t) = 0$  para  $t > 0$ , ou seja, temos a solução trivial que não é de nosso interesse). Então, para encontrar  $X$ , temos o seguinte problema de Sturm-Liouville:

Encontrar  $\mu \in \mathbb{R}$ , tal que o problema:

$$X'' + \mu X = 0, \quad 0 < x < L, \quad (4.19)$$

$$X(0) = X(L) = 0 \quad (4.20)$$

admita uma solução não trivial  $X \neq 0$ .

Para resolver esse problema, consideremos os três casos a seguir.

1)  $\mu < 0$

Neste caso, a solução geral da equação (4.19) é:

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\mu}x} + C_2 e^{\sqrt{-\mu}x},$$

sendo  $C_1$  e  $C_2$  constantes arbitrárias. Usando as condições (4.20) para determinar  $C_1, C_2$ , temos:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ X(L) = C_1 e^{-\sqrt{-\mu}L} + C_2 e^{\sqrt{-\mu}L} = 0. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos:

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 = 0, \\ C_2(e^{-\sqrt{-\mu}L} - e^{\sqrt{-\mu}L}) = 0, \end{cases}$$

o que implica  $C_1 = C_2 = 0$ , ou seja,  $X = 0$ .

## 2) $\mu = 0$

Agora a solução geral da equação (4.19) tem forma  $X(x) = C_1 + C_2x$ , portanto, aplicando as condições (4.20), temos:

$$X(0) = C_1 = 0, \quad X(L) = C_2L = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X = 0,$$

ou seja, nesse caso também temos solução trivial.

3) Resta agora analisar o último caso:  $\mu > 0$ . A solução geral da equação (4.19) é:

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\mu}x) + C_2 \sin(\sqrt{\mu}x),$$

sendo  $C_1$  e  $C_2$  constantes arbitrárias. Das condições de contorno (4.20) temos:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 = 0, \\ X(L) = C_2 \sin(\sqrt{\mu}L) = 0. \end{cases}$$

Desde que  $C_2$  deve ser diferente de zero, temos que  $\sin(\sqrt{\mu}L) = 0$ .

Essa equação admite soluções  $\sqrt{\mu} = \frac{\pi k}{L}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , ou:

$$\mu_k = \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, somente para esses valores  $\mu_k$  o problema de Sturm-Liouville possui uma solução não trivial:

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{L} x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Para esses valores  $\mu_k$  a primeira equação em (4.18) tem solução:

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{a\pi k}{L} t + B_k \sen \frac{a\pi k}{L} t, \quad (4.21)$$

sendo  $A_k$  e  $B_k$  constantes arbitrárias. Dessa forma, encontramos um número infinito de soluções particulares do problema (4.13) – (4.15):

$$U_k(x, t) = T_k(t)X_k(x) = \left( A_k \cos \frac{a\pi k}{L} t + B_k \sen \frac{a\pi k}{L} t \right) \sen \frac{\pi k}{L} x, \quad k \in \mathbb{N}$$

e portanto vamos procurar a solução geral como uma soma infinita de soluções particulares:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \cos \frac{a\pi k}{L} t + B_k \sen \frac{a\pi k}{L} t \right) \sen \frac{\pi k}{L} x. \quad (4.22)$$

É fácil ver que  $u$  de fato satisfaz as condições de contorno (4.15), agora, somente faltam encontrar os valores das constantes  $A_k$  e  $B_k$  que permitam a solução satisfazer as condições iniciais (4.14). Substituindo (4.22) em (4.14) temos:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sen \frac{\pi k}{L} x = \phi(x), \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\pi k}{L} B_k \sen \frac{\pi k}{L} x = \psi(x). \quad (4.24)$$

Vamos supor que as funções  $\phi$  e  $\psi$  admitem representação em séries de Fourier dadas por:

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \sen \frac{\pi k}{L} x, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sen \frac{\pi k}{L} x, \quad (4.25)$$

sendo:

$$\phi_k = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(\xi) \sen \frac{\pi k}{L} \xi d\xi, \quad \psi_k = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(\xi) \sen \frac{\pi k}{L} \xi d\xi \quad (4.26)$$

coeficientes de Fourier de  $\phi$  e  $\psi$  respectivamente (veja [1] para obter as condições necessárias no desenvolvimento de uma função em série de Fourier). Substituindo (4.25) em (4.23) e (4.24), temos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sen \frac{\pi k}{L} x = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \sen \frac{\pi k}{L} x,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\pi k}{L} B_k \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} x = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} x,$$

de onde podemos concluir que:

$$A_k = \phi_k, B_k = \frac{L}{a\pi k} \psi_k. \quad (4.27)$$

Então chegamos à fórmula final para solução do problema (4.13) – (4.15):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \phi_k \cos \frac{a\pi k}{L} t + \frac{L}{a\pi k} \psi_k \operatorname{sen} \frac{a\pi k}{L} t \right) \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} x, \quad (4.28)$$

onde  $\phi_k$  e  $\psi_k$  são definidos em (4.26).

**Exemplo 4.5.** Consideremos uma corda de comprimento  $L$ , com extremos fixos (corda do violão, por exemplo), cujo perfil inicial é  $\phi(x) = \operatorname{sen} \frac{N\pi}{L} x$ , sendo  $N$  um número natural, e cuja velocidade inicial é igual a zero. A vibração dessa corda descreve-se por (4.28), sendo  $\psi_k = 0$  e:

$$\phi_N = \frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{N\pi}{L} \xi \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi d\xi, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Caso  $k = N$  temos:

$$\begin{aligned} \phi_k &= \frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen}^2 \frac{N\pi}{L} \xi d\xi = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1 - \cos \frac{2N\pi}{L} \xi}{2} d\xi = \\ &= 1 - \frac{1}{L} \frac{L}{N2\pi} \operatorname{sen} \frac{2N\pi}{L} \xi \Big|_0^L = 1. \end{aligned}$$

Aqui, no cálculo dessa integral trigonométrica, usamos a fórmula do ângulo duplo:

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2},$$

Caso  $k \neq N$  temos:

$$\begin{aligned} \phi_k &= \frac{2}{L} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{N\pi}{L} \xi \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi d\xi = \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi(k-N)}{L} \xi - \cos \frac{\pi(k+N)}{L} \xi \right) d\xi \quad (4.29) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{L} \left( \frac{L}{\pi(k-N)} \operatorname{sen} \frac{\pi(k-N)}{L} \xi - \frac{L}{\pi(k-N)} \operatorname{sen} \frac{\pi(k-N)}{L} \xi \right) \Big|_0^L = 0. \quad (4.30)$$

Nesse caso, usamos a fórmula trigonométrica para o produto de senos:

$$\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Então da equação (4.28) obtemos:

$$u(x, t) = \operatorname{sen} \frac{\pi N}{L} x \cos \frac{a\pi N}{L} t.$$

**Exemplo 4.6** Consideremos uma corda de comprimento  $L$ , com extremos fixos, cujo perfil inicial é apresentado na Figura 4.6(b) e cuja velocidade inicial é igual a zero.

