

Rotações, Quatérnions e Álgebras de Clifford

Eliezer Batista¹

Michel Valmor dos Santos²

VI Bienal da Sociedade Brasileira de
Matemática

UNICAMP, 03 a 07 de dezembro de 2012

¹Universidade Federal de Santa Catarina, eliezer1968@gmail.com

²Universidade Federal de Santa Catarina, michelvalmor@gmail.com

Sumário

Introdução	3
1 Rotações no plano e no espaço	8
1.1 Rotações no plano	8
1.2 Números complexos e rotações no plano	10
1.3 Um interlúdio matemático: Isomorfismos e representações	13
1.4 Rotações no espaço	15
2 Quatérnions e rotações	21
2.1 A álgebra dos quatérnions	21
2.2 Quatérnions puros e vetores espaciais	25
2.3 Quatérnions e rotações espaciais	26
3 Introdução às álgebras de Clifford	32
3.1 Formas quadráticas	32
3.2 Álgebras de Clifford	34
3.3 Os grupos <i>Pin</i> e <i>Spin</i>	42
A Conceitos básicos de teoria dos grupos	44

Introdução

Ao longo da história da Matemática, grandes avanços foram realizados por meio da correlação de tópicos matemáticos até então dissociados. Esta inter-relação propicia uma compreensão mais ampla dos objetos matemáticos envolvidos e nos auxilia na obtenção de novos resultados. A interação entre a geometria e a álgebra, por exemplo, tem crescido desde a criação da Geometria analítica por René Descartes e sempre contribuiu seja na melhor descrição das propriedades dos objetos geométricos por meio de relações algébricas, ou na visualização geométrica de conceitos algébricos. Um exemplo historicamente notável desta correlação entre a geometria e a álgebra se deu na criação do plano complexo, por Argand e Gauss. Até o início do século XIX, os números complexos eram apenas um artifício introduzido para a resolução de equações algébricas, mas ninguém sabia interpretar corretamente o que seria um número complexo. A representação dos números complexos como pontos no plano foi fundamental para a difusão do uso de números complexos não só em matemática como também nas ciências naturais e nas engenharias [13].

O sucesso no uso dos números complexos na descrição da geometria analítica no plano motivou, em meados do século XIX, a busca de estruturas algébricas semelhantes que pudessem servir de modelo para a geometria analítica no espaço tridimensional. A invenção dos quatérnions, em 1843, foi o resultado desta pesquisa, empreendida pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton. No entanto, os quatérnions são uma estrutura algébrica que pode ser vista como um espaço quadridimensional. De fato, o conjunto dos números quatérnions é formado por elementos da forma $q = a + bi + cj + dk$, com a, b, c, d sendo números reais e os geradores i, j, k satisfazendo às relações definidoras

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Estas relações levam à conclusão imediata que a multiplicação dos quatérnions não é comutativa. Formulações apropriadas para a geometria e o cálculo vetorial em três dimensões foram elaboradas a partir dos quatérnions pelo físico americano Josiah Willard Gibbs e, de maneira independente, pelo engenheiro elétrico inglês Oliver Heaviside, ambos motivados pela descrição das equações de Maxwell para os campos eletromagnéticos. Basicamente, o espaço tridimensional pode ser visto como um quociente dos quatérnions pela parte real, assim os vetores do espaço podem ser escritos como combinações lineares (das classes)

dos vetores i , j e k e a não comutatividade do produto nos quatérnions é codificada no produto vetorial, enquanto a parte real do produto nos quatérnions nos dá o que hoje conhecemos como produto escalar, ou produto interno entre vetores.

Por um lado, a simplificação dos quatérnions para o seu uso na geometria tridimensional produziu enormes avanços na teoria eletromagnética e na mecânica de meios contínuos em geral. Por outro lado, a invenção dos quatérnions em si trouxe dois avanços teóricos fundamentais: Primeiramente, os quatérnions introduziram no cenário matemático a possibilidade do estudo de geometrias de espaços com dimensão maior que três. Em segundo lugar, a não comutatividade do produto motivou naturalmente o estudo de estruturas algébricas não comutativas. Este estudo da geometria de espaços de dimensões superiores, e seu relacionamento com álgebras não comutativas, teve um grande desenvolvimento ainda na segunda metade do século XIX, o que inclui as contribuições de dois importantes matemáticos: o matemático alemão Hermann Grassmann e o inglês William Kingdon Clifford.

As álgebras geométricas de Clifford surgiram pela primeira vez no artigo “Preliminary sketch of bi-quaternions”, Proc. London Math. Soc. Vol. 4 (1873) pp. 381-395. Desde então, as álgebras de Clifford permaneceram apenas como uma abstração matemática por várias décadas até que a descoberta do spin do elétron fez, incidentalmente, com que os físicos a redescobrissem. Mais especificamente, o físico britânico Paul Adrien Maurice Dirac, ao derivar uma equação quântica para o elétron relativístico³, foi levado às relações que definem a álgebra geométrica de Clifford para o espaço de Minkowski quadridimensional. Basicamente, a intenção era obter um operador diferencial de primeira ordem cujo quadrado resultasse no operador D’Alembertiano

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

onde c é a velocidade da luz. A solução do problema de fatoração deste operador envolve um conjunto de quatro matrizes 4×4 , hoje conhecidas com matrizes de Dirac [14], γ^0 , γ^1 , γ^2 e γ^3 , satisfazendo às condições

$$\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = \eta^{ij} I,$$

onde I é a matriz identidade 4×4 e η^{ij} são as componentes matriciais da métrica de Minkowski: $\eta^{00} = -1$, $\eta^{ii} = 1$, para $i \in \{1, 2, 3\}$ e $\eta^{ij} = 0$ para $i \neq j$. No espaço de Minkowski, os índices das coordenadas variam de 0 até 3, sendo $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$. Com esta convenção, o operador de Dirac, que é a raiz quadrada do D’Alembertiano, pode ser escrito como

$$\not{\partial} = \sum_{i=0}^3 \gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

A priori, este artifício matemático para fatorar um operador diferencial de segunda ordem poderia não fornecer qualquer implicação mais profunda do ponto

³Hoje esta equação é conhecida como equação de Dirac.

de vista geométrico. O surpreendente é que as álgebras de Clifford estão intimamente relacionadas com os grupos de rotação e suas representações. O exemplo mais simples e relevante é a conexão existente entre o grupo $SO(3)$, constituído pelas matrizes ortogonais reais 3×3 de determinante unitário (que são as matrizes de rotação no espaço tridimensional) e o grupo $SU(2)$, das matrizes complexas unitárias 2×2 de determinante unitário. Esta conexão surgiu pela primeira vez com os parâmetro de Cayley-Klein para descrever o movimento de um corpo rígido [12]. Também estes dois grupos aparecem interconectados na descrição do spin do elétron (em mecânica quântica não relativística) através das matrizes de Pauli [16]. As representações destes dois grupos também estão relacionadas, basicamente, as representações do grupo $SU(2)$ incluem todas as representações do grupo $SO(3)$ além de uma classe infinita de representações conhecidas como representações espinoriais [1, 6]. As representações espinoriais apareciam naturalmente em mecânica quântica para descrever as funções de onda dos elétrons, que eram denominadas espinores. Uma formulação puramente geométrica da teoria dos espinores se deve ao matemático francês Élie Cartan [3]. Esta relação entre os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$ se estendem para dimensões mais altas e são descritas por meio das álgebras de Clifford com os grupos Pin e Spin.

Atualmente, a importância das álgebras de Clifford perpassa diversas áreas da Matemática, da Física e das Engenharias. Em Matemática, podemos citar o uso de álgebras de Clifford em teoria de representações de grupos e análise harmônica [1], como também em geometria diferencial, com as estruturas de spin em variedades [8]. Em Física, as partículas responsáveis pela formação da matéria, os férmions, são partículas de spin semi inteiro, portanto suas funções de onda são dadas por espinores, portanto, esta estrutura matemática é imprescindível no estudo de qualquer fenômeno quântico, seja em física nuclear, física de matéria condensada, teoria quântica de campos, física de partículas elementares, etc. Mais recentemente, devido à sua versatilidade na descrição de transformações geométricas, as álgebras de Clifford passaram a ser utilizadas inclusiva nas engenharias, mais especificamente em robótica [15]. O problema principal é descrever o movimento de um robô em duas ou três dimensões, isto envolve não somente rotações, mas também translações, ou seja, ações do grupo euclidiano tridimensional, estas transformações geométricas do grupo euclidiano podem ser implementadas inclusive com vantagem do ponto de vista computacional, através da álgebra dos quatérnions duais [15], que é uma álgebra de Clifford associada a uma forma quadrática degenerada.

O presente material tem como objetivo apresentar ao estudante de graduação a interação entre a geometria e a álgebra, utilizando para isto a linguagem dos quatérnions e das álgebras de Clifford. Em geral, nos currículos dos cursos de graduação em matemática nas universidades brasileiras, as disciplinas de álgebra abstrata (envolvendo anéis e grupos) e as disciplinas de geometria (mais especificamente geometria diferencial), são oferecidas de maneira estanque, sem que haja uma apresentação de suas interrelações. Por exemplo, em álgebra dificilmente se aborda, nem a título de exemplo, os grupos lineares e subgrupos destes (os grupos ortogonais, unitários, etc), que são exemplos de grupos contínuos,

dotados de estrutura geométrica. Por outro lado, em geometria, pouca ênfase é dada às ações de grupos sobre objetos geométricos. Nosso intuito é mostrar, através do estudo de casos concretos, a riqueza de conexões existente entre a geometria e a álgebra.

Basicamente, o exemplo motivador será o das rotações no plano e no espaço. Quanto às rotações no plano, elas estão associadas aos números complexos unimodulares, ou seja, ao círculo unitário no plano complexo. Já as rotações em três dimensões dependem da definição de um vetor unitário no espaço, que é o eixo de rotação, e de um número real, que é o ângulo de rotação. É um pouco menos trivial ver que as rotações no espaço estão associadas aos pontos da esfera tridimensional (os vetores de comprimento unitário no espaço quadridimensional) com os pontos antípodas identificados (isto é o que chamamos de espaço projetivo tridimensional real). Menos evidente ainda é a relação que as rotações no espaço possuem com os quatérnions unitários, basicamente, um quatérnion unitário codifica em si, tanto o eixo de rotação quanto o ângulo de rotação. Além do mais existe uma associação de dois quatérnions unitários para cada rotação. Objetivamos estudar detalhadamente estas conexões, tanto do ponto de vista algébrico, como geométrico e topológico, explorando também, sempre que possível algumas aplicações inclusive nas ciências naturais.

Nossa intenção também é mostrar como a estrutura de álgebra de Clifford possibilita a passagem para dimensões superiores de muitas idéias intuitivas existentes em dimensões 2 ou 3. Basicamente, a aplicação de recobrimento existente entre o grupo unitário $SU(2)$ e o grupo ortogonal $SO(3)$ pode ser entendida analogamente para os grupos $Spin(n)$ e $SO(n)$.

Basicamente, este tema pode ser bem explorado por estudantes de graduação dos cursos de matemática, tanto de licenciatura quanto de bacharelado, também sendo acessível a estudantes de outras áreas de exatas, como Física e Engenharia. Devido às intenções de atingir um público amplo, este material pretende ser o mais auto contido possível, exigindo dos leitores apenas um conhecimento básico de álgebra linear.

Este texto está organizado de acordo com o minicurso apresentado no VI Bienal da sociedade Brasileira de Matemática, realizada na UNICAMP na semana de 3 a 7 de dezembro de 2012. A diferença entre material didático escrito e o conteúdo das aulas está no fato de colocarmos o máximo de detalhes das demonstrações dos resultados principais para que o estudante tenha uma leitura independente. Também, colocamos no material didático dados históricos e textos complementares para motivarmos os estudantes à leitura de outras referências bibliográficas mais aprofundadas sobre o tema.

A seção 1 será dedicada ao estudo das rotações em duas e três dimensões. Apresentaremos inicialmente a relação entre rotações no plano e números complexos unitários. A seguir, estudaremos detalhadamente a relação entre as rotações no plano e os grupos $SO(2)$ e $U(1)$. Finalmente, apresentaremos as rotações no espaço e sua relação com o grupo $SO(3)$.

Na seção 2, introduziremos os quatérnions como álgebra de divisão. Estudaremos o grupo dos quatérnions unitários, que corresponde geometricamente à esfera \mathbb{S}^3 . Através da ação adjunta representaremos as rotações em três di-

mensões usando quatérnions, com o auxílio dos quais também é possível ver a relação entre os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$.

A seção 3 conterà uma breve introdução às álgebras de Clifford, com exemplos em dimensões mais baixas feitos em detalhes. Os números complexos e os quatérnions são exemplos particulares de álgebras de Clifford. A relação clássica existente entre os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$ pode ser vista no contexto mais geral das álgebras de Clifford onde podemos definir os grupos Pin e $Spin$.

No apêndice 1, oferecemos preliminares algébricos necessários para a compreensão dos tópicos apresentados neste material. Faremos uma apresentação o mais auto contida possível sobre grupos, homomorfismos, grupos lineares (reais e complexos) e seus subgrupos: $GL(n)$, $SL(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ e $SU(n)$.

Capítulo 1

rotações no plano e no espaço

Neste capítulo, serão apresentados os aspectos geométricos das rotações em duas e em três dimensões. Descreveremos os matriciais relacionados com as rotações bem como apresentaremos o uso de números complexos para a descrição de rotações no plano.

1.1 Rotações no plano

Basicamente, no plano uma rotação é unicamente determinada por um número real (o ângulo de rotação). Seja a base canônica $\{e_1, e_2\}$ do plano. Iremos rotacionar estes vetores de um ângulo θ radianos em torno da origem, conforme ilustrado na figura 1.1, iremos denotar esta rotação por R_θ .

Temos, então que

$$\begin{aligned}R_\theta(e_1) &= (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2 \\R_\theta(e_2) &= -(\sin \theta)e_1 + (\cos \theta)e_2.\end{aligned}$$

Claramente, R_θ é uma transformação linear, o que nos permite escrever a matriz desta transformação na base canônica

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que a matriz R_θ é ortogonal, isto é,

$$R_\theta^T R_\theta = R_\theta R_\theta^T = I.$$

Também, calculando o determinante de R_θ verificamos que este é igual a 1. Portanto, para cada $\theta \in \mathbb{R}$ a matriz R_θ pertence ao grupo $SO(2)$, que é o grupo das matrizes ortogonais 2×2 de determinante unitário (para mais detalhes

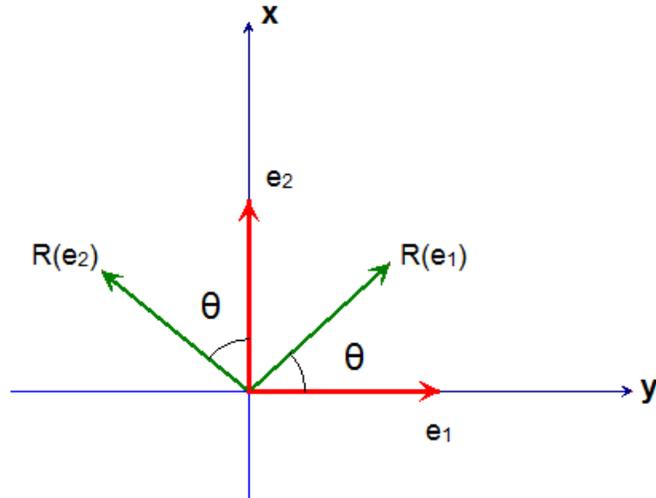


Figura 1.1: Rotação da base canônica no plano por um ângulo θ .

sobre os grupos de matrizes ortogonais, veja o Apêndice A). Mas mesmo que o conjunto das rotações seja um subconjunto do grupo $SO(2)$ ainda não podemos afirmar que este seja um subgrupo, de fato, veremos que todo o grupo $SO(2)$ coincide exatamente com as rotações no plano.

Exercício 1.1: Mostre que, dados ângulos θ e φ , temos que

$$R_\theta \circ R_\varphi = R_\varphi \circ R_\theta = R_{\theta+\varphi}$$

Também, mostre que a rotação de um ângulo nulo coincide com a identidade no plano e que

$$R_{-\theta} = R_\theta^{-1}$$

O exercício acima nos garante que o conjunto das rotações é, de fato um subgrupo do grupo $SO(2)$. Denotemos por enquanto este subgrupo por \mathcal{R} . Vamos verificar que $SO(2) \subseteq \mathcal{R}$. De fato, seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2).$$

Por definição temos que $A^T = A^{-1}$. Então

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Segue disto que $a = d$ e $b = -c$, resultando em

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Como $A \in SO(2)$, temos que $\det A = a^2 + c^2 = 1$.
Então $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tal, que $a = \cos \theta$ e $c = \sin \theta$. Logo

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R_\theta$$

ou seja, os grupos $SO(2)$ e \mathcal{R} coincidem. Portanto, ao nos referirmos ao grupo das rotações no plano, utilizaremos simplesmente $SO(2)$.

1.2 Números complexos e rotações no plano

Definição 1.1. Definimos o conjunto dos números complexos, denotado por \mathbb{C} , como

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1\}$$

Um número complexo $z = a + bi$ pode ser visto como o vetor no plano $z = (a, b)$. Este plano é gerado pela base canônica $1 = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$. O eixo $0x$ é chamado eixo real, denotado por Re . O eixo $0y$ é denotado eixo imaginário, denotado por Im . Este plano no qual são representados geometricamente os números complexos recebe o nome de Plano de Argand-Gauss ou Plano Complexo. A representação geométrica dos números complexos como vetores do plano nos permite utilizá-los como ferramenta para o estudo da geometria analítica no mesmo. A figura 1.2 ilustra a representação geométrica do número complexo $a + bi$.

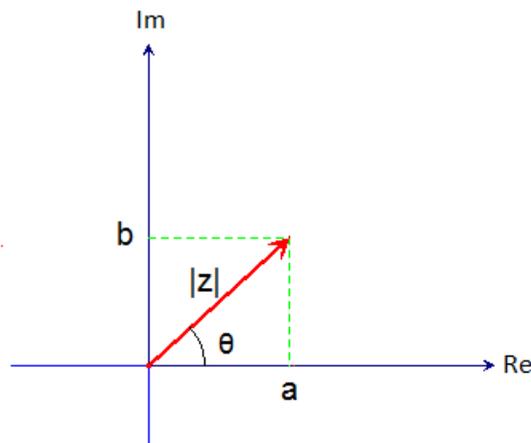


Figura 1.2: Representação geométrica dos números complexos.

Na figura, o número $|z|$ é denominado o módulo do número complexo e pelo teorema de Pitágoras, podemos facilmente calcular sua expressão como

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

O ângulo θ entre o vetor que designa o número complexo e o eixo real é denominado argumento do número, e também é calculado pela expressão

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right).$$

A vantagem do estudo da geometria analítica do plano através dos números complexos, é que estes possuem uma estrutura algébrica.. Podemos definir a soma e o produto de dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ como

$$\begin{aligned} z + w &= (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \\ z.w &= (a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Exercício 1.2: Mostre que o conjunto dos números complexos munido com estas operações forma um corpo. Isto é, a soma é associativa, comutativa, tem elemento neutro, que é o 0, e todo elemento $z = a + bi$ tem oposto $-z = -a - bi$ e a multiplicação é associativa, distributiva em relação à soma, comutativa, tem elemento neutro, que é o 1 e todo elemento $z \neq 0$ possui inverso $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, onde $\bar{z} = a - bi$ é o conjugado do número complexo $z = a + bi$.

Exercício 1.3: Verifique que, para todo número complexo z , temos $|z|^2 = z\bar{z}$.

A relação dos números complexos com rotações vem do fato que ainda podemos escrevê-los na forma trigonométrica. Observando a figura 1.2 podemos ver que

$$a = |z| \cos \theta \quad , \quad e \quad b = |z| \sin \theta.$$

Assim

$$z = a + bi = |z| \cos \theta + i|z| \sin \theta = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Exercício 1.4: Mostre que, se $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ e $w = s(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, então

$$z.w = rs(\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi))$$

Mostre também que se $z \neq 0$, então $r \neq 0$ e que

$$z^{-1} = \frac{1}{r} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)).$$

Considere agora o subconjunto dos números complexos de módulo unitário, ou unimodulares,

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

É comum utilizar-se para este conjunto a notação \mathbb{S}^1 . Isto se deve ao fato de este conjunto corresponder geometricamente à circunferência no plano complexo de raio unitário com centro na origem. Utilizando a notação trigonométrica, é fácil ver que se $z \in U(1)$, então

$$z = \cos \theta + i \sin \theta$$

para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Podemos verificar que este conjunto também forma um grupo, de fato, $U(1)$ corresponde a um subgrupo do grupo multiplicativo dos complexos não nulos, para mais detalhes, consulte no Apêndice A o exemplo A.5.

Estamos agora com todos os ingredientes em mãos para descrevermos as rotações através de números complexos. Já vimos que podemos interpretar os números complexos como vetores no plano, o que nos falta é vermos os números complexos também como transformações lineares no plano. Podemos definir, em geral, uma aplicação

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{C} &\rightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ a + bi &\mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercício 1.5: Verifique que $\phi(z + w) = \phi(z) + \phi(w)$ e que $\phi(z.w) = \phi(z).\phi(w)$. Verifique também que esta aplicação é injetiva.

O exercício anterior nos mostra que a aplicação ϕ é, de fato um homomorfismo injetor de anéis entre \mathbb{C} e $M_2(\mathbb{R})$. O que significa que podemos ver os números complexos de maneira fiel dentro do ambiente das matrizes reais 2×2 , que são exatamente as transformações lineares no plano. Agora, vamos juntar todas estas informações: Sejam $z = a + bi$ e $w = x + yi$ dois números complexos. Vamos vê-los geometricamente no plano, porém desempenhando papéis diferentes, o número complexo z será visto como a transformação linear dada pela aplicação ϕ e o número complexo w como o vetor coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Assim, por um lado temos a multiplicação no plano complexo resultando em

$$z.w = (a + bi)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay).$$

Por outro lado, podemos ver a mesma operação como

$$z.w = \phi(z)w = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}.$$

Vamos agora restringir a aplicação ϕ apenas aos números complexos unimodulares

$$\begin{aligned} \phi: \quad U(1) &\rightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ \cos \theta + i \sin \theta &\mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que o que temos é exatamente a matriz de rotação R_θ . Então, o conjunto imagem da aplicação ϕ restrita a $U(1)$ é o subgrupo $SO(2)$, das rotações no plano, o que corresponde a dizer que ao multiplicarmos qualquer número complexo w por um número complexo unimodular z , isto equivale geometricamente a rotacionarmos o vetor correspondente a w por um ângulo, que nada mais é que o argumento de z .

Sendo um pouco mais rigorosos, podemos provar o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *A aplicação ϕ corresponde a um isomorfismo entre o grupo $U(1)$ e o grupo $SO(2)$.*

Demonstração: Basicamente, o fato verificado no Exercício 1.5, de que $\phi(z.w) = \phi(z)\phi(w)$, garante que ϕ , quando restrito a $U(1)$ é um homomorfismo de grupos. A injetividade de ϕ também foi verificada no mesmo exercício. Quanto à sobrejetividade, basta ver que, se $A \in SO(2)$, então existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $A = R_\theta$, esta matriz, por sua vez corresponde a $\phi(\cos \theta + i \sin \theta)$. ■

1.3 Um interlúdio matemático: Isomorfismos e representações

Na seção anterior estabelecemos um isomorfismo entre o grupo $U(1)$, cujos elementos são os números complexos unimodulares, e o grupo $SO(2)$, cujos elementos são as matrizes de rotação no plano. Com isto podemos afirmar, basicamente, que cada ponto da circunferência unitária no plano complexo correspondia a uma rotação. Este tipo de procedimento pode parecer estranho a primeira vista para alguém que não possui um treinamento matemático. Afinal, qual a vantagem de se identificar objetos matemáticos de naturezas tão diferentes (no caso, pontos da circunferência e rotações)?

Esta questão levantada se refere ao problema da representação dos objetos matemáticos e remete mais profundamente ao próprio “modus operandi” matemático. Vamos ilustrar com esta pequena comparação: Nos primórdios da civilização humana, as pessoas utilizavam o sistema de trocas em suas relações comerciais. Se um indivíduo trigo, mas precisava de leite, por exemplo, ele oferecia o seu produto a alguma outra pessoa que tivesse uma criação de vacas para que em troca este lhe fornecesse o leite necessário. Havia uma dificuldade intrínseca neste sistema de trocas. Afinal, qual o valor que as coisas tinham no momento da troca? Quantas medidas de trigo seriam necessárias em troca de uma medida de leite? Ou quantas galinhas seriam necessárias em troca de uma espada e um escudo? a complexidade crescente das transações comerciais levou à invenção de um instrumento cujo valor pudesse ser reconhecido por todos os indivíduos daquela sociedade e que fosse utilizado em qualquer operação de troca. Temos então a origem do dinheiro. A partir de então, o valor de todos os produtos, agrários ou manufaturados, poderia ser avaliado em relação a uma unidade padrão, dada por um pedaço de metal com alguma inscrição que todos reconheçam (a figura de um rei, por exemplo).

O mesmo tipo de raciocínio podemos fazer em matemática. Os matemáticos se ocupam de estudar objetos abstratos, construções mentais com determinadas propriedades que podem ser deduzidas a partir do raciocínio lógico. Mas cada novo objeto matemático inventado (ou descoberto) precisa ser avaliado em relação aos objetos já conhecidos, surge então a necessidade de representá-los em termos de objetos mais comuns, mais simples, mais fáceis de manipular, sem que suas propriedades essenciais sejam dirimidas. Este é o problema da representação matemática. Em outras palavras, representar um objeto matemático

significa situá-lo, de forma consistente e fiel, em um ambiente mais conhecido, onde se possam efetuar verificações mais diretamente, utilizando objetos mais familiares cujas propriedades já são conhecidas.