Nesse caso, temos  $\phi(x) = \frac{4h}{L^2} x(L-x)$ ,  $\psi = 0$ ,  $\psi_k = 0$ ,  $\forall k = 1, 2, \dots$ ,

$$\begin{aligned} \phi_k &= \frac{2}{L} \int_0^L \frac{4h}{L^2} \xi(L-\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi d\xi = \\ &= \frac{8h}{L^3} \left( L \int_0^L \xi \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi d\xi - \int_0^L \xi^2 \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi d\xi \right). \end{aligned}$$

Usando a tabela das integrais (ou integrando por partes), obtemos:

$$\begin{aligned} \int \xi \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi &= \frac{L^2}{\pi^2 k^2} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi - \frac{\pi k}{L} \xi \cos \frac{\pi k}{L} \xi \right), \\ \int \xi^2 \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi &= \frac{L^3}{\pi^3 k^3} \left( -\frac{\pi^2 k^2}{L^2} \xi^2 \cos \frac{\pi k}{L} \xi + 2 \cos \frac{\pi k}{L} \xi + 2 \frac{\pi k}{L} \xi \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi \right) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \phi_k &= \frac{8h}{L^3} \left( \frac{L^3}{\pi^2 k^2} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi - \frac{\pi k}{L} \xi \cos \frac{\pi k}{L} \xi \right) \Big|_0^L - \right. \\ &\quad \left. \frac{L^3}{\pi^3 k^3} \left( -\frac{\pi^2 k^2}{L^2} \xi^2 \cos \frac{\pi k}{L} \xi + 2 \cos \frac{\pi k}{L} \xi + 2 \frac{\pi k}{L} \xi \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi \right) \Big|_0^L \right) \\ &= \frac{8h}{L^3} \left( -\frac{L^3}{\pi k} (-1)^k + \frac{L^3}{\pi k} (-1)^k - 2 \frac{L^3}{\pi^3 k^3} ((-1)^k - 1) \right) = -\frac{16h}{\pi^3 k^3} ((-1)^k - 1). \end{aligned}$$

Quando  $k$  é par, digamos  $k = 2n$ ,  $n \in N$ , temos que  $(-1)^k - 1 = (-1)^{2n} - 1 = 1 - 1 = 0$ , quer dizer  $\phi_{2n} = 0, n \in N$ .

Quando  $k$  é ímpar,  $k = 2n - 1$ ,  $n \in N$ , temos que  $(-1)^k - 1 = (-1)^{2n-1} - 1 = -1 - 1 = -2$ , portanto  $\phi_{2n-1} = \frac{32h}{\pi^3(2n-1)^3}$ ,  $n \in N$ . Substituindo os valores calculados na fórmula (4.28), obtemos a solução na forma da série seguinte:

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \operatorname{sen} \frac{\pi(2n-1)}{L} x \cos \frac{a\pi(2n-1)}{L} t. \quad (4.31)$$

Agora vamos fazer a animação da vibração da corda em Winplot. Lógico. Não podemos calcular a soma infinita dos termos, portanto, a primeira coisa que temos que fazer é escolher o número finito de termos  $N$ , de tal maneira que a solução aproximada:

$$u(x,t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1)^3} \operatorname{sen} \frac{\pi(2n-1)}{L} x \cos \frac{a\pi(2n-1)}{L} t.$$

aproxima bem a solução exata do problema. Para garantir isso, é suficiente (devido à dependência contínua da solução do problema dos dados iniciais, veja [1]) escolher  $N$  tal que a soma:

$$\frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1)^3} \operatorname{sen} \frac{\pi(2n-1)}{L} x \quad (4.32)$$

aproxima bem o perfil inicial da corda. Na Figura 4.7 apresentamos o perfil inicial junto com suas aproximações por soma (4.27) com  $N = 1$  e  $N = 2$ .

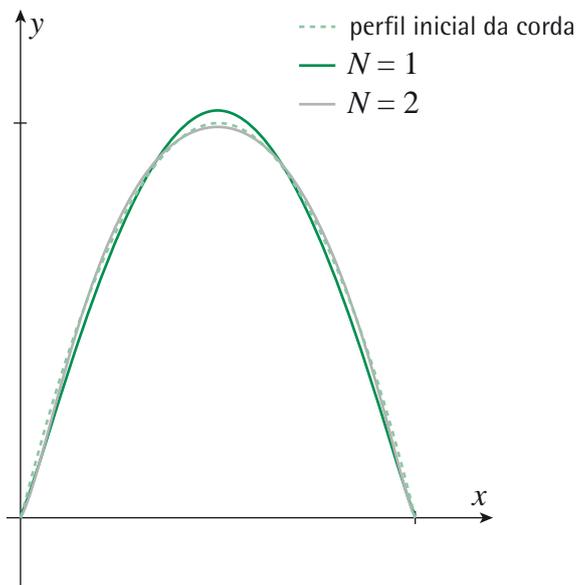


Figura 4.7 - Perfil inicial da corda, junto com suas aproximações com  $N = 1$  e  $N = 2$ .

Como podemos concluir, já a soma de dois termos oferece uma boa aproximação do perfil inicial. Então, usando  $N = 2$  na solução (4.7), apresentamos na Figura 4.8 o perfil da corda vibrante em diferentes instantes do tempo.

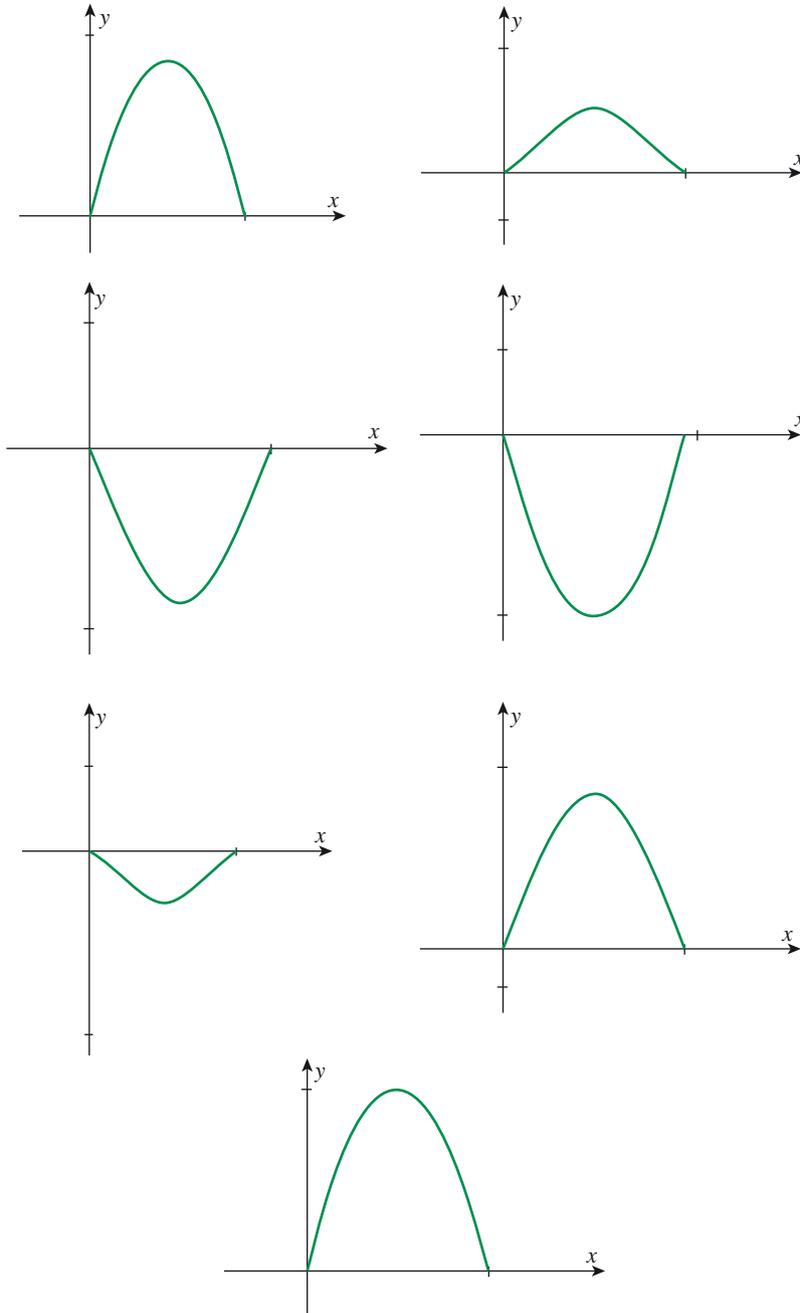


Figura 4.8. Vibração da corda com o perfil inicial parabólico. De cima para baixo e da esquerda para a direita:  $t = 0$ ,  $t = 0.4$ ,  $t = 0.8$ ,  $t = 1.0$ ,  $t = 1.4$ ,  $t = 1.8$  e  $t = 2.0$ .