O primeiro exemplo de representação em matemática é o próprio ato de contagem. Contar, basicamente significa comparar dois conjuntos finitos fazendo corresponder um a um dos seus elementos. Assim, pode-se contar as ovelhas no pasto com pedrinhas em um saquinho, ou dias em uma prisão com riscos na parede. Mas há algo em comum entre duas ovelhas, duas pedras, dois riscos, duas árvores, etc. Cada um destes exemplos, corresponde a objetos de natureza distinta, mas há algo de comum entre eles, de forma que podem ser postos em correspondência um a um. Então o número 2 vem para representar todos estes conjuntos que contêm dois elementos, não importa a sua natureza. É uma moeda de troca que pode ser utilizada livremente em qualquer processo de contagem.

Um segundo exemplo, mais elaborado, da idéia de representação pode ser encontrado na álgebra linear básica. Se considerarmos os espaços vetoriais de dimensão finita, podemos encontrar exemplos de diferentes naturezas: espaços de matrizes, espaços de polinômios até determinado grau, espaços de n uplas de números reais, espaços de classes de equipolência de segmentos orientados, etc. Mas o resultado mais importante de álgebra linear em dimensão finita é exatamente o fato de que, escolhida uma base, podemos estabelecer um isomorfismo linear entre um determinado espaço vetorial de dimensão n e o espaço \mathbb{R}^n . Então todo vetor neste espaço, não importa a sua natureza, pode ser representado como um vetor coluna de n entradas, ou seja, uma matriz $n \times 1$. Uma vantagem imediata deste procedimento é que as transformações lineares automaticamente passam a ser expressas como matrizes, o que facilita muito o seu aspecto computacional. Isto é o que torna a álgebra linear tão rica em aplicações, não somente na matemática, mas também nas ciências e engenharia.

Nosso propósito neste trabalho é mostrar que operações puramente geométricas, como rotações, podem ser representadas por intermédio de objetos algébricos mais interessantes. No caso das rotações do plano, pudemos mapeá-las nos pontos da circunferência unitária do plano complexo. O ganho em termos de rapidez de cálculos reside nas propriedades algébricas da multiplicação em \mathbb{C} . Assim, podemos efetuar rotações por intermédio da multiplicação por um número complexo, ao invés da aplicação de uma matriz 2×2 real. O ganho neste caso pode parecer irrisório, pois em ambos os casos o número de operações é muito pequeno. Mas veremos que para o caso de rotações no espaço, existirá uma vantagem computacional efetiva em se utilizar quatérnions ao invés de matrizes 3×3 . De fato, como veremos na seção seguinte, para se definir uma rotação no espaço, são necessárias duas informações primordiais, o eixo de rotação e o ângulo de rotação. Para efetuarmos de maneira sistemática uma rotação no espaço utilizando matrizes, são necessárias cinco matrizes elementares, que dão conta das informações a respeito do eixo e do ângulo de rotação. Já no capítulo seguinte, veremos que para efetuarmos uma rotação usando quatérnions, necessitamos apenas de um quatérnion unitário, e que neste quatérnion já estão codificadas todas as informações a respeito do eixo e do ângulo de rotação.

1.4 Rotações no espaço

A rotação de um vetor no espaço pode ser calculada através da multiplicação deste vetor por uma matriz de rotação. Por convenção, a rotação se dará no sentido anti-horário para ângulos positivos e no sentido horário para ângulos negativos. Vamos inicialmente calcular as matrizes de rotação relativas aos eixos coordenados, para depois expressarmos a matriz de rotação relativa a um eixo qualquer.

Seja a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ do espaço euclidiano. Consideremos a rotação destes vetores inicialmente em torno do eixo Ox por um ângulo θ , conforme ilustrado na figura 1.3.

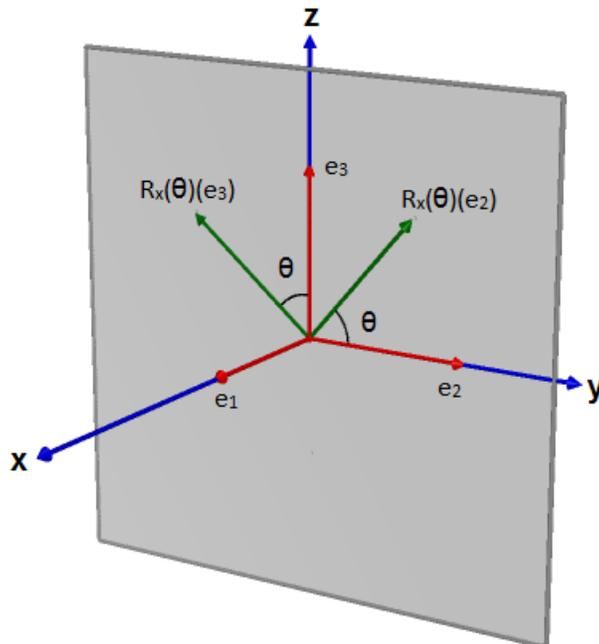


Figura 1.3: Rotação ao redor do eixo Ox

Vamos determinar a matriz de rotação $R_x(\theta)$

$$\begin{aligned}R_x(\theta)(e_1) &= e_1 + 0e_2 + 0e_3 \\R_x(\theta)(e_2) &= 0e_1 + (\cos \theta)e_2 + (\sin \theta)e_3 \\R_x(\theta)(e_3) &= 0e_1 + (\sin \theta)(-e_2) + (\cos \theta)e_3\end{aligned}$$

Podemos então, com os vetores coluna $R_x(e_1)$, $R_x(e_2)$ e $R_x(e_3)$, montar a matriz

Finalmente consideremos a rotação no eixo Oz (figura 1.5).

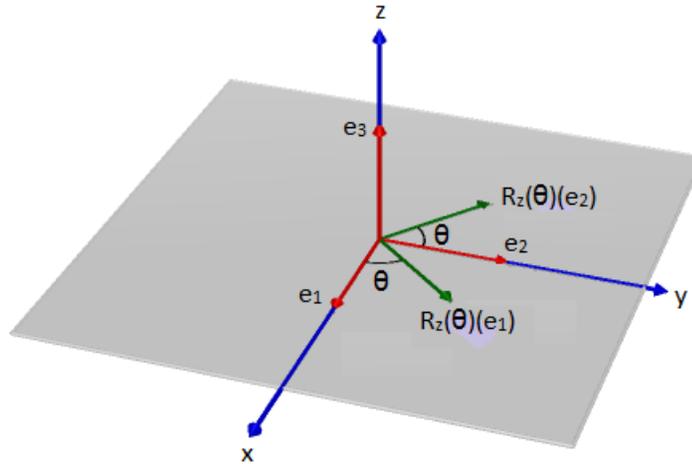


Figura 1.5: Rotação ao redor do eixo Oz .

Temos então,

$$\begin{aligned} R_z(\theta)(e_1) &= (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2 + 0e_3 \\ R_z(\theta)(e_2) &= -(\sin \theta)e_1 + (\cos \theta)e_2 + 0e_3 \\ R_z(\theta)(e_3) &= 0e_1 + 0e_2 + e_3, \end{aligned}$$

resultando em

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício 1.6: Mostre que as matrizes de rotação ao redor dos eixos coordenados são ortogonais e de determinante unitário, isto é, são elementos do grupo $SO(3)$.

O exercício anterior nos leva ainda a concluir que qualquer composição destas rotações elementares ao redor dos eixos coordenados também será um elemento

de $SO(3)$, pois este é um grupo. Uma rotação arbitrária no espaço está univocamente determinada pelo seu eixo de rotação, o qual chamaremos de \vec{n} , conforme ilustrado na figura 1.6, e pelo seu ângulo de rotação, o qual denotaremos por ψ .

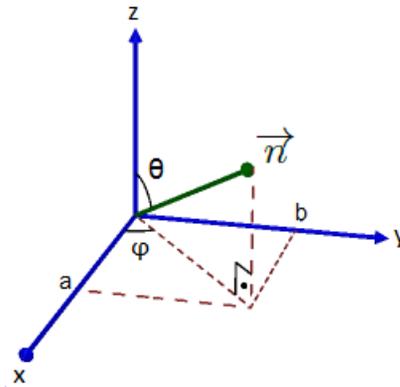


Figura 1.6: Um eixo de rotação em \mathbb{R}^3 .

O vetor de rotação pode ser escrito em coordenadas esféricas como

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Exercício 1.7: Verifique que $\vec{n} = R_z(\varphi) \circ R_y(\theta)(e_3)$.

Portanto, a idéia para escrevermos uma rotação ao redor do eixo \vec{n} com um ângulo ψ , fazendo uso apenas das matrizes elementares é efetuarmos três passos:

1. Fazermos o eixo de rotação \vec{n} coincidir com o vetor e_3 desfazendo as rotações que determinam \vec{n} .

2. Rotacionarmos ao redor do eixo Oz pelo ângulo ψ .
3. Devolvermos o eixo de rotação \vec{n} através das rotações que o determinam.

Em outras palavras, podemos escrever a rotação $R_{\vec{n}, \psi}$ como

$$R_{\vec{n}, \psi} = R_z(\varphi) \circ R_y(\theta) \circ R_z(\psi) \circ R_y(-\theta) \circ R_z(-\varphi).$$

Isto nos leva automaticamente à conclusão que toda rotação no espaço é um elemento do grupo $SO(3)$. Denominando por \mathcal{R} o conjunto de todas as rotações no espaço. É mais difícil de verificar que \mathcal{R} é um grupo pois não sabemos, a priori, se a composição de duas rotações com eixos e ângulos arbitrários resulta em uma nova rotação.

Vamos concluir este capítulo mostrando que, de fato, o grupo $SO(3)$ corresponde ao conjunto de todas as rotações no espaço. Com isto, automaticamente concluiremos que \mathcal{R} é um grupo, pois vimos que toda rotação $R_{\vec{n}, \psi}$ é um elemento de $SO(3)$.

Teorema 1.2. *O grupo $SO(3)$ é igual, como conjunto, ao conjunto das rotações no espaço.*

Demonstração: Temos uma série de pequenas verificações a fazer. Primeiramente, um fato absolutamente geral: Se $A \in O(n)$, então seus autovalores reais somente podem ser 1 ou -1 . De fato, seja $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ então

$$\langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle = \lambda^2 \|v\|^2.$$

Por outro lado

$$\langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2.$$

O que resulta em

$$\lambda^2 \|v\|^2 = \|v\|^2,$$

como $v \neq 0$ então $\|v\| \neq 0$. Portanto $\lambda^2 = 1$, ou seja, $\lambda = \pm 1$.

Em segundo lugar, agora especificamente para $SO(3)$, pelo menos um dos seus autovalores tem que ser igual a 1. Suponha λ_1 , λ_2 e λ_3 sejam os autovalores de $A \in SO(3)$, então eles são raízes do polinômio característico, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, que no caso é de grau três. Portanto, ou um dos autovalores A é real ou os três autovalores são reais.

Caso 1: Somente um dos autovalores de A é real, digamos λ_1 . Neste caso os outros dois autovalores são complexos conjugados, ou seja $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$. Como $\det A = 1$, temos

$$1 = \det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_2 = \lambda_1 |\lambda_2|^2.$$

Como $|\lambda_2|^2 > 0$ e λ_1 só pode ter os valores 1 ou -1 , a única possibilidade para que o produto dê igual a 1 é que $\lambda_1 = 1$.

Caso 2: Os três autovalores de A são reais. Então, cada autovalor somente pode assumir os valores 1 ou -1 . Para que o produto dos três dê 1, é impossível

que os três autovalores sejam simultaneamente iguais a -1 , portanto, pelo menos um dos autovalores de A é igual a 1 .