**Exemplo 4.7** Agora consideremos uma corda de comprimento  $L$ , com extremos fixos, que no instante  $t = 0$  fica na posição do equi-

líbrio e cuja velocidade inicial tem perfil apresentado na Figura 4.6(a):

$$\phi(x) = 0,$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h(L-x)}{L-c}, & c \leq x \leq L; \end{cases}$$

Logo, temos  $\phi_k = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \psi_k &= \frac{2}{L} \left( \int_0^c \frac{h\xi}{c} \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi d\xi + \int_c^L \frac{h(L-\xi)}{L-c} \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi d\xi \right) = \\ &= \frac{2h}{cL} \int_0^c \xi \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi d\xi + \frac{2h}{L-c} \int_c^L \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi d\xi - \frac{2h}{L(L-c)} \int_c^L \xi \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi d\xi. \end{aligned}$$

Usando as fórmulas para as integrais do Exemplo 4.6, obtemos:

$$\begin{aligned} \psi_k &= \frac{2Lh}{c\pi^2 k^2} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi - \frac{\pi k}{L} \xi \cos \frac{\pi k}{L} \xi \Big|_0^c \right) - \\ &\frac{2hL}{(L-c)\pi^2 k^2} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} \xi - \frac{\pi k}{L} (\xi - L) \cos \frac{\pi k}{L} \xi \Big|_c^L \right) = \\ &= \frac{2Lh}{c\pi^2 k^2} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} c - \frac{\pi k}{L} c \cos \frac{\pi k}{L} c \right) + \\ &\frac{2hL}{(L-c)\pi^2 k^2} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} c - \frac{\pi k}{L} (c-L) \cos \frac{\pi k}{L} c \right) = \\ &= \frac{2hL^2}{c(L-c)\pi^2 k^2} \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} c. \end{aligned}$$

Substituindo os coeficientes calculados na (4.28), obtemos a resposta:

$$u(x,t) = \frac{2hL^3}{c(L-c)a\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} c \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} x \operatorname{sen} \frac{a\pi k}{L} t, \quad (4.33)$$

Para fazer a animação da vibração da corda no Winplot, como no exemplo anterior, vamos escolher  $N$ , tal que a soma:

$$\frac{2hL^2}{c(L-c)a\pi^2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} c \operatorname{sen} \frac{\pi k}{L} x, \quad (4.34)$$

aproxima bem o perfil da velocidade inicial da corda. Vamos con-

siderar, por exemplo,  $a = 1$ ,  $h = 1$  e  $c = \frac{1}{3}$ . Na Figura 4.9 apresentamos o perfil inicial da velocidade, junto com suas aproximações por soma (4.34), com  $N = 1, 2, 3, 5, 8$  e  $N = 20$ .

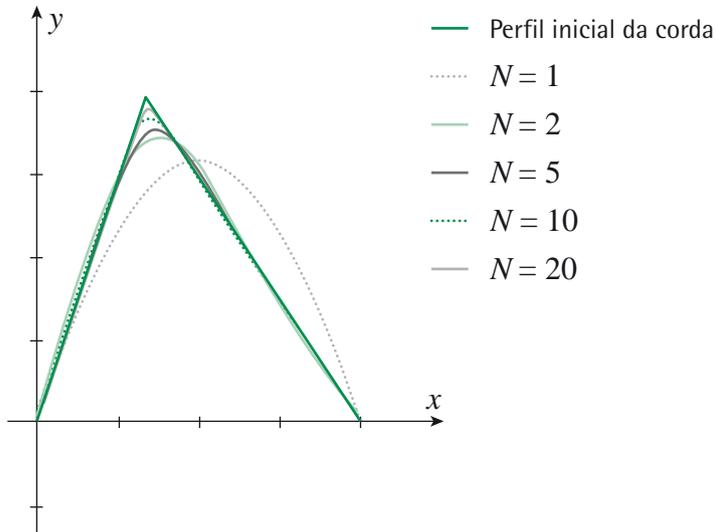
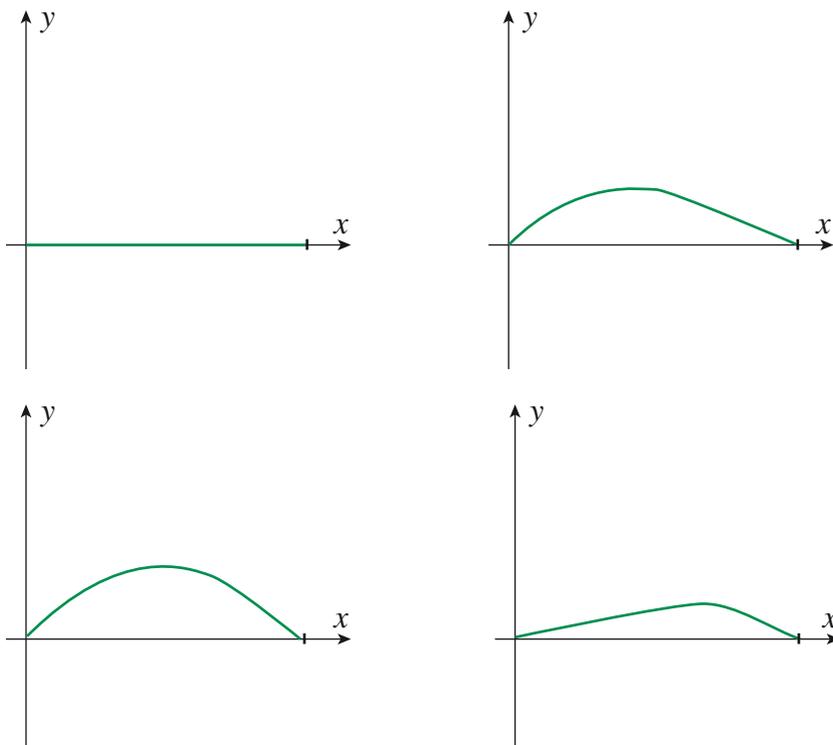


Figura 4.9 - Perfil inicial da velocidade da corda (cor preta), junto com as suas aproximações com  $N = 1, N = 2, N = 5, N = 10$  e  $N = 20$ .

Como podemos ver, só a soma de vinte termos oferece uma boa aproximação do perfil inicial. Então, usando  $N = 20$  na solução (4.34), apresentamos, na figura a seguir, o perfil da corda em diferentes instantes do tempo.



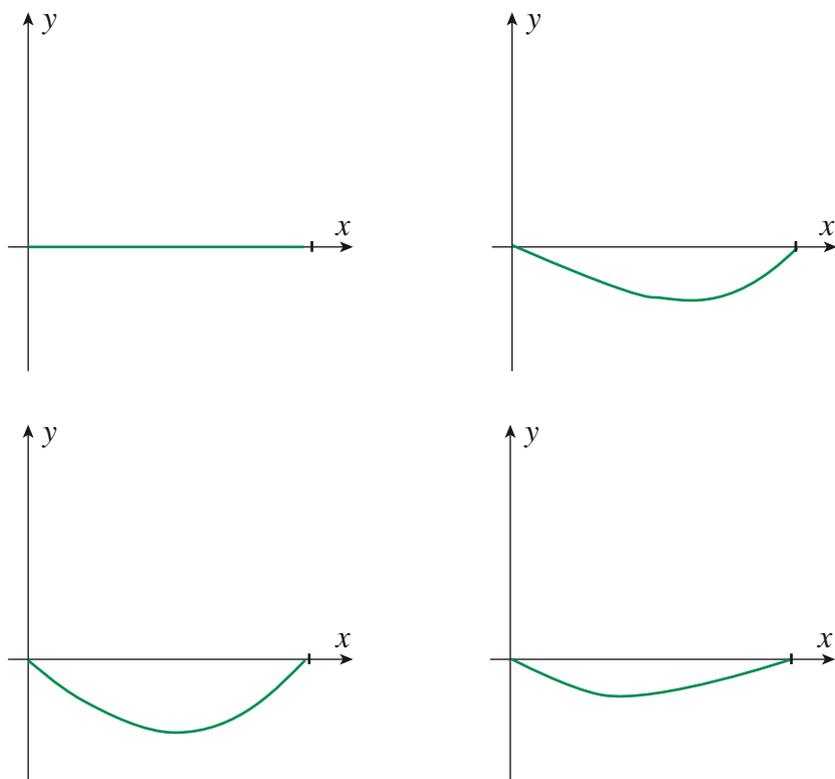


Figura 4.10 - Vibração da corda com o perfil triangular da velocidade inicial. De cima para baixo e da esquerda para a direita:  $t = 0$ ,  $t = 0.26$ ,  $t = 0.46$ ,  $t = 0.86$ ,  $t = 1.0$ ,  $t = 1.26$ ,  $t = 1.46$ ,  $t = 1.86$ .

## Exercícios

**Nota:** Exercícios marcados com asterisco são optativos.

- 9) Use os resultados do Exemplo 4.5 para fazer animação no Winplot da vibração da corda limitada, com extremos fixos, para os seguintes perfis iniciais. Considere velocidade inicial igual a zero,  $L = 1$  e  $a = 10, 1, 0.1$ . Comente os resultados.
- $\phi(x) = \text{sen}(\pi x)$ ;
  - $\phi(x) = \text{sen}(2\pi x)$ ;
  - $\phi(x) = 5 \text{sen}(\pi x) + \text{sen}(3\pi x)$ .
- 10) Use os resultados do Exemplo 4.6 para fazer animação no Winplot da vibração da corda. Compare os resultados com os apresentados na Figura 4.8.

- 11) Use os resultados do Exemplo 4.7 para fazer animação no Winplot da vibração da corda. Compare os resultados com os apresentados na Figura 4.10. Faça animação do mesmo exemplo com  $c = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ .
- 12) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira para vibração de uma corda limitada com os extremos fixos, com o perfil inicial da Figura 4.6(a) e a velocidade inicial igual a zero. Faça a animação no Winplot da vibração no caso  $a = L = h = 1$  e  $c = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ .
- 13) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira para vibração de uma corda limitada, com os extremos fixos, com o perfil inicial da Figura 4.6(a) e a velocidade inicial definida na Figura 4.6(b). Faça a animação no Winplot da vibração no caso  $a = L = h = 1$  e  $c = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ .
- 14) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira para vibração de uma corda limitada, com os extremos fixos, com o perfil inicial da Figura 4.6(b) e a velocidade inicial definida na Figura 4.6(a). Faça a animação no Winplot da vibração no caso  $a = L = h = 1$  e  $c = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ .
- 15)\* Formule o PVIC que descreve as vibrações de uma corda fina flexível com extremos presos, que se encontra num meio resistente, supondo que a força de resistência ao movimento da corda é proporcional à sua velocidade. Use o método de separação de variáveis para resolver esse problema, considerando condições iniciais arbitrárias. Calcule o limite da solução quando  $t \rightarrow \infty$ . Use o Winplot para fazer a animação da vibração da corda com o perfil inicial a Figura 4.6(a), (b) e com a velocidade inicial igual a zero no caso  $a = L = h = 1$  e  $c = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ .
- 16)\* Formule o PVIC que descreve as vibrações de uma corda fina flexível, com um extremo  $x = 0$  fixo e outro  $x = L$  livre. Use o método de separação de variáveis para resolver esse problema, considerando condições iniciais arbitrárias. Use o Winplot para fazer a animação da vibração da corda com o perfil inicial a Figura 4.6(a), (b) e com a velocidade inicial

igual a zero no caso  $a = L = h = 1$  e  $c = \frac{1}{2}$ .

## Referências

- [1] FIGUEIREDO, Djarío Guedes de. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [2] PEREIRA, R. et al. **Estudo de softwares educacionais**. Florianópolis: Editora da UFSC, 2007.



## 5 Equação do Calor



# 5 Equação do Calor

*Neste capítulo, consideramos a equação diferencial parcial que, pelo menos em uma primeira aproximação, governa a condução de calor nos sólidos. Essa equação chama-se equação do calor e é uma típica representante de outra classe de equações da Física Matemática – a classe de equações parabólicas. Além da propagação do calor, essa equação descreve também processos de difusão e, portanto, aparece em Termofísica na Físico-química, Astrofísica, Biofísica, Genética, etc. É importante ressaltar que a análise Matemática das propriedades da solução da Equação do Calor reflete várias propriedades do processo físico da condução de calor, o que nos ajuda a entender melhor os diferentes aspectos matemáticos do problema.*

## 5.1 Equação do calor unidimensional: condução do calor numa barra

Consideremos uma barra retilínea fina de comprimento  $L$ , cuja seção transversal tem área  $S$ , feita de um material condutor uniforme de calor. Suponhamos que a barra é orientada de modo que seu eixo coincida com o eixo dos  $x$ , Figura 5.1.

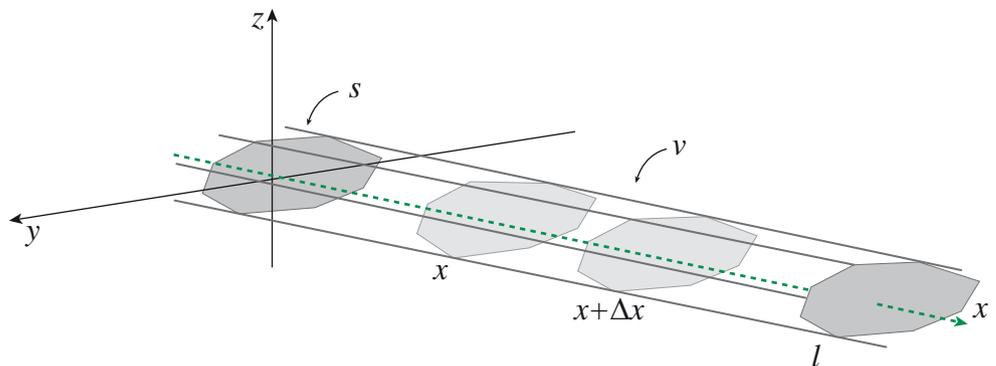


Figura 5.1

A hipótese de que a barra é fina significa que a temperatura é constante, em qualquer seção transversal da barra, e somente depende da posição axial  $x$  e do tempo  $t$ , e não das coordenadas  $y$  e  $z$ . Essa hipótese é satisfatória quando as dimensões laterais da barra forem pequenas em relação ao respectivo comprimento. Vamos supor que a superfície lateral da barra é isolada termicamente de modo que não haja transferência de calor com o meio ambiente através dela, apenas através de suas extremidades. Devido à uniformidade do material e o isolamento térmico lateral, o fluxo de calor se dá apenas na direção longitudinal. Portanto, trata-se de um problema de condução de calor em uma dimensão apenas. Nessas condições, o processo de propagação do calor na barra pode ser descrito por uma função  $u(x,t)$  cujo valor representa a temperatura (da seção transversal) da barra em ponto  $x$ , no instante do tempo  $t$ . Para descrever a condução do calor na barra utilizaremos a *lei de resfriamento de Fourier*:

---

“O fluxo do calor  $q(x,t)$  (a quantidade de calor transmitida por unidade de tempo) na direção positiva do eixo  $x$  através de uma seção transversal da barra é dado por:

$$q(x,t) = -Sk(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad (5.1)$$

onde  $k(x) > 0$  é a condutibilidade térmica do material”.