Seja v um autovetor de $A \in SO(3)$ cujo autovalor seja igual a 1 e que $\|v\| = 1$. Podemos escrever v em coordenadas esféricas como

$$v = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = R_z(\varphi) \circ R_y(\theta)(e_3).$$

Escolhamos os vetores

$$\begin{aligned} v_1 &= R_z(\varphi) \circ R_y(\theta)(e_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\ v_2 &= R_z(\varphi) \circ R_y(\theta)(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_3 &= v. \end{aligned}$$

Você pode verificar diretamente que $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ forma uma base ortonormal para \mathbb{R}^3 , pois tratam-se de vetores oriundos da aplicação da mesma transformação de $SO(3)$ aplicada à base canônica de \mathbb{R}^3 . Note que para $i = 1$ ou $i = 2$ temos que

$$\langle Av_i, v_3 \rangle = \langle Av_i, Av_3 \rangle = \langle v_i, v_3 \rangle = 0$$

Portanto, na base V , a matriz da transformação A se escreve como

$$[A]_V = \left(\begin{array}{cc|c} \tilde{A} & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Como $A^T = A^{-1}$ verificamos facilmente que $\tilde{A}^T = \tilde{A}^{-1}$. Também, uma vez que $\det(A) = 1$, isto implica que $\det(\tilde{A}) = 1$. Logo, $A \in SO(2)$, o que significa que A é uma matriz de rotação, com um ângulo ψ . Portanto

$$[A]_V = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_z(\psi).$$

Sendo $R = R_z(\varphi)R_y(\theta)$ temos que R é a matriz de mudança da base canônica $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ para a base $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Assim, a matriz de A na base E se escreve como

$$[A]_E = R[A]_V R^{-1} = R R_z(\psi) R^{-1} = R_z(\varphi) R_y(\theta) R_z(\psi) R_y(-\theta) R_z(-\varphi) = R_{v,\psi}$$

Logo, todo elemento $A \in SO(3)$ é uma rotação em \mathbb{R}^3 . Com isto também concluímos que a composta de duas rotações é uma rotação e que portanto o conjunto das rotações forma um grupo. ■

Capítulo 2

Quatérnions e rotações

O conjunto dos quatérnions desempenha para a geometria em três dimensões um papel similar ao que os números complexos desempenham para a geometria em duas dimensões. A diferença básica é que, enquanto os números complexos podem canonicamente ser identificados com os pontos do plano, \mathbb{R}^2 , os quatérnions formam um espaço vetorial real de dimensão quatro. Neste caso, o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 tem que ser visto como um subespaço apropriado dentro dos quatérnions e as rotações, por exemplo, não podem ser vistas de maneira tão endógena quanto no caso dos complexos. A dificuldade de se interpretar uma geometria a quatro dimensões foi a causa de os quatérnions não terem recebido a princípio a devida atenção dos matemáticos. Também a formulação do cálculo vetorial por Gibbs e Heavyside trouxe uma versão muito mais intuitiva para o tratamento do cálculo e da geometria no espaço tridimensional (veja por exemplo [2]). O poder operacional dos quatérnions, que se deve à sua estrutura de álgebra de divisão tem sido redescoberto em diversos ramos da matemática, das ciências naturais e da engenharia. Um exemplo relevante do uso de quatérnions atualmente está no ramo da robótica, para a descrição da cinemática de robôs [15]

2.1 A álgebra dos quatérnions

Definição 2.1. *O conjunto dos quatérnions, denotado por \mathbb{H} , é definido como*

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}.$$

Isto é, \mathbb{H} é o espaço vetorial real cuja base são os elementos 1, i , j e k que satisfazem às regras de multiplicação dadas acima, obedecendo a distributividade em relação à adição.

A estrutura de espaço vetorial é a óbvia:

$$(a + bi + cj + dk) + (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k) =$$

$$= (a + \alpha) + (b + \beta)i + (c + \gamma)j + (d + \delta)k$$

$$\lambda(a + bi + cj + dk) = \lambda a + \lambda bi + \lambda cj + \lambda dk$$

As regras de multiplicação dos geradores nos levam à conclusão que \mathbb{H} é uma álgebra¹ não comutativa. De fato, vejamos os produtos entre os geradores:

$$ijk = -1 \Rightarrow ijk^2 = -k \Rightarrow -ij = -k \Rightarrow ij = k.$$

Por outro lado

$$kji = ijji = 1 \Rightarrow k^2ji = k \Rightarrow -ji = k \rightarrow ji = -k.$$

Exercício 2.1: Mostre que $jk = -kj = i$ e $ki = -ik = j$. Mostre também

Podemos resumir as relações de multiplicação nos quatérnions de acordo com a seguinte tabela:

\cdot	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	- j
j	j	- k	-1	i
k	k	j	- i	-1

Exercício 2.2: Sejam $p = a + bi + cj + dk$ e $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, dois elementos de \mathbb{H} . Mostre que

$$pq = (a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta) + (a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma)i +$$

$$+(a\gamma + c\alpha + d\beta - b\delta)j + (a\delta + d\alpha + b\gamma - c\beta)k.$$

Conclua, com isto que o centro da álgebra \mathbb{H} , isto é, o subespaço que comuta com todos os elementos de \mathbb{H} é igual a \mathbb{R} , isto é, os quatérnions da forma $a + 0i + 0j + 0k$.

Definição 2.2. O conjugado do quatérnion $q = a + bi + cj + dk$ é definido como o quatérnion $\bar{q} = a - bi - cj - dk$.

Exercício 2.3: Mostre que $\overline{p + q} = \bar{p} + \bar{q}$ e $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$.

Definição 2.3. Definimos a norma de um quatérnion como sendo sua norma euclidiana como vetor em um espaço quadridimensional, isto é, se $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, então sua norma será igual a

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

¹Uma álgebra sobre o corpo dos reais, é um espaço vetorial real munido de uma multiplicação entre os vetores que é associativa, bilinear com respeito à estrutura de espaço vetorial e possui unidade.

Exercício 2.4: Mostre que, para $q \in \mathbb{H}$, temos que $\|q\|^2 = q\bar{q} = \bar{q}q$. Mostre também que $\|pq\| = \|p\|\|q\|$, para quaisquer $p, q \in \mathbb{H}$.

Com o exercício anterior, podemos concluir que todo quatérnio não nulo possui um inverso multiplicativo. De fato, se $q = a + bi + cj + dk \neq 0$ então, pelo menos uma de suas componentes é diferente de zero. Assim $\|q\| \neq 0$, portanto

$$q \cdot \frac{1}{\|q\|^2} \bar{q} = \frac{1}{\|q\|^2} q\bar{q} = \frac{\|q\|^2}{\|q\|^2} = 1.$$

Isto significa que o conjunto dos quatérnios é uma álgebra de divisão sobre os reais²

Exercício 2.5: Mostre que o conjunto \mathbb{H}^* , que consiste dos quatérnios não nulos, forma um grupo com relação à multiplicação nos quatérnios.

Exercício 2.6: Mostre que o subconjunto dos quatérnios unitários, isto é, os elementos $q \in \mathbb{H}$ tais que $\|q\| = 1$, forma um subgrupo multiplicativo de \mathbb{H}^* .

Os quatérnios unitários podem ser interpretados geometricamente como a esfera tridimensional³ em \mathbb{R}^4 , isto é

$$\mathbb{S}^3 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}.$$

Para futuras referências, podemos ver que os números complexos também são uma subálgebra dos quatérnios, de fato

$$\mathbb{C} = \{a + bi + 0j + 0k \in \mathbb{H} \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Os quatérnios também podem ser definidos como um espaço vetorial de dimensão dois sobre \mathbb{C} , da seguinte maneira:

$$\mathbb{H} = \{z + wj \mid z, w \in \mathbb{C}, zj = j\bar{z}\}.$$

Como os escalares complexos não são centrais em \mathbb{H} , não podemos dizer que o conjunto dos quatérnios é uma álgebra sobre \mathbb{C} .

Uma importante classe de transformações lineares que agirão sobre os quatérnios e desempenharão papel relevante para a implementação da rotações espaciais são as conjugações.

Definição 2.4. *Seja $q \in \mathbb{H}^*$, definimos a conjugação de q como a aplicação*

$$\begin{aligned} Ad_q : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ r &\mapsto qrq^{-1} \end{aligned}$$

Proposição 2.1. *Sejam $p, q \in \mathbb{H}^*$, então,*

²Uma álgebra de divisão sobre o corpo dos número reais é uma álgebra em que todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo.

³Este é o análogo da identificação dos números complexos unitários com a circunferência unitária no plano.

1) $Ad_q(\lambda r + s) = \lambda Ad_q(r) + Ad_q(s)$, para quaisquer $r, s \in \mathbb{H}$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) $Ad_q(rs) = Ad_q(r)Ad_q(s)$, para quaisquer $r, s \in \mathbb{H}$.

3) $Ad_p \circ Ad_q = Ad_{pq}$.

4) $Id_{\mathbb{H}} = Ad_1$.

5) $(Ad_q)^{-1} = Ad_{q^{-1}}$

Demonstração: 1) Sejam $r, s \in \mathbb{H}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} Ad_q(\lambda r + s) &= q(\lambda r + s)q^{-1} = \\ &= q\lambda r q^{-1} + qsq^{-1} = \\ &= \lambda q r q^{-1} + qsq^{-1} = \\ &= \lambda Ad_q(r) + Ad_q(s). \end{aligned}$$

2) Para $r, s \in \mathbb{H}$, temos

$$\begin{aligned} Ad_q(rs) &= qrsq^{-1} = qrq^{-1}qsq^{-1} = \\ &= Ad_q(r)Ad_q(s). \end{aligned}$$

3) Seja $r \in \mathbb{H}$, então

$$\begin{aligned} Ad_p \circ Ad_q(r) &= Ad_p(qrq^{-1}) = \\ &= p(qrq^{-1})p^{-1} = \\ &= (pq)r(q^{-1}p^{-1}) = \\ &= (pq)r(pq)^{-1} = \\ &= Ad_{pq}(r). \end{aligned}$$

4) Para qualquer $r \in \mathbb{H}$ temos $Ad_1(r) = 1r1^{-1} = 1r1 = r$. Portanto $Ad_1 = Id_{\mathbb{H}}$.

5) Vamos fazer uso dos resultados provados nos itens 3) e 4). De fato,

$$Ad_q \circ Ad_{q^{-1}} = Ad_{qq^{-1}} = Ad_1 = Id_{\mathbb{H}},$$

e

$$Ad_{q^{-1}} \circ Ad_q = Ad_{q^{-1}q} = Ad_1 = Id_{\mathbb{H}}.$$

O que resulta em $Ad_{q^{-1}} = (Ad_q)^{-1}$. ■

Os itens 1), 2) e 5) da proposição acima dizem que para todo $q \in \mathbb{H}^*$, a aplicação Ad_q é um automorfismo da álgebra⁴ dos quatérnions. Em particular, cada aplicação Ad_q é uma aplicação linear inversível em \mathbb{H} , logo, um elemento do grupo das transformações lineares inversíveis $GL(\mathbb{H})$. Portanto, podemos considerar a aplicação

$$\begin{aligned} \text{Ad} : \mathbb{H}^* &\rightarrow GL(\mathbb{H}) \\ q &\mapsto \text{Ad}_q \end{aligned}$$

O item 3) da proposição acima garante que esta aplicação é um homomorfismo de grupos entre o grupo multiplicativo \mathbb{H}^* e o grupo linear $GL(\mathbb{H})$. Veremos adiante que é possível, para cada $q \in \mathbb{H}$, restringir a ação de Ad_q a um subespaço tridimensional dos quatérnions que será considerado como o espaço euclidiano tridimensional usual.

Exercício 2.7: Mostre que $\text{Ker}(\text{Ad}) = \mathbb{R}^*$.

2.2 Quatérnions puros e vetores espaciais

Definição 2.5. *Um quatérnion $p \in \mathbb{H}$ é dito ser um quatérnion puro se sua parte real for igual a zero, ou seja, $p = xi + yj + zk$.*

Nosso propósito é identificar o espaço euclidiano tridimensional usual como o subespaço dos quatérnions puros e mostrar como as propriedades geométricas do espaço podem ser codificadas pela estrutura algébrica dos quatérnions. Para tornarmos mais precisa esta identificação, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.2. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{H} \\ (x, y, z) &\mapsto xi + yj + zk \end{aligned}$$

é uma aplicação linear injetiva.

Demonstração: Deixamos ao encargo do leitor, como exercício. \square

Dada esta inclusão canônica, podemos ver que a multiplicação de dois quatérnions puros codifica duas operações existentes entre vetores de \mathbb{R}^3 , o produto escalar e o produto vetorial.

Proposição 2.3. *Sejam dois vetores $v, w \in \mathbb{R}^3$. Então*

$$\iota(v)\iota(w) = -\langle v, w \rangle + \iota(v \times w),$$

onde $v \times w$ é o produto vetorial em \mathbb{R}^3 de v com w .

Demonstração: Denotando $\iota(v) = x_1i + y_1j + z_1k$ e $\iota(w) = x_2i + y_2j + z_2k$, temos

$$\begin{aligned} \iota(v)\iota(w) &= (-x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2) + (y_1z_2 - z_1y_2)i + \\ &\quad + (z_1x_2 - x_1z_2)j + (x_1y_2 - y_1x_2)k = \\ &= -\langle v, w \rangle + \iota(v \times w), \end{aligned}$$

⁴Um automorfismo de uma álgebra, é um homomorfismo de álgebras, isto é, uma aplicação linear e multiplicativa, da álgebra nela mesma e que é bijetor.

onde $v \times w$ se escreve como o vetor

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Para simplificarmos a notação, vamos omitir a injeção canônica, denotando do mesmo modo o vetor em \mathbb{R}^3 e sua imagem como um quatérnio puro.

Proposição 2.4. *Seja $q \in \mathbb{H}^*$ e w um quatérnio puro. Então $Ad_q(v)$ também é um quatérnio puro.*

Demonstração: Denotemos $q = a + bi + cj + dk$ e $w = xi + yj + zk$, então

$$\begin{aligned} qwq^{-1} &= qw \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \frac{1}{\|q\|^2} (a + bi + cj + dk)(xi + yj + zk)(a - bi - cj - dk) = \\ &= \frac{1}{\|q\|^2} ((-bx - cy - dz) + (ax + cz - dy)i + \\ &\quad + (ay + dx - bz)j + (az + by - cx)k) (a - bi - cj - dk) = \\ &= \frac{1}{\|q\|^2} (((-bx - cy - dz)a + (ax + cz - dy)b + (ay + dx - bz)c + \\ &\quad + (az + by - cx)d) + (\dots)i + (\dots)j + (\dots)k) \end{aligned}$$

Podemos verificar facilmente que a componente real de $Ad_q(w)$ é igual a zero, portanto $Ad_q(w)$ é um quatérnio puro. \blacksquare

Com isto, podemos fazer a co-restrição da aplicação Ad para

$$\begin{aligned} Ad : \mathbb{H}^* &\rightarrow GL(3, \mathbb{R}) \\ q &\mapsto Ad_q \end{aligned}$$

Entendendo-se este grupo de transformações lineares em \mathbb{R}^3 como sendo as transformações lineares no subespaço dos quatérnios puros.