---

O sinal menos significa que o calor flui no sentido de decréscimo da temperatura, portanto a direção do fluxo de calor é contrária ao crescimento da temperatura da barra, descrito pela derivada  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

Para deduzir a equação diferencial parcial que governa a temperatura na barra, usaremos a equação do balanço de calor para um elemento  $V$  da barra entre  $x$  e  $x + \Delta x$ : a alteração da quantidade de calor  $dQ$  em  $V$  no período do tempo  $[t_1, t_2]$  é igual à quantidade do calor  $Q_1$  que entra em  $V$  por seções transversais em pontos  $x$  e  $x + \Delta x$  (superfície lateral é isolada), mais a quantidade do calor  $Q_2$ , criada por fontes de calor internas em  $V$  (reações químicas, corrente elétrica, etc.). O termo  $dQ$  corresponde

à absorção do calor em  $V$  : a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de  $V$  em  $\Delta u$  graus:

$$dQ = cm\Delta u ,$$

sendo  $c$  o calor específico,  $m$  a massa de  $V$  e  $\Delta u = u(x, t) - u(x, t_1)$ . Seja  $\rho$  a densidade do material da barra, então usando a relação:

$$\Delta u = u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, \tau) d\tau .$$

$dQ$  pode ser escrito como:

$$dQ = \int_{t_1}^{t_2} \int_x^{x+\Delta x} cS\rho \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, \tau) d\xi d\tau . \quad (5.2)$$

De acordo com a lei de Fourier, a quantidade de calor que “entra” em  $V$  através de sessão transversal esquerda é igual a:

$$- \int_{t_1}^{t_2} kS \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) d\tau .$$

Para a sessão à direita, temos a quantidade de calor igual a:

$$\int_{t_1}^{t_2} kS \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, \tau) d\tau ,$$

onde o sinal foi trocado porque o calor “entra” em  $V$  através desta sessão no sentido contrário em relação à direção positiva do eixo  $x$ . Então, a taxa líquida na qual o calor flui para o volume  $V$  é dada por:

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} kS \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, \tau) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} kS \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, \tau) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \right] d\tau .$$

Usando a relação:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, \tau) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) = \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, \tau) d\xi ,$$

podemos reescrever esta equação da seguinte forma:

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_x^{x+\Delta x} kS \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (5.3)$$

Finalmente, seja  $F(x, t)$  densidade de fontes de calor em um ponto  $x$  no instante de tempo  $t$ . Então a quantidade de calor, “criada” por fontes externas em  $V$  no período de tempo  $t_1 \leq t \leq t_2$ , é igual a:

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_x^{x+\Delta x} SF(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (5.4)$$

Agora, usando a equação do balanço de calor em  $V$  no período do tempo  $t_1 \leq t \leq t_2$ :

$$dQ = Q_1 + Q_2.$$

e as fórmulas (5.2), (5.3) e (5.4), podemos escrever:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_x^{x+\Delta x} cS\rho \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, \tau) d\xi = \int_{t_1}^{t_2} \int_x^{x+\Delta x} kS \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \int_x^{x+\Delta x} SF(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

ou:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_x^{x+\Delta x} \left[ S c \rho \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, \tau) d\xi - kS \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, \tau) + SF(\xi, \tau) \right] d\xi d\tau = 0.$$

Esta é a *equação integral do calor*. Como esta igualdade é válida para todos  $0 < x \leq x + \Delta x < L$  e  $0 < t_1 \leq t \leq t_2$ , podemos concluir que a expressão sob a integral tem que ser igual a zero:

$$cS\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - kS \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + SF(x, t) = 0.$$

Cancelando  $S$ , chegamos à equação do calor:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + F(x, t) = 0.$$

ou seja:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t),$$

onde  $f(x, t) = \frac{1}{c\rho} F(x, t)$  e  $K = \frac{k}{c\rho}$  é a *difusibilidade térmica*. Para o caso em que não temos fontes de calor, esta equação tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad (5.5)$$

Fisicamente, é óbvio que a distribuição de temperatura no decorrer do tempo deve depender da temperatura inicial da barra. Essa distribuição inicial da temperatura chama-se *condição inicial* do problema e é dada por:

$$u(x,0) = \phi(x)$$

onde  $\phi(x)$  é uma função dada que descreve a temperatura nos pontos  $x$  da barra no instante  $t = 0$ . No caso de uma barra infinita é suficiente acrescentar esta condição a equação para que o problema de valor inicial:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (5.6)$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (5.7)$$

descreva corretamente o processo de propagação do calor na barra.

No caso de uma barra limitada, pode haver entrada ou saída de calor pelas extremidades, o que deve, necessariamente, influenciar na distribuição da temperatura na barra. Portanto, além das condições iniciais, precisamos acrescentar à equação do calor as *condições de contorno*. Essas dependem de condições físicas dos extremos da barra e podem ser classificados em vários tipos.

Suponhamos que as extremidades da barra sejam mantidas a temperaturas conhecidas,  $\mu_1(t)$  e  $\mu_2(t)$ , que dependem do tempo:

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(L,t) = \mu_2(t), \quad t > 0, \quad (5.8)$$

sendo  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  funções dadas. Nesse caso, trata-se de condições de contorno *do 1º tipo*.

Quando os extremos são isolados termicamente, ou seja, não há passagem de calor através deles, temos as condições de contorno *homogêneas do 2º tipo*.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \quad t > 0. \quad (5.9)$$

No caso em que é definido fluxo de calor através dos extremos, temos condições de contorno *do 2º tipo não homogêneas*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = v_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = v_2(t), \quad t > 0, \quad (5.10)$$

sendo  $v_1(t)$  e  $v_2(t)$  funções dadas.

E, finalmente, consideremos o caso quando há transferência de calor nas extremidades da barra para o meio ambiente da temperatura  $\theta(t)$ , de acordo com a *lei do resfriamento de Newton*:

$$q|_s = \lambda(\theta(t) - u)|_s,$$

sendo  $q$  o fluxo de calor através da superfície  $S$  e  $\lambda$  o coeficiente da transferência de calor.

Supondo que a temperatura do meio ambiente é igual a  $\theta_1$  no extremo esquerdo e a  $\theta_2$  no extremo direito, temos as condições de contorno *do 3º tipo*:

$$\left[ -\frac{\partial u}{\partial x} + hu \right](0,t) = h\theta_1(t), \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + hu \right](L,t) = h\theta_2(t), \quad t > 0, \quad (5.11)$$

onde  $h = \frac{\lambda}{K}$ .

Obviamente, na prática podem aparecer combinações diferentes das condições acima apresentadas. Por exemplo, as condições:

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \quad t > 0$$

correspondem ao caso quando o extremo esquerdo  $x = 0$  da barra é mantido à temperatura zero e o extremo direito  $x = L$ , está termicamente isolado.

Combinando a equação (5.5), com as condições iniciais (5.7) e com uma das condições de contorno acima introduzidas, obteremos diferentes tipos de *problemas de valor inicial e de contorno (PVIC)*, para a equação do calor. Por exemplo, PVIC do primeiro tipo escreve-se como:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad 0 < x < L,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0$$

e descreve o processo de propagação de calor numa barra, com distribuição inicial da temperatura dada pela função  $\phi$ , cujos extremos são mantidas a temperatura zero.

### Exercício

- 1) Deduza a equação de propagação do calor, num tronco de cone obtido ao cortarmos o cone por um plano paralelo à sua base, sendo as bases do tronco círculos com raios  $r$  e  $R$  e a altura de tronco  $H$ . A superfície lateral do tronco do cone é termicamente isolada.

## 5.2 Método de separação de variáveis para equação do calor

Neste parágrafo, consideramos o método de separação de variáveis para resolver PVIC do primeiro tipo para a equação do calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.12)$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad 0 < x < L, \quad (5.13)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0. \quad (5.14)$$

Como no capítulo anterior, vamos procurar a solução geral do problema (5.12) – (5.14) como uma soma de soluções particulares  $U$ , que satisfazem a equação e as condições de contorno:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) = K \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.15)$$

$$U(0,t) = U(L,t) = 0, \quad t > 0. \quad (5.16)$$

De acordo com o *método de separação de variáveis*, vamos procurar  $U$  como o produto de duas funções tais que uma depende somente de  $x$  e a outra somente de  $t$ :

$$U(x,t) = X(x)T(t).$$

Substituindo essa expressão para  $U$  na equação, temos:

$$X(x)T'(t) - KX''(x)T = 0.$$

Para “separar” variáveis, vamos dividir esta equação por  $X(x)T(t)$ :

$$\frac{X(x)T'(t)}{X(x)T(t)} - K \frac{X''(x)T(t)}{X(x)T(t)} = 0 \Rightarrow \frac{T'(t)}{KT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Daqui podemos concluir que cada um dos termos, à esquerda e à direita na última equação devem ser constantes, isto é:

$$\frac{T'(t)}{KT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

ou:

$$T' + \lambda KT = 0 \quad X'' + \lambda X = 0. \quad (5.17)$$

Para encontrar  $X$ , precisamos resolver o *problema de Sturm-Liouville*.