2.3 Quatérnios e rotações espaciais

Vamos agora entender melhor a aplicação ad quando restringimos o domínio deste morfismo apenas aos quatérnios unitários, \mathbb{S}^3 . Vamos ver que, neste caso, o conjunto imagem corresponde exatamente ao grupo de rotações $SO(3)$

Teorema 2.1. *Considere a aplicação*

$$\begin{aligned} Ad : \mathbb{S}^3 &\rightarrow GL(3, \mathbb{R}) \\ q &\mapsto Ad_q \end{aligned}$$

Então Ad é um homomorfismo de grupos cujo conjunto imagem é exatamente o subgrupo $SO(3)$, das rotações espaciais.

Demonstração: O fato que é homomorfismo se depreende diretamente do fato que \mathbb{S}^3 é subgrupo de \mathbb{H}^* .

Primeiramente, mostremos que, $\text{Im}(\text{Ad}) \subseteq SO(3)$. Para isto, sejam $v = x_1i + y_1j + z_1k$ e $w = x_2i + y_2j + z_2k$, dois quatérnions puros e $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{S}^3$, isto é, satisfazendo $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Neste caso $q^{-1} = \bar{q} = a - bi - cj - dk$. Temos, por um lado

$$\text{Ad}_q(v)\text{Ad}_q(w) = -\langle \text{Ad}_q(v), \text{Ad}_q(w) \rangle + \text{Ad}_q(v) \times \text{Ad}_q(w).$$

O que queremos mostrar é que a parte real de $\text{Ad}_q(v)\text{Ad}_q(w)$ é igual à parte real de vw . Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \text{Ad}_q(v)\text{Ad}_q(w) &= qwq^{-1}qvq^{-1} = qvwq^{-1} = \\ &= (a + bi + cj + dk)(-\langle v, w \rangle + v \times w)(a - bi - cj - dk) = \\ &= ((-a\langle v, w \rangle - b(y_1z_2 - z_1y_2) - c(z_1x_2 - x_1z_2) - d(x_1y_2 - y_1x_2)) + \\ &\quad + (-b\langle v, w \rangle + a(y_1z_2 - z_1y_2) + c(x_1y_2 - y_1x_2) - d(z_1x_2 - x_1z_2))i + \\ &\quad + (-c\langle v, w \rangle + a(z_1x_2 - x_1z_2) + d(y_1z_2 - z_1y_2) - b(x_1y_2 - y_1x_2))j + \\ &\quad + (-d\langle v, w \rangle + a(x_1y_2 - y_1x_2) + b(z_1x_2 - x_1z_2) - c(y_1z_2 - z_1y_2))) \cdot \\ &\quad \cdot (a - bi - cj - dk) = \\ &= (-a^2\langle v, w \rangle - ba(y_1z_2 - z_1y_2) - ca(z_1x_2 - x_1z_2) - da(x_1y_2 - y_1x_2) + \\ &\quad - b^2\langle v, w \rangle + ab(y_1z_2 - z_1y_2) + cb(x_1y_2 - y_1x_2) - db(z_1x_2 - x_1z_2) + \\ &\quad - c^2\langle v, w \rangle + ac(z_1x_2 - x_1z_2) + dc(y_1z_2 - z_1y_2) - bc(x_1y_2 - y_1x_2) + \\ &\quad - d^2\langle v, w \rangle + ad(x_1y_2 - y_1x_2) + bd(z_1x_2 - x_1z_2) - cd(y_1z_2 - z_1y_2)) + \\ &\quad + (\dots)i + (\dots)j + (\dots)k = \\ &= -(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\langle v, w \rangle + \\ &\quad + (\dots)i + (\dots)j + (\dots)k = \\ &= -\langle v, w \rangle + (\dots)i + (\dots)j + (\dots)k. \end{aligned}$$

Com isto, mostramos que $\text{Ad}_q \in O(3)$. Para verificarmos o determinante, temos que escrever a matriz da transformação Ad na base canônica:

$$[\text{Ad}_q] = \begin{pmatrix} \text{Ad}_q(i) & \text{Ad}_q(j) & \text{Ad}_q(k) \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \text{Ad}_q(i) &= (a + bi + cj + dk)i(a - bi - cj - dk) = \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + (2bc + 2ad)j + (2bd - 2ac)k = \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \\ 2bc + 2ad \\ 2bd - 2ac \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ad}_q(j) &= (a + bi + cj + dk)j(a - bi - cj - dk) = \\ &= (2bc - 2ad)i + (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)j + (2ab + 2cd)k = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2bc - 2ad \\ a^2 + c^2 - b^2 - d^2 \\ 2ab + 2cd \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} \text{Ad}_q(k) &= (a + bi + cj + dk)k(a - bi - cj - dk) = \\ &= (2ac + 2bd)i + (2cd - 2ab)j + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)k = \\ &= \begin{pmatrix} 2ac + 2bd \\ 2cd - 2ab \\ a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Deixamos ao encargo do leitor efetuar estlongo e tedioso cálculo do determinante para concluir que é igual a 1, usando o fato que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Portanto $\text{Ad}_q \in SO(3)$ quando $q \in \mathbb{S}^3$.

Então, podemos concluir que Ad_q é uma rotação espacial. Vamos analisar mais de perto para vermos como o eixo de rotação e o ângulo de rotação podem ser determinados a partir das componentes do quatérnion q .

O eixo de rotação da transformação Ad_q é o vetor

$$\frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}(b, c, d) \in \mathbb{R}^3.$$

De fato, seja o quatérnion $N = bi + cj + dk$, deixamos ao encargo do leitor verificar que $\text{Ad}_q(N) = N$. Logo N é um autovetor com autovalor igual a 1. Como o eixo de rotação tem que ser um vetor unitário, é só dividirmos N por sua norma, obtendo assim

$$n = \frac{N}{\|N\|} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}(bi + cj + dk) = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}(bi + cj + dk).$$

O ângulo de rotação é dado por $\psi = 2 \arccos a$. De fato, como o eixo de rotação está na direção (b, c, d) , basta tomarmos um vetor v perpendicular ao eixo de rotação e vermos o ângulo ψ , entre $\text{Ad}_q(v)$ e v :

$$\cos \psi = \frac{\langle \text{Ad}_q(v), v \rangle}{\|\text{Ad}_q(v)\| \|v\|} = \frac{\langle \text{Ad}_q(v), v \rangle}{\|v\|^2}.$$

Tomemos, por exemplo $v = ci - bj$, é fácil ver que $v \perp n$. Temos ainda que $\|v\| = \sqrt{b^2 + c^2}$. Portanto, a única informação que precisamos é a parte real do produto $\text{Ad}_q(v)v$. Deixamos, mais uma vez, ao encargo do leitor verificar que

$$\text{Ad}_q(v)v = (1 - 2a^2)(b^2 + c^2) + (\dots)i + (\dots)j + (\dots)k.$$

Portanto

$$\langle \text{Ad}_q(v), v \rangle = (2a^2 - 1)(b^2 + c^2),$$

o que resulta em

$$\cos \psi = \frac{(2a^2 - 1)(b^2 + c^2)}{b^2 + c^2} = 2a^2 - 1.$$

Mas

$$\cos \psi = 2 \cos^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) - 1,$$

assim

$$\cos \left(\frac{\psi}{2} \right) = a,$$

resultando em

$$\psi = 2 \arccos a.$$

Finalmente, temos que provar que a aplicação Ad é sobrejetiva. Para isto, tome $A \in SO(3)$, sabemos do capítulo 1, que existe um eixo de rotação n e um ângulo ψ tal que $A = R_{n,\psi}$. É fácil ver, em vista de todas as considerações feitas anteriormente que

$$A = R_{n,\psi} = \text{Ad}_q,$$

onde

$$q = \cos \left(\frac{\psi}{2} \right) + \sin \left(\frac{\psi}{2} \right) n. \quad (2.1)$$

Isto conclui a demonstração. ■

Exercício 2.8: Mostre que o kernel do morfismo

$$\begin{aligned} \text{Ad} : \mathbb{S}^3 &\rightarrow GL(3, \mathbb{R}) \\ q &\mapsto \text{Ad}_q \end{aligned}$$

é igual ao conjunto $\{1, -1\}$.

O teorema anterior mostra claramente a vantagem de se utilizar quatérnions para se descrever rotações no espaço tridimensional. No capítulo anterior vimos que a expressão da matriz de rotação ao redor de um eixo arbitrário e por um ângulo qualquer não podia ser obtida de forma direta. Era necessário decompor a matriz de rotação em matrizes elementares, dando origem a um produto de cinco matrizes. Utilizando-se quatérnions, a tarefa de se descrever uma rotação fica muito mais direta. De fato, a expressão (2.1) nos fornece um procedimento direto de associarmos a uma rotação $R_{n,\psi}$ um quatérnion unitário que codifica em si todas as informações da rotação dada. A estrutura algébrica dos quatérnions também é uma vantagem. Muito embora pareça que os cálculos com quatérnions são extremamente longos e trabalhosos se feitos à mão, eles são extremamente mais rápidos que os cálculos matriciais, inclusive para a implementação em computadores.

Para finalizarmos este capítulo, vamos mostrar um isomorfismo análogo ao que fizemos no caso dos complexos entre $U(1)$ e $SO(2)$. Aqui, no lugar de $U(1) = \mathbb{S}^1$, temos o grupo dos quatérnions unitários \mathbb{S}^3 . Naquele contexto, o próprio grupo $SO(2)$ correspondia às rotações no plano. O teorema anterior nos mostrou que, de fato temos uma correspondência de 2 para 1 entre os pontos da esfera \mathbb{S}^3 e as rotações no espaço. Então é natural perguntarmos se existe algum grupo matricial intermediário que seja isomorfo ao grupo dos quatérnions unitários. A resposta é afirmativa e veremos que o grupo correspondente é o grupo $SU(2)$.

Teorema 2.2. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathbb{S}^3 &\rightarrow SU(2) \\ a + bi + cj + dk &\mapsto \begin{pmatrix} a + di & ib + c \\ ib - c & a - di \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos.

Demonstração: Primeiramente, verifiquemos que o conjunto imagem realmente pertence a $SU(2)$. De fato, se $q = a + bi + c + cj + dk$ é um quaternião unitário, isto é, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, então

$$\begin{aligned} \phi(q)\phi(q)^* &= \begin{pmatrix} a + di & ib + c \\ ib - c & a - di \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - di & -ib - c \\ -ib + c & a + di \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde A^* é o hermitiano conjugado de A , ou seja, o transposto do conjugado complexo de A . de maneira análoga, temos que $\phi(q)^*\phi(q) = I$. Portanto, $\phi(q) \in U(2)$. Para o determinante, basta ver que

$$\det(\phi(q)) = \det \begin{pmatrix} a + di & ib + c \\ ib - c & a - di \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

Portanto, $\phi(q) \in SU(2)$.

Para verificarmos que ϕ é morfismo, tome $p = a + bi + cj + dk$ e $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$. Deixamos ao encargo do leitor verificar que

$$\phi(p)\phi(q) = \phi(pq).$$

A injetividade, é direta: seja $q = a + bi + cj + dk \in \text{Ker}(\phi)$, isto significa que $\phi(q) = I$ ou seja $a + di = a - di = 1$ e $ib + c = ib - c = 0$, o que resulta em $a = 1$ e $b = c = d = 0$, ou seja $q = 1$ que é o elemento neutro de \mathbb{S}^3 , portanto ϕ é injetiva.

Para a sobrejetividade, considere

$$A = \begin{pmatrix} z & w \\ u & v \end{pmatrix} \in SU(2).$$

como $A^* = A^{-1}$ e $zv - wu = 1$, teremos

$$\begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{u} \\ \bar{w} & \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & -w \\ -u & z \end{pmatrix}.$$

Isto nos dá, $v = \bar{z}$ e $u = -\bar{w}$. Assim, podemos escrever A como

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Se chamarmos $z = a + di$ e $w = c + bi$, teremos que

$$A = \begin{pmatrix} a + di & c + bi \\ -c + bi & a - di \end{pmatrix}$$

e como $\det(A) = 1$, temos que

$$1 = z\bar{z} + w\bar{w} = \|z\|^2 + \|w\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Ou seja, $A = \phi(a + bi + cj + dk)$, mostrando que ϕ é sobrejetiva. Portanto, ϕ é um isomorfismo entre os grupos \mathbb{S}^3 e $SU(2)$. ■

Uma consequência deste teorema é que existe uma correspondência de 2 para 1 entre o grupo $SU(2)$ e $SO(3)$ que é obtida pela composição $\text{Ad} \circ \phi^{-1}$.