Encontrar  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que o problema:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < L, \quad (5.18)$$

$$X(0) = X(L) = 0 \quad (5.19)$$

admita uma solução não trivial  $X \neq 0$ .

Como já mostramos no capítulo anterior, este problema tem uma solução:

$$X_n(x) = \text{sen} \frac{\pi n}{L} x, \quad n \in \mathbb{N}$$

para  $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2$ .

A primeira equação em (5.17) para estes valores de  $\lambda_n$  tem solução da forma:

$$T_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Kt}, \quad (5.20)$$

sendo  $C_n$  uma constante arbitrária. Portanto, uma solução particular do problema (5.15) – (5.16) é:

$$U_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Kt} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vamos procurar a solução geral do PVIC para equação do calor na forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Kt} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} x; \quad (5.21)$$

obviamente  $u$  é uma solução da equação (5.12) e satisfaz as condições de contorno (5.14). Portanto, falta encontrar os valores das constantes  $C_n$  que permitem satisfazer as condições iniciais (5.13). Substituindo (5.21) em (5.13) temos:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} x = \phi(x). \quad (5.22)$$

Seja:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} x \quad (5.23)$$

a representação da série de Fourier de  $\phi$ , onde:

$$\phi_n = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} \xi d\xi, \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.24)$$

são os coeficientes de Fourier. Substituindo (5.23) em (5.22), temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} x = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} x$$

o que implica  $C_n = \phi_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Então a solução do problema (5.12) – (5.14) tem a seguinte forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n e^{-\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 Kt} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} x, \quad (5.25)$$

onde os coeficientes de Fourier  $\phi_n$  são definidos em (5.24).

**Exemplo 5.1** Encontre a distribuição de calor numa barra fina de comprimento  $L$ , com superfície lateral isolada, cujos extremos são mantidos a temperatura zero e que no instante inicial de tempo  $t = 0$  tenha temperatura constante  $T_0$ .

**Resolução:**

A solução do problema é dada pela fórmula (5.26), portanto somente falta calcular os coeficientes de Fourier de  $\phi = T_0$ .

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{2}{L} \int_0^L T_0 \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} \xi d\xi = \frac{2T_0}{L} \int_0^L T_0 \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} \xi d\xi = \\ &= -\frac{2T_0}{\pi n} \frac{\cos \pi n - 1}{\frac{\pi n}{L}} = -\frac{2T_0}{\pi n} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Observe que, se  $n$  for par, teremos  $\phi_n = 0$ . Então, consideremos somente  $n$  ímpares,  $n = 2m - 1$ , assim temos:

$$u(x, t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} e^{-\left(\frac{(2m-1)\pi}{L}\right)^2 Kt} \operatorname{sen} \frac{\pi(2m-1)}{L} x. \quad (5.26)$$

Para fazer a animação da propagação do calor em Winplot, vamos fixar  $L = 1$ ,  $K = 1$  e  $T_0 = 1$ . Primeiramente, temos que escolher o número finito de termos  $N$ , de tal maneira que a solução aproximada:

$$u(x, t) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{m=1}^N \frac{1}{2m-1} e^{-\left(\frac{(2m-1)\pi}{L}\right)^2 Kt} \operatorname{sen} \frac{\pi(2m-1)}{L} x.$$

aproxima bem a solução exata do problema. Para isso, como já vimos no capítulo anterior, é suficiente escolher  $N$ , tal que a soma:

$$\frac{4T_0}{\pi} \sum_{m=1}^N \frac{1}{2m-1} \operatorname{sen} \frac{\pi(2m-1)}{L} x \quad (5.27)$$

aproxima bem o perfil da temperatura inicial. Na Figura 5.2, apresentamos o perfil inicial da temperatura, junto com as suas aproximações por soma (5.27), com  $N = 5$ ,  $N = 10$  e  $N = 25$ .

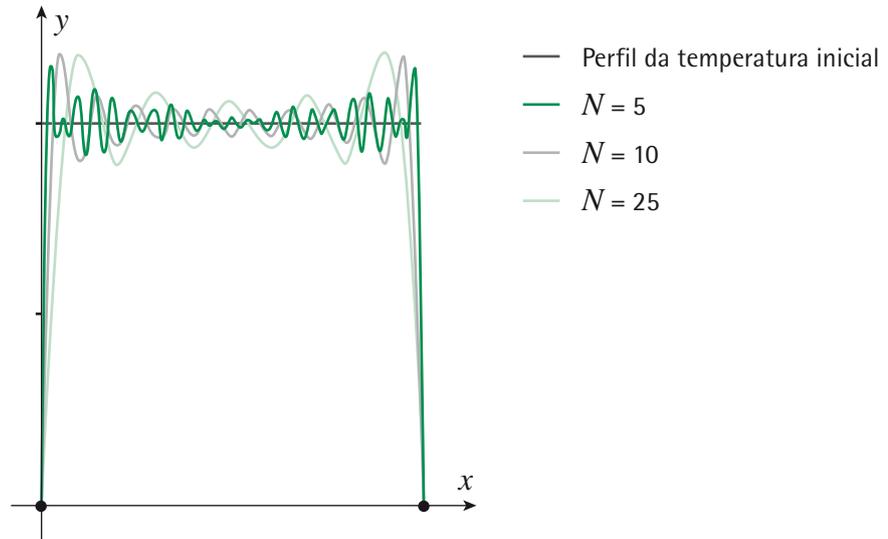


Figura 5.2 - Perfil inicial da temperatura, junto com as suas aproximações com  $N = 5$ ,  $N = 10$  e  $N = 25$ .

Como podemos ver, mesmo a soma de 25 termos ainda não aproxima bem o perfil inicial. Para uma boa aproximação, vamos ter que usar um número muito maior de termos. Esse fenômeno é conhecido na teoria de séries de Fourier, como *efeito de Gibbs* (veja [1]) e é uma consequência de fato, que somente as funções suaves podem ser aproximadas por suas séries de Fourier. No nosso caso, a temperatura inicial é igual a 1, dentro do intervalo e é igual a zero nos extremos do intervalo, devido às condições da fronteira, quer dizer, é descontínua nos extremos, o que prejudica a convergência da série. Entretanto, a solução  $u(x, t)$  do problema é uma função suave para  $t > 0$ , como podemos observar na Figura 5.3, onde o perfil da temperatura é apresentado em diferentes instantes do tempo usando  $N = 25$  na aproximação da solução. Essa é uma propriedade de solução de todas as equações parabólicas (veja [1] para um estudo detalhado).

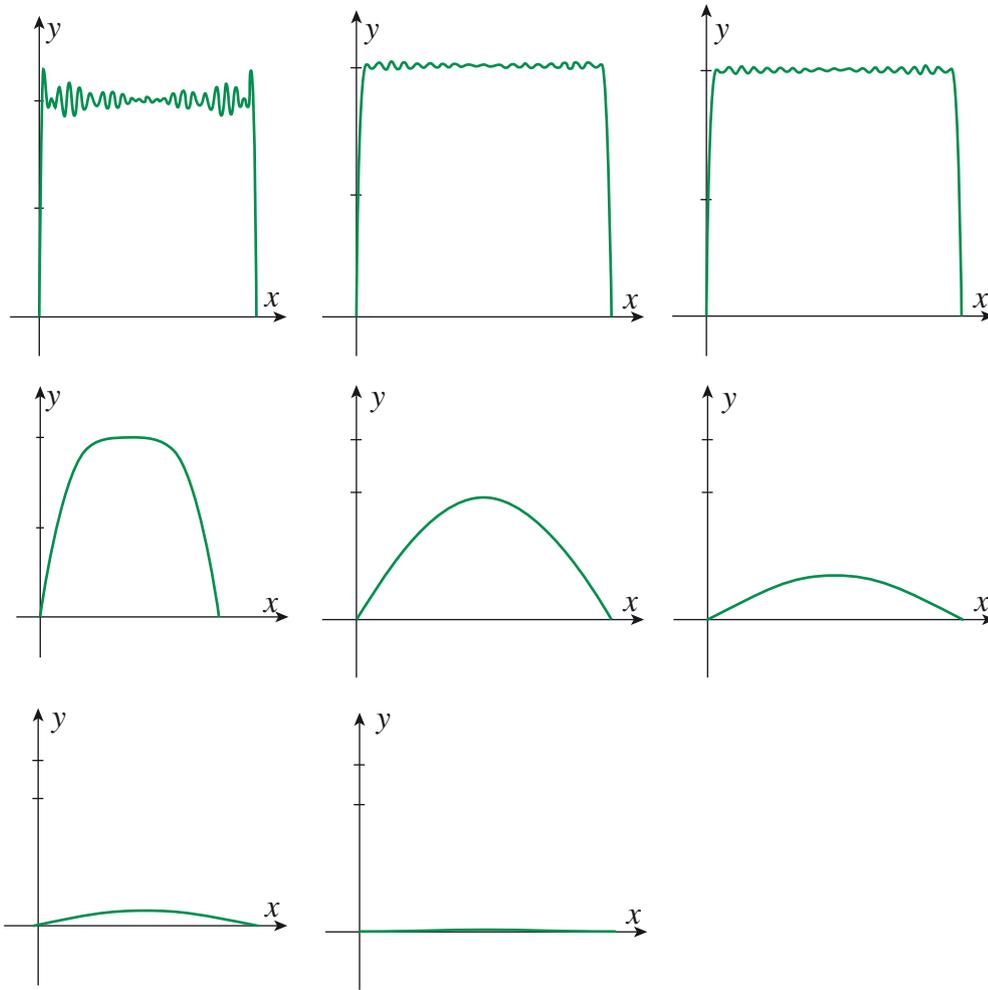


Figura 5.3 - Distribuição da temperatura numa barra com temperatura inicial  $T_0 = 1$  e temperatura igual a zero nos extremos. De cima para baixo e da esquerda para a direita:  $t = 0$ ,  $t = 0.001$ ,  $t = 0.001$ ,  $t = 0.01$ ,  $t = 0.1$ ,  $t = 0.2$ ,  $t = 0.3$  e  $t = 0.5$ .

### Condições de Contorno não Homogêneas

Suponhamos que uma das extremidades da barra seja mantida com temperatura constante  $T_1$  e a outra extremidade com temperatura constante  $T_2$ . Para determinar a temperatura da barra, temos que resolver PVIC com condições de contorno não homogêneas:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.28)$$

$$u(x,t) = \phi(x), \quad 0 < x < L. \quad (5.29)$$

$$u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2, \quad t > 0. \quad (5.30)$$

Nesse caso particular, existe uma maneira simples de reduzir esse problema a outro problema homogêneo que já sabemos resolver. Vamos procurar a solução  $u$  do problema não homogêneo da forma:

$$u(x,t) = v(x,t) + T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x, \quad (5.31)$$

onde escolhemos a função  $T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$  de tal maneira que essa satisfaz as condições de contorno (5.30). Substituindo na equação (5.28), temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( v(x,t) + T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x \right) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( v(x,t) + T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x \right)$$

ou:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Da condição inicial (5.29), temos:

$$v(x,0) + T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x = \phi(x)$$

a condição inicial para  $v$ :

$$v(x,0) = \phi(x) - T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x.$$

Para condições de contorno, temos:

$$u(0,t) = v(0,t) + T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}0 = v(0,t) + T_1 = T_1,$$

o que implica:

$$v(0,t) = 0.$$

Analogamente, temos:

$$v(L,t) = 0.$$

Portanto, para encontrar  $v$ , precisamos resolver o PVIC homogêneo:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$v(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < L,$$

$$v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

onde  $\psi(x) = \phi(x) - T_1 - \frac{T_2 - T_1}{L}x$ , usando as fórmulas acima apresentadas. A solução  $u$  do problema não homogêneo calcula-se agora usando (5.31):

$$u(x, t) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Kt} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} x,$$

onde:

$$\psi_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[ \phi(\xi) - T_1 - \frac{T_2 - T_1}{L} \xi \right] \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} \xi d\xi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Exemplo 5.2** Encontre a distribuição de calor, numa barra fina, de comprimento  $L$ , com superfície lateral isolada, cujos extremos são mantidos a temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente, e que no instante inicial de tempo  $t = 0$ , tenha temperatura  $T_1$ .

**Resolução:**

Logo que:

$$\begin{aligned} \psi_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \left[ T_1 - T_1 - \frac{T_2 - T_1}{L} \xi \right] \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} \xi d\xi = \frac{2}{L} \int_0^L \left[ \frac{T_1 - T_2}{L} \xi \right] \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} \xi d\xi = \\ &= \frac{2(T_2 - T_1) L n \pi \cos(n\pi)}{L n^2 \pi^2} = \frac{2(T_2 - T_1)(-1)^n}{\pi n}, \end{aligned}$$

a solução do problema é:

$$u(x, t) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x + \frac{2(T_2 - T_1)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Kt} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{L} x. \quad (5.32)$$

Calculando o limite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$$

é fácil ver que, com o tempo, a distribuição de temperatura na barra aproxima a distribuição estacionária, que é uma distribuição linear, que toma valores prescritos  $T_1$  e  $T_2$  nos extremos.

Vamos supor que  $L = 1$ ,  $K = 1$ ,  $T_1 = 0$  e  $T_2 = 1$ . Para escolher o nú-

mero finito de termos  $N$ , na solução aproximada, consideremos a Figura 5.4, onde são apresentados o perfil inicial da temperatura, junto com as suas aproximações por soma (5.32) para  $t = 0$ , com  $N = 5$ , 10 e  $N = 25$ .

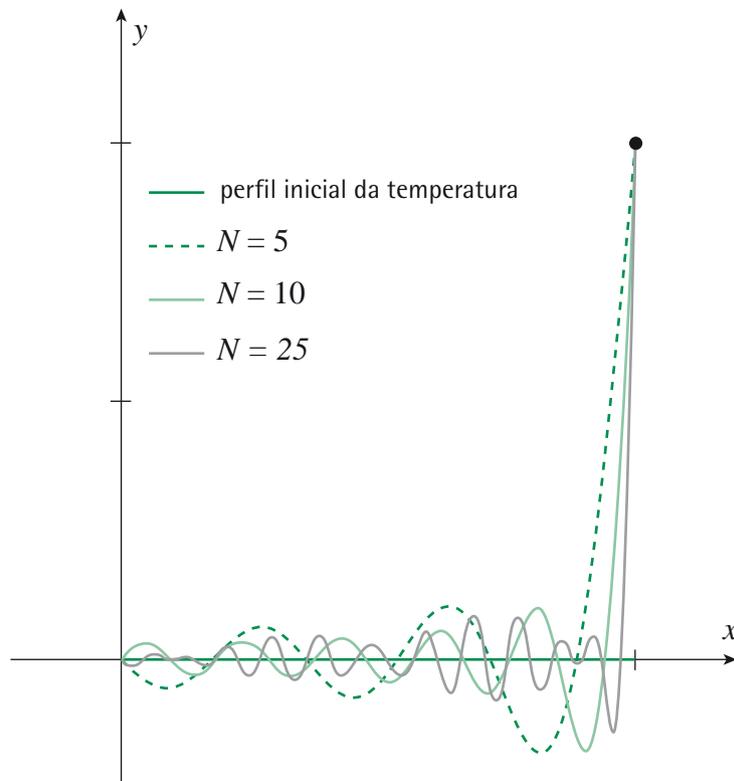


Figura 5.4 - Perfil inicial da temperatura junto com as suas aproximações com  $N = 5$ ,  $N = 10$  e  $N = 25$ .