Capítulo 3

Introdução às álgebras de Clifford

Neste último capítulo, daremos uma breve introdução às álgebras geométricas de Clifford, que são, em certo sentido, uma generalização de todos os exemplos que apresentamos até o momento. De fato, tanto o corpo dos números complexos, a álgebra das matrizes 2×2 reais, a álgebra das matrizes 2×2 complexas e a álgebra de divisão dos quatérnions podem ser vistos como exemplos particulares de álgebras de Clifford. As álgebras de Clifford são construídas a partir de uma forma quadrática em um espaço vetorial, disto advém sua importância para o estudo da geometria, da mesma maneira que vimos que os números complexos e os quatérnions são importantes para descrevermos rotações no plano e no espaço, respectivamente. Os elementos unimodulares de uma álgebra de Clifford também vão formar um grupo multiplicativo importante, de forma que os exemplos apresentados nos capítulos anteriores são casos particulares destes grupos. O leitor notará que, neste capítulo, as noções se tornam um pouco mais sofisticadas matematicamente e as construções mais abstratas. Tentamos oferecer ao leitor uma primeira leitura sobre o assunto da forma mais intuitiva possível, evitando abusos desnecessários de formalismo. Também por questões de tempo, enunciamos muitos resultados neste capítulo sem, no entanto, fornecer as respectivas provas. Para suprimos esta deficiência do presente material, sugerimos ao leitor que consulte as referências citadas.

3.1 Formas quadráticas

O ingrediente primordial para a construção de uma álgebra de Clifford é uma forma bilinear simétrica definida em um espaço vetorial.

Definição 3.1. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} . Uma forma*

bilinear simétrica em \mathbb{V} é uma aplicação

$$\begin{aligned} b : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (v, w) &\mapsto b(v, w) \end{aligned}$$

satisfazendo às seguintes propriedades:

(i) $b(\lambda v_1 + v_2, w) = \lambda b(v_1, w) + b(v_2, w)$, para quaisquer $v_1, v_2, w \in \mathbb{V}$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$.

(ii) $b(v, \lambda w_1 + w_2) = \lambda b(v, w_1) + b(v, w_2)$, para quaisquer $v, w_1, w_2 \in \mathbb{V}$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $b(v, w) = b(w, v)$, para quaisquer $v, w \in \mathbb{V}$.

Se além das propriedades acima, b satisfizer

(iv) $b(v, w) = 0, \forall w \in \mathbb{V} \Rightarrow v = 0$,

dizemos que b é uma forma bilinear simétrica não degenerada.

É mais comum na literatura matemática nos referirmos às formas quadráticas.

Definição 3.2. A forma quadrática associada a uma forma bilinear simétrica b é uma aplicação $q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $q(v) = b(v, v)$.

Exercício 3.1: Mostre que a expressão para a forma bilinear simétrica b em termos de sua forma quadrática associada, q , é dada por

$$b(v, w) = \frac{1}{2} (q(v + w) - q(v) - q(w)).$$

Exemplo 3.1. Os exemplos paradigmáticos de formas bilineares simétricas são os produtos internos. Um produto interno em um espaço vetorial real \mathbb{V} é uma forma bilinear simétrica positiva definida, isto é, uma forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\langle v, v \rangle \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{V}$ e tal que $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se $v = 0$. A condição de positiva definida automaticamente implica na não degenerescência do produto interno. O produto interno canônico em \mathbb{R}^n é dado por¹

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v^i w^i,$$

onde $v = (v^1, \dots, v^n)^T$ e $w = (w^1, \dots, w^n)^T$.

Dissemos que os produtos internos são uma classe de exemplos paradigmáticos pois toda forma bilinear simétrica pode se expressa com o auxílio de um produto interno. De fato, seja \mathbb{V} um espaço vetorial real² de dimensão n e com

¹Esta expressão pode ser calculada para espaços vetoriais sobre qualquer corpo \mathbb{K} a única diferença é que não podemos garantir a positividade do produto interno, uma vez que no corpo \mathbb{K} pode nem haver qualquer noção de ordem.

²vamos nos restringir apenas a espaços vetoriais reais, ou no máximo, complexos no restante deste capítulo.

base $\{e_i\}_{i=1}^n$. Considere uma forma bilinear simétrica b neste espaço vetorial, então para $v, w \in \mathbb{V}$ temos

$$\begin{aligned} b(v, w) &= b\left(\sum_{i=1}^n v^i e_i, \sum_{j=1}^n w^j e_j\right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n v^i w^j b(e_i, e_j) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n v^i w^j b_{ij} \end{aligned} \quad (3.1)$$

A matriz $B = (b_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$, devido às propriedades da forma b , é uma matriz simétrica. Assim, a partir da expressão (3.1) podemos escrever

$$b(v, w) = \sum_{i=1}^n v^i \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} w^j \right) = \langle v, Bw \rangle.$$

O teorema espectral [7] garante que toda aplicação linear auto-adjunta (que no caso real corresponde às transformações lineares cuja matriz é simétrica) possui uma base ortonormal de autovetores, portanto uma forma bilinear simétrica pode ser diagonalizada. De fato, podemos ir além e escolhermos uma base de \mathbb{V} para a qual existam números inteiros não negativos p , q e r , satisfazendo $p + q + r = n$, de forma para todo o par de vetores $v, w \in \mathbb{V}$ tenhamos

$$b(v, w) = v^1 w^1 + \dots + v^p w^p - v^{p+1} w^{p+1} - \dots - v^{p+q} w^{p+q}. \quad (3.2)$$

Dizemos que o número $p + q$ é o posto da forma quadrática, o número r é a nulidade e a diferença $p - q$ é a assinatura da forma b . Se $r = 0$, e portanto $n = p + q$ temos que b é não degenerada. Se $n = p$ então b é positiva definida (um produto interno). Uma base de \mathbb{V} segundo a qual b pode ser escrita na forma (3.2) é dita ser uma base ortogonal relativa a b . Uma questão que poderia surgir é se o número de componentes positivas, negativas ou nulas de uma forma quadrática depende da escolha de base ortogonal. a resposta é negativa, e esta invariância é dada pelo célebre teorema de Sylvester, que aqui enunciaremos sem demonstrar.

Teorema 3.1. [5] *Seja b uma forma bilinear simétrica não degenerada e $E = \{e_i\}_{i=1}^n$ e $\{f_j\}_{j=1}^n$ duas bases ortogonais com relação a b . Sejam p , q e r o número de componentes positivas, negativas e nulas, respectivamente, com relação à base E e p' , q' e r' o número de componentes positivas, negativas e nulas, respectivamente, com relação à base F . Então $p = p'$, $q = q'$ e $r = r'$.*

3.2 Álgebras de Clifford

Os ingredientes básicos para a construção de uma álgebra de Clifford (real), é um espaço vetorial (real) \mathbb{V} e uma forma quadrática, q , definida em \mathbb{V} . A idéia

é construir uma álgebra gerada pelos vetores de \mathbb{V} de forma que o quadrado de um elemento de \mathbb{V} esteja relacionado com a forma quadrática. A construção de um objeto deste tipo passa primeiramente pela compreensão do que vem a ser um produto tensorial. Vamos fazer uma apresentação informal a respeito de álgebra multilinear e produtos tensoriais, apenas o suficiente para que possamos entender a definição de álgebra de Clifford e tenhamos alguma habilidade para fazer cálculos com estas estruturas. Para definições formais, consulte, por exemplo, a referência [5].

Definição 3.3. *Dados dois espaços vetoriais \mathbb{V} e \mathbb{W} , o produto tensorial entre os dois é um novo espaço vetorial $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ e uma aplicação bilinear $\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ de forma que para qualquer outra aplicação bilinear $f : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{U}$ exista uma única aplicação linear $\bar{f} : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{U}$ tal que $f = \bar{f} \circ \varphi$.*

Vamos tentar colocar isto de forma intuitiva: O fato é aplicações multilineares não se comportam bem com respeito a composições. Diferentemente de aplicação lineares, cujas composições continuam produzindo aplicações lineares, as aplicações multilineares não se comportam da mesma maneira. Por exemplo, Seja

$$f : \mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2 \rightarrow \mathbb{W}_1 \times \mathbb{W}_2 \times \mathbb{W}_3$$

uma aplicação bilinear. Seja também

$$g : \mathbb{W}_1 \times \mathbb{W}_2 \times \mathbb{W}_3 \rightarrow \mathbb{U}$$

uma aplicação trilinear. Qual será o comportamento de $g \circ f$? Nada de interessante! De fato, a aplicação f pode ser escrita como

$$f(v_1, v_2) = (f^1(v_1, v_2), f^2(v_1, v_2), f^3(v_1, v_2)).$$

É fácil ver que f é bilinear se, e somente se, cada uma das funções componentes, f^1, f^2, f^3 o for. Vejamos o que ocorre com $g \circ f(\lambda v_1, v_2)$:

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda v_1, v_2) &= g(f^1(\lambda v_1, v_2), f^2(\lambda v_1, v_2), f^3(\lambda v_1, v_2)) = \\ &= g(\lambda f^1(v_1, v_2), \lambda f^2(v_1, v_2), \lambda f^3(v_1, v_2)) = \\ &= \lambda^3 g \circ f(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Portanto, $g \circ f$ não possui qualquer propriedade de linearidade ou multilinearidade.

Então, a idéia do produto tensorial entre dois espaços vetoriais é construir um novo espaço vetorial, que codificasse as informações dos espaços originais e onde as aplicações multilineares pudessem ser substituídas de maneira consistente por aplicações lineares. Você pode visualizar o espaço produto tensorial $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ como sendo o espaço vetorial das combinações lineares de produtos da forma $v \otimes w$, para $v \in \mathbb{V}$ e $w \in \mathbb{W}$ satisfazendo

$$\begin{aligned} (v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w, \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2, \\ (\lambda v) \otimes w &= v \otimes (\lambda w) = \lambda(v \otimes w). \end{aligned}$$

Note que, com estas relações, um elemento do produto tensorial pode não ser escrito de maneira única como combinação linear destes produtos³. Também estas relações nos permitem definir facilmente a aplicação φ : simplesmente defina

$$\varphi(v, w) = v \otimes w.$$

Também, dada uma aplicação bilinear $f: \mathbb{V} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{U}$, podemos construir a aplicação linear⁴ a ela associada, como

$$\bar{f} \left(\sum_i v_i \otimes w_i \right) = \sum_i f(v_i, w_i).$$

Um resultado importante de produtos tensoriais é o seguinte teorema, que enunciaremos sem demonstrar:

Teorema 3.2. *Sejam $\{e_i\}_{i \in I}$ base de \mathbb{V} e $\{f_j\}_{j \in J}$ base de \mathbb{W} , então o conjunto $\{e_i \otimes f_j\}_{i \in I, j \in J}$ é base para o produto tensorial $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$.*

Note que, no teorema acima, as bases são completamente arbitrárias, podem ser finitas ou infinitas. Em suma, podemos escrever, aí sim de maneira única, um elemento do produto tensorial como uma combinação linear

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i \otimes f_j \quad ; \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{R}$$

Então por que introduzimos primeiramente aquela definição abstrata para o produto tensorial se poderíamos ter falado simplesmente que era o espaço cuja base era o produto das bases? O fato é que quando apresentamos o produto tensorial da forma geral apresentada na definição, podemos ter a liberdade de trocar a base sem que isto comprometa a estrutura. De fato, esta foi a noção primordial que motivou a criação dos tensores: a definição de objetos gerais que independessem de uma escolha específica de coordenadas. Se o leitor abrir um livro antigo de geometria, ou de cálculo tensorial vai ver que a definição de tensor era a de um objeto que tivesse um bom comportamento com respeito à troca de coordenadas.

Uma vez que podemos fazer o produto tensorial de dois espaços vetoriais, podemos fazê-lo para três, ou mais. A seguir apresentamos uma lista de algumas propriedades básicas dos produtos tensoriais:

Teorema 3.3. *Existem os seguintes isomorfismos entre produtos tensoriais de espaços vetoriais:*

1. $\mathbb{V} \otimes (\mathbb{W} \otimes \mathbb{U}) \cong (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) \otimes \mathbb{U}.$

³Na verdade, segundo a construção padrão do produto tensorial, vemos que estes produtos, são, de fato, classes de equivalências.

⁴Existem, de fato algumas dificuldades técnicas, como provar que \bar{f} está bem definida, isto é, independe da forma como escrevemos o elemento no produto tensorial. Mas efetivamente, todos estes resultados podem ser demonstrados.

2. $\mathbb{V} \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{V}$ (para espaços vetoriais reais⁵).
3. $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \cong \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}$.
4. $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}^* \cong \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{V})$. Este isomorfismo só vale para $\dim(\mathbb{W}) < \infty$. Aqui, \mathbb{W}^* denota o espaço vetorial dual a \mathbb{W} e $\mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{V})$ denota o espaço das transformações lineares de \mathbb{W} em \mathbb{V} .
5. $\mathbb{V}^* \otimes \mathbb{W}^* \cong (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^*$. Novamente, este isomorfismo só vale para \mathbb{V} e \mathbb{W} de dimensão finita.

O primeiro ítem do teorema acima nos garante que podemos fazer produtos tensoriais de um número arbitrário de espaços vetoriais de maneira consistente, isto é, independente da ordem que tomarmos os produtos tensoriais dois a dois. O terceiro ítem do teorema acima garante o isomorfismo dos espaços, mas isto não significa que o produto tensorial seja simétrico no nível dos elementos.