Como no exemplo anterior, devido à descontinuidade do perfil inicial no ponto  $x = 1$  podemos notar que a soma de 25 termos ainda não aproxima bem a condição inicial na vizinhança do extremo direito do intervalo. Mas, devido às propriedades de soluções das equações parabólicas, a solução aproximada também é uma função suave para  $t > 0$ , como podemos observar na Figura 5.5, onde essa é apresentada em diferentes instantes do tempo usando  $N = 25$ . Quando  $t \rightarrow 0$ , a solução aproximada converge para a condição inicial do problema e quando  $t \rightarrow \infty$ , a solução converge para uma solução estacionária  $T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$ .

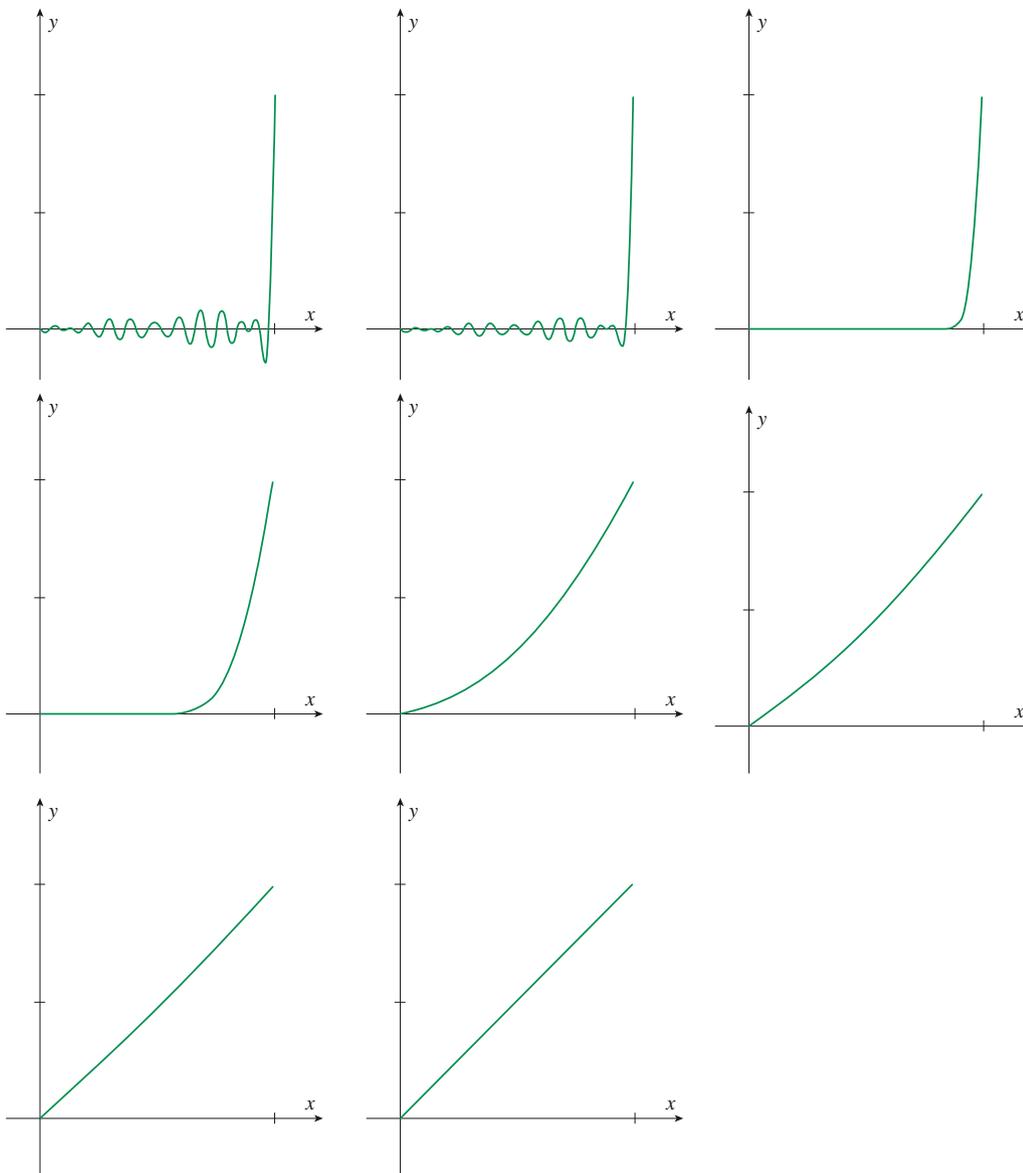


Figura 5.5 - Distribuição da temperatura numa barra com temperatura inicial igual a zero, temperatura igual a zero no extremo esquerdo e igual a um no extremo direito. De cima para baixo e da esquerda para a direita:  $t = 0$ ,  $t = 0.001$ ,  $t = 0.001$ ,  $t = 0.01$ ,  $t = 0.1$ ,  $t = 0.2$ ,  $t = 0.3$  e  $t = 0.5$ .

## Exercícios

**Nota:** Exercícios marcados com asterisco são optativos.

- 1) Use os resultados do Exemplo 5.1 para fazer animação no Winplot da propagação do calor. Compare os resultados com os apresentados na Figura 5.2. Considere o caso  $K = 0.1$ ,  $10$ . Comente.
- 2) Use os resultados do Exemplo 5.2 para fazer animação no

Winplot da propagação do calor. Compare os resultados com os apresentados na Figura 5.2.

- 3) Usando o método da separação de variáveis, resolva o PVIC, que descreve a propagação de calor numa barra fina com superfície lateral isolada e com extremos mantidos a temperatura  $T = 0$  para a condição inicial  $\psi(x) = T_0 x(L - x)$ . Considere  $L = 1$ ,  $T_0 = 1$ ,  $K = 0.1, 1, 10$  e use Winplot para a animação dos resultados.
- 4) \* Usando o método de separação de variáveis, encontre a distribuição do calor numa barra fina de comprimento  $L$ , com superfície lateral isolada, cujos extremos são isolados termicamente e cuja temperatura no instante inicial do tempo  $t = 0$  é definida como:

$$\text{a) } \phi(x) = \begin{cases} T_0 = \text{const}, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ 0, & \frac{L}{2} \leq x \leq L, \end{cases}$$

$$\text{b) } \phi(x) = \begin{cases} \frac{2T_0}{L}x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ \frac{2T_0}{L}(L - x), & \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

Calcule  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$  em ambos os casos. Comente. Use Winplot para a implementação da solução e a animação da propagação de calor.

- 5) Encontre a distribuição de calor numa barra fina, de comprimento  $L$ , com superfície lateral isolada, cujos extremos são mantidos a temperaturas  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente, e no instante inicial de tempo  $t = 0$  tenha temperatura constante  $T_0$ .

Calcule  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ . Comente. Considere  $L = 1$ ,  $K = 1$ ,  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = T_2 = 0$ , e:

- a)  $T_1 = 0$ ,  $T_2 = T_0 = 1$ ;
- b)  $T_1 = T_2 = T_0 = 1$ .

Use Winplot para a implementação da solução e a animação dos resultados.

- 6) Encontre a distribuição do calor numa barra fina, de comprimento  $L$ , com superfície lateral isolada, cujos extremos são mantidos à mesma temperatura constante  $T_1$  e que no instante inicial de tempo  $t = 0$ , tenha temperatura  $\psi(x) = T_0 x(L - x)$ ; sendo  $T_0$  uma constante.

Calcule  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ . Comente. Considere  $L = 1$ ,  $K = 1$ ,  $T_0 = 1$ , e:

a)  $T_1 = 0$ ;

b)  $T_1 = 0.5$ ;

c)  $T_1 = 1$ .

Use Winplot para a implementação da solução e a animação dos resultados.

## Referências

[1] FIGUEIREDO, Djario Guedes de. **Análise de e equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.

[2] PEREIRA, R. et al. **Estudo de softwares educacionais**. Florianópolis: Editora da UFSC, 2007.