Dado um espaço vetorial \mathbb{V} podemos construir a álgebra tensorial $T(\mathbb{V})$ que é o espaço vetorial

$$T(\mathbb{V}) = \bigotimes_{n \geq 0} \mathbb{V}^{\otimes n},$$

onde $\mathbb{V}^{\otimes 0} = \mathbb{R}$, $\mathbb{V}^{\otimes 1} = \mathbb{V}$ e $\mathbb{V}^{\otimes n} = \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^{\otimes(n-1)}$, para $n > 1$. Em $T(\mathbb{V})$ podemos definir um produto de maneira natural:

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m,$$

estendendo-o linearmente. Esta é chamada a álgebra tensorial sobre \mathbb{V} . note que a unidade da álgebra tensorial coincide com a unidade no corpo dos reais. Os dois resultados essenciais que existem a respeito de álgebras tensoriais são:

Teorema 3.4. *Dada qualquer aplicação linear $f : \mathbb{V} \rightarrow A$, onde A é uma álgebra, existe um único homomorfismo de álgebras $\hat{f} : T(\mathbb{V}) \rightarrow A$ comutando o diagrama abaixo.*

$$\begin{array}{ccc} & & T(\mathbb{V}) \\ & \nearrow i & \downarrow \hat{f} \\ \mathbb{V} & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Aqui, $i : \mathbb{V} \rightarrow T(\mathbb{V})$ é a inclusão canônica.

Teorema 3.5. *Dada qualquer álgebra A sobre o corpo dos reais, existe um espaço vetorial real \mathbb{V} e um ideal $I \trianglelefteq T(\mathbb{V})$ tal que*

$$A \cong \frac{T(\mathbb{V})}{I}.$$

⁵O resultado mais geral é, se \mathbb{V} é um \mathbb{K} espaço vetorial, então $\mathbb{V} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \cong \mathbb{V}$.

O teorema 3.4 nos afirma que podemos construir homomorfismos de álgebras a partir de aplicações lineares. Utilizaremos este artifício várias vezes ainda neste texto. Para deixarmos mais explícito qual seja este morfismo, se $f: \mathbb{V} \rightarrow A$ é linear na álgebra A , então o homomorfismo \hat{f} é dado por

$$\hat{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v_1) \cdots f(v_n).$$

O teorema 3.5 nos mostra que todas as álgebras são quocientes de alguma álgebra tensorial, portanto as álgebras tensoriais são o único tipo de álgebra que importam de fato. Para estudarmos todas as outras álgebras, o que necessitamos é simplesmente de determinarmos um ideal apropriado em uma álgebra tensorial.

Bem, agora podemos definir, finalmente o que vem a ser uma álgebra de Clifford associada a um espaço vetorial \mathbb{V} e a uma forma quadrática q neste espaço.

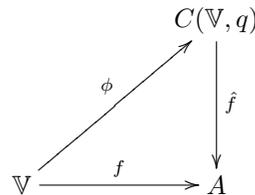
Definição 3.4. *Dado um espaço vetorial real \mathbb{V} e uma forma quadrática $q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$. A álgebra de Clifford associada a estes dados é uma álgebra $C(\mathbb{V}, q)$ e uma aplicação linear $\phi : \mathbb{V} \rightarrow C(\mathbb{V}, q)$, satisfazendo*

$$\phi(v)^2 = -q(v)\mathbf{1},$$

de forma que, para qualquer aplicação linear $f: \mathbb{V} \rightarrow A$, onde A é uma álgebra, e que também satisfaça

$$f(v)^2 = -q(v)\mathbf{1},$$

exista um único homomorfismo de álgebras $\hat{f} : C(\mathbb{V}, q) \rightarrow A$ comutando o diagrama abaixo



A pergunta natural que surge é, por que definirmos os objetos pela assim chamada propriedade universal, que é a existência de um único morfismo satisfazendo certas propriedades comutando um diagrama? Para isto vamos dar duas respostas: A primeira razão pela qual é vantajoso definir um objeto matemático pela sua propriedade universal é que pode-se provar facilmente que se existir um objeto deste tipo ele será único. O método padrão para demonstrar esta unicidade, é tomar dois candidatos que satisfazem à mesma propriedade e pela unicidade dos morfismos, provarmos que eles são isomorfos. Este tipo de procedimento é apelidado em álgebra de “abstract nonsense”, pois podemos falar muitas coisas a respeito de um objeto que nem sequer sabemos que existe, apenas utilizando propriedades oriundas de diagramas comutativos. mas uma vez mostrando uma construção para tal objeto, não precisamos ficar preocupados se

porventura surgir outra construção alternativa, teremos a certeza que os objetos assim construídos são isomorfos.

A segunda razão pela qual é vantajoso definir um objeto a partir da propriedade universal é exatamente o fato de se criar morfismos. Em muitas situações, quando queremos provar algum isomorfismo, por exemplo, a propriedade universal já nos fornece um ponto de partida, a existência de um morfismo.

Bem, após esta breve digressão matemática. como as álgebras de Clifford são o objeto principal de estudo neste capítulo, nada mais justo do que pelo menos oferecermos uma construção explícita para ela. Como vimos pelo teorema 3.5, toda álgebra é um quociente de uma álgebra tensorial. Tomemos como candidato natural, a álgebra tensorial $T(\mathbb{V})$. Queremos que o produto na álgebra de Clifford seja tal que o quadrado de um elemento do espaço vetorial coincida com o valor da forma quadrática aplicada ao mesmo vetor, ou seja, queremos que, $v^2 = -q(v)\mathbf{1} = -q(v)$, então definamos o ideal bilateral

$$I = \langle v \otimes v + q(v)\mathbf{1} \mid v \in \mathbb{V} \rangle \trianglelefteq T(\mathbb{V})$$

A álgebra quociente será nossa álgebra de Clifford, e será denotada por $C(\mathbb{V}, q)$. Denotemos por $v_1 \bullet \cdots \bullet v_n$ a classe do monômio $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, em $C(\mathbb{V}, q)$. Seja $\phi : \mathbb{V} \rightarrow C(\mathbb{V}, q)$ dada pela inclusão canônica (note que o espaço vetorial \mathbb{V} permanece quando passamos ao quociente). Automaticamente, por tudo o que foi feito até o momento, a aplicação linear ϕ satisfará $\phi(v)^2 = -q(v)$.

Agora que temos o par $(C(\mathbb{V}, q), \phi)$, podemos investigar se, de fato, a propriedade universal é satisfeita. Seja $f : \mathbb{V} \rightarrow A$ linear, na álgebra A satisfazendo $f(v)^2 = -q(v)\mathbf{1}_A$. Pelo teorema 3.4 existe um único homomorfismo de álgebras $\tilde{f} : T(\mathbb{V}) \rightarrow A$ tal que

$$\tilde{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v_1) \cdots f(v_n).$$

Como para qualquer $v \in \mathbb{V}$, temos que $f(v)^2 = -q(v)\mathbf{1}_A$, isto implica que $\tilde{f}|_I \equiv 0$. Então podemos definir um morfismo $\hat{f} : C(\mathbb{V}, q) \rightarrow A$ dado por

$$\hat{f}(v_1 \bullet \cdots \bullet v_n) = \tilde{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).$$

O morfismo está bem definido nas classes devido ao fato de \tilde{f} se anular no ideal que define a álgebra de Clifford. Assim, temos uma construção da álgebra de clifford que garante a existência de nosso objeto de estudo.

Exercício 3.2: Mostre que, em uma álgebra de Clifford $C(\mathbb{V}, q)$ temos

$$v \bullet w + w \bullet v = -2b(v, w),$$

onde b é a forma bilinear simétrica associada à forma quadrática q .

A construção proposta é exata, mas oferece poucos subsídios para que possamos ter uma idéia de sua estrutura interna. Para isto, vamos oferecer uma construção mais concreta e mais intuitiva. Como vimos anteriormente, dada

uma forma quadrática em um espaço vetorial de dimensão n , existe uma base ortogonal para esta forma quadrática, de forma que tenhamos p termos positivos, q termos negativos e r termos nulos. Vamos simplificar nossa notação: ao invés de escrevermos $C(\mathbb{V}, q)$ vamos começar a denotá-la apenas como $C_{p,q,r}$. Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base ortogonal para a forma quadrática q . Então $C_{p,q,r}$ será gerada por monômios $e_{i_1} \bullet \cdots \bullet e_{i_k}$ de comprimentos variáveis, sendo que os elementos da base satisfazem às seguintes relações:

1. $e_i \bullet e_i = -1$, para $1 \leq i \leq p$.
2. $e_i \bullet e_i = 1$, para $p+1 \leq i \leq p+q$.
3. $e_i \bullet e_i = 0$, para $p+q+1 \leq i \leq n = p+q+r$.
4. $e_i \bullet e_j = -e_j \bullet e_i$, para $i \neq j$.

Exercício 3.3: Mostre que o comprimento máximo de um monômio em uma álgebra de Clifford $C(\mathbb{V}, q)$ é igual a $n = \dim(\mathbb{V})$.

Exercício 3.4: Mostre que, se $\dim(\mathbb{V}) = n$, então, para qualquer forma quadrática q em \mathbb{V} , temos que $\dim(C(\mathbb{V}, q)) = 2^n$.

Como pudemos ver, uma álgebra de Clifford é gerada por monômios dos elementos da base do espaço vetorial subjacente. Existem monômios de comprimento par e de comprimento ímpar. Vamos denotar por $C(\mathbb{V}, q)^+$ o subespaço gerado pelos monômios de comprimento par e por $C(\mathbb{V}, q)^-$ o subespaço gerado pelos monômios de comprimento ímpar, é fácil ver que em relação ao produto temos que $C^+ \bullet C^+ \subseteq C^+$, $C^+ \bullet C^- \subseteq C^-$, $C^- \bullet C^+ \subseteq C^-$ e $C^- \bullet C^- \subseteq C^+$.

Exemplo 3.2. Se $q \equiv 0$, isto é, $r = n = \dim(\mathbb{V})$, então $C(\mathbb{V}, q) \cong \bigwedge^* \mathbb{V}$, onde $\bigwedge^* \mathbb{V}$ é a álgebra exterior, ou álgebra de Grassmann de \mathbb{V} . Esta álgebra é o quociente

$$\bigwedge^* \mathbb{V} = \frac{T(\mathbb{V})}{\langle v \otimes v \rangle}.$$

Denotando por $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ a classe de $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$, temos que, para qualquer permutação $s \in S_k$,

$$v_{s(1)} \wedge \cdots \wedge v_{s(k)} = \text{sign}(s) v_1 \wedge \cdots \wedge v_k.$$

Por exemplo

$$v_2 \wedge v_3 \wedge v_1 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \quad ; \quad v_1 \wedge v_3 \wedge v_2 = -v_1 \wedge v_2 \wedge v_3.$$

Exemplo 3.3. Seja $\mathbb{V} \cong \mathbb{R}$, gerado pelo vetor e e $q(xe) = x^2$, então $q(e) = 1$. A álgebra de Clifford $C_{1,0,0}$ será

$$C_{1,0,0} = \{a.1 + b.e \mid a, b \in \mathbb{R}, e^2 = -1\} = \mathbb{C}$$

Exemplo 3.4. Considere agora $\mathbb{V} \cong \mathbb{R}^2$, o espaço vetorial gerado por e_1 e e_2 . Tome agora a forma quadrática $q(xe_1 + ye_2) = x^2 + y^2$. Então $C_{2,0,0}$ será dada por

$$C_{2,0,0} = \{a.1 + be_1 + ce_2 + de_1 \bullet e_2 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, e_i \bullet e_j + e_j \bullet e_i = -2\delta_{ij}\}$$

vamos analisar mais de perto as relações nesta álgebra. Denominando $i = e_1$, $j = e_2$ $ek = e_1 \bullet e_2$ temos que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, de fato

$$k^2 = ijk = e_1 \bullet e_2 \bullet e_1 \bullet e_2 = -e_1 \bullet e_1 \bullet e_2 \bullet e_2 = -(-1)(-1) = -1.$$

Agora reconhecemos claramente que $C_{2,0,0}$ é a álgebra dos quatérnions \mathbb{H} .

Exemplo 3.5. Considere agora $\mathbb{V} \cong \mathbb{R}^2$, o espaço vetorial gerado por e_1 e e_2 . Tome agora a forma quadrática $q(xe_1 + ye_2) = -x^2 - y^2$. Então $C_{0,2,0}$ será dada por

$$C_{0,2,0} = \{a.1 + be_1 + ce_2 + de_1 \bullet e_2 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, e_i \bullet e_j + e_j \bullet e_i = 2\delta_{ij}\}$$

Afirmamos que esta álgebra é isomorfa à álgebra das matrizes 2×2 reais. De fato, seja a aplicação linear

$$\begin{aligned} \eta: \mathbb{R}^2 &\rightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ e_1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ e_2 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A propriedade universal da álgebra de Clifford $C_{0,2,0}$ nos fornece um homomorfismo de álgebras $\hat{\eta}$ que estende esta aplicação linear. É fácil ver que

$$\hat{\eta}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e que

$$\hat{\eta}(e_1 \bullet e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com isto, podemos ver que a aplicação $\hat{\eta}$ é sobrejetiva, pois os geradores canônicos da álgebra de matrizes podem ser facilmente obtidos:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \hat{\eta}\left(\frac{1}{2}(1 + e_2)\right), \\ e_{22} &= \hat{\eta}\left(\frac{1}{2}(1 - e_2)\right), \\ e_{21} &= \hat{\eta}\left(\frac{1}{2}(e_1 + e_1 \bullet e_2)\right), \\ e_{12} &= \hat{\eta}\left(\frac{1}{2}(e_1 - e_1 \bullet e_2)\right). \end{aligned}$$

Com estas expressões, também fica fácil mostrar que $\hat{\eta}$ é um morfismo injetivo, tarefa esta que deixamos ao encargo do leitor.

3.3 Os grupos *Pin* e *Spin*

Para concluirmos este capítulo, vamos dar uma pequena amostra dos grupos contidos dentro de uma álgebra de Clifford e fazer uma conexão com os resultados já estudados nos capítulos anteriores. Seja $C = C(\mathbb{V}, q)$ uma álgebra de Clifford. Se q não é a forma quadrática identicamente nula, então, C possui muitos elementos inversíveis. De fato, seja $v \in \mathbb{V}$ tal que $q(v) \neq 0$, então

$$v^2 = -q(v) \quad \Rightarrow \quad v \bullet \frac{v}{-q(v)} = 1$$

Para cada elemento inversível $x \in C^\times$, podemos definir a aplicação Ad_x , que a cada elemento $y \in C$ associa o elemento $xyx^{-1} \in C$. da mesma maneira que fizemos para os quatérnions, podemos mostrar que Ad_x é um automorfismo na álgebra C . Com isto, podemos definir a ação adjunta

$$\begin{aligned} \text{Ad} : C^\times &\rightarrow \text{Aut}(C) \\ x &\mapsto \text{Ad}_x \end{aligned}$$

Proposição 3.1. *Seja $v \in \mathbb{V} \subset C$ um vetor tal que $q(v) \neq 0$ então $\text{Ad}_v(\mathbb{V}) \subseteq \mathbb{V}$. Além do mais, para todo $w \in \mathbb{V}$ temos a expressão*

$$-\text{Ad}_v(w) = w - 2\frac{b(v, w)}{q(v)}v.$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} \text{Ad}_v(w) &= v w v^{-1} = -\frac{1}{q(v)} v w v = \\ &= -\frac{1}{q(v)} v(-v w - 2b(v, w)) = \\ &= \frac{1}{q(v)} (v^2 w + 2b(v, w)v) = \\ &= \frac{1}{q(v)} (-q(v)w + 2b(v, w)v) = \\ &= -w + 2\frac{b(v, w)}{q(v)}v \end{aligned}$$

de onde concluímos as afirmações do teorema. ■

Definição 3.5. *Seja $P(\mathbb{V}, q) \subseteq C(\mathbb{V}, q)^\times$ o subgrupo multiplicativo gerado pelos vetores $v \in \mathbb{V}$ tais que $q(v) \neq 0$*

Notemos ainda que, se $v \in \mathbb{V}$ é tal que $q(v) \neq 0$ então para qualquer $w \in \mathbb{V}$ temos

$$\begin{aligned} q(\text{Ad}_v(w)) &= b(-w + 2\frac{b(v, w)}{q(v)}v, -w + 2\frac{b(v, w)}{q(v)}v) = \\ &= q(w) - 4\frac{b(v, w)}{q(v)}b(v, w) + 4\left(\frac{b(v, w)}{q(v)}\right)^2 q(v) = \\ &= q(w). \end{aligned}$$

Assim, podemos definir a restrição da ação adjunta para $\text{Ad} : P(\mathbb{V}, q) \rightarrow O(\mathbb{V}, q)$, onde entendemos $O(\mathbb{V}, q)$ como o grupo das transformações ortogonais em \mathbb{V} relativas à forma quadrática q . Novamente, você deve ter notado a semelhança com tudo o que fizemos no caso dos quatérnions com a ação adjunta e de fato, se tomarmos a álgebra de Clifford do exemplo 3.4, obteremos a mesma ação adjunta apresentada no capítulo anterior.

Definição 3.6. *O subgrupo $\text{Pin}(\mathbb{V}, q)$ é definido como o subgrupo de $P(\mathbb{V}, q)$ gerado pelos vetores $v \in \mathbb{V}$ tais que $q(v) = \pm 1$. O subgrupo $\text{Spin}(\mathbb{V}, q)$ é a intersecção $\text{Spin}(\mathbb{V}, q) = \text{Pin}(\mathbb{V}, q) \cap C(\mathbb{V}, q)^+$.*

Exercício 3.5: Mostre que, de fato, $\text{Pin}(\mathbb{V}, q)$ e $\text{Spin}(\mathbb{V}, q)$ são subgrupos de $P(\mathbb{V}, q)$.

Note que, intuitivamente, o grupo Pin equivale ao subgrupo multiplicativo restrito à “esfera unitária” na álgebra de Clifford. O resultado mais importante envolvendo estes grupos é:

Teorema 3.6. [8] *Seja $C(\mathbb{V}, q)$ uma álgebra de Clifford sobre um espaço vetorial real \mathbb{V} . Então, existe um homomorfismo de grupo sobrejetivo entre $\text{Spin}(\mathbb{V}, q)$ e $SO(\mathbb{V}, q)$ cujo kernel é igual a $\{+1, -1\}$.*

Somente para fazermos uma ponte com a notação adotada nos capítulos anteriores. Se $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ e a forma quadrática é dada pelo produto interno canônico, então $C(\mathbb{V}, q) = C_{n,0,0}$. Neste caso, $\text{Spin}(\mathbb{V}, q) = \text{Spin}_n$ e $SO(\mathbb{V}, q) = SO(n)$. Então, o que o resultado acima está dizendo é que existe uma correspondência 2 para 1 entre os elementos de Spin_n e $SO(n)$. No caso $n = 3$ obtivemos no capítulo anterior que, de fato que $\text{Spin}_3 \cong SU(2)$.

Esta é uma pequena amostra da teoria das álgebras de Clifford, limitada neste texto por questões de tempo de redação. Mas aconselhamos o leitor mais interessado que consulte as referências [5] e [8] para um melhor aprofundamento no assunto.

Apêndice A

Conceitos básicos de teoria dos grupos

Definição A.1. Um grupo é um par (G, \cdot) onde G é um conjunto não vazio e

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

é uma função, denominada operação do grupo, satisfazendo

1. (Associatividade) Para todos os elementos $a, b, c \in G$ temos $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
2. (Elemento neutro) Existe um elemento $e \in G$ tal que para todo $a \in G$ tenhamos $a \cdot e = e \cdot a = a$.
3. (Elemento inverso) A todo elemento $a \in G$ associa-se um elemento a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Exercício A.1: Mostre que existe um único elemento neutro em um grupo.

Exercício A.2 : Mostre que existe um único elemento inverso para cada elemento $a \in G$.

A operação no grupo nem sempre é comutativa, quando isto ocorre, temos uma classe particular de grupos, os grupos abelianos.

Definição A.2. Um grupo (G, \cdot) é dito ser abeliano, ou comutativo se para todos os elementos $a, b \in G$ tivermos $a \cdot b = b \cdot a$, ou seja, a operação do grupo satisfaz à propriedade da comutatividade

Antes de irmos para os exemplos, uma última definição.

Definição A.3. Um subconjunto não vazio H de um grupo G é dito ser um sub-grupo de G se H com a operação de G também for um grupo.

Exercício A.3: Mostre que se $H \subseteq G$ é subgrupo, então o elemento neutro de H é igual ao elemento neutro de G e para qualquer $a \in H$, seu inverso com relação a H é o mesmo inverso com relação a G .

Exercício A.4: Mostre que uma condição necessária e suficiente para que $H \subseteq G$ seja subgrupo de G é que para quaisquer $a, b \in H$, tivermos que $a \cdot b^{-1} \in H$.

Exercício A.5: Mostre que um subgrupo de um grupo abeliano também é abeliano.

Vejamos alguns exemplos de grupos e subgrupos.

Exemplo A.1. O conjunto dos números inteiros com a operação de adição, $(\mathbb{Z}, +)$, é um grupo abeliano, pois a soma é associativa, comutativa, o elemento neutro é o número 0 e o inverso de $n \in \mathbb{Z}$ é o seu oposto, $-n$. Os números inteiros múltiplos de um determinado $m \in \mathbb{Z}$ são subgrupos de \mathbb{Z} com a operação adição.

Exemplo A.2. Seja $n \in \mathbb{Z}$ um número inteiro positivo. O conjunto das classes de congruência módulo n , denotado por \mathbb{Z}_n é um grupo, induzido pela operação de adição dos números inteiros: $\bar{k} + \bar{l} = \overline{k+l}$. Este grupo é um grupo abeliano com n elementos, que são $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{n-1}$.

Exemplo A.3. O conjunto dos números reais também com a operação de adição, $(\mathbb{R}, +)$, também é um grupo abeliano e podemos ver que $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$ são subgrupos de $(\mathbb{R}, +)$.

Exemplo A.4. O conjunto dos números complexos não nulos com a operação de multiplicação, (\mathbb{C}^*, \cdot) é um grupo abeliano, pois a multiplicação é associativa, comutativa, o elemento neutro é o número 1 e todo número complexo não nulo possui inverso multiplicativo. Os conjuntos (\mathbb{R}^*, \cdot) e (\mathbb{Q}^*, \cdot) são subgrupos abelianos de (\mathbb{C}^*, \cdot) .

Exemplo A.5. O subconjunto dos números complexos de módulo unitário, $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ é um subgrupo de (\mathbb{C}^*, \cdot) . Geometricamente, este conjunto corresponde à circunferência no plano complexo de raio 1 e centro na origem. Se $z = a + bi$, então

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Se $|z| = 1$, então $z^{-1} = a - bi$ e $|z^{-1}| = |z| = 1$. Além disto, se $z, w \in U(1)$, então

$$|zw^{-1}| = |z||w^{-1}| = |z||w| = 1.$$

Portanto $zw^{-1} \in U(1)$, mostrando que $U(1)$ é subgrupo de (\mathbb{C}^*, \cdot) .

Exemplo A.6. Seja X um conjunto qualquer e $Bij(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ é bijeção}\}$. Vamos verificar que $Bij(X)$ é um grupo com a operação dada pela composição

de funções, de fato, veremos mais adiante que todo grupo pode ser visto como um subgrupo de um grupo de bijeções sobre um determinado conjunto.

Em primeiro lugar, a composição de funções é associativa, isto é, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, sempre que for possível efetuar a composição. Em nosso caso, todas as funções possuem como domínio todo o conjunto X e seus conjuntos imagem também são o conjunto X . Também sabemos que a função identidade Id_X quando composta com qualquer função $f : X \rightarrow X$ resulta na própria f , isto é, $f \circ Id_X = Id_X \circ f = f$. Além do mais, Id_X é uma bijeção e portanto pertence a $Bij(X)$. Além disto, uma função $f : X \rightarrow X$ é bijeção se, e somente se, possuir função inversa, isto é, uma função $g : X \rightarrow X$ tal que $g \circ f = f \circ g = Id_X$, e esta inversa é também uma bijeção.

Resta-nos saber o principal, isto é, se a composta de duas bijeções também é uma bijeção para caracterizarmos $Bij(X)$ como um grupo. Para isto, tome $f, g \in Bij(X)$, então existem f^{-1} e g^{-1} , também pertencentes a $Bij(X)$. Note que

$$f \circ g \circ g^{-1} \circ f^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \circ f \circ g = Id_X.$$

Portanto $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, o que mostra que $f \circ g \in Bij(X)$. Note que, em geral, o grupo $Bij(X)$ não é abeliano.

De fato, é possível mostrar que todos os grupos podem ser vistos como subgrupos de um grupo de bijeções de um conjunto dado.

Exemplo A.7. De particular interesse para o estudo da geometria são os grupos de transformações lineares e alguns de seus subgrupos. Para fixarmos as notações, seja \mathbb{V} um espaço vetorial (a menos que se diga o contrário, vamos assumir que os espaços vetoriais sejam todos sobre o corpo dos reais, \mathbb{R}). Seja $GL(\mathbb{V})$ o conjunto de todas as transformações lineares invertíveis de \mathbb{V} em \mathbb{V} . Certamente, este é um subconjunto do grupo de bijeções $Bij(\mathbb{V})$, como a composição de duas transformações lineares também é linear e a inversa de uma transformação linear também é linear, então temos que $GL(\mathbb{V})$ é um subgrupo de $Bij(\mathbb{V})$.

Exercício A.6: Mostre que a composta de duas transformações lineares invertível é uma transformação linear invertível e que a inversa de uma transformação linear também é uma transformação linear invertível.

No caso em que o espaço vetorial \mathbb{V} é de dimensão finita (digamos, $\dim(\mathbb{V}) = n$ podemos identificar as transformações lineares de \mathbb{V} em \mathbb{V} com matrizes quadradas $n \times n$. Para isto, basta tomarmos uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ e definirmos, para uma dada transformação linear $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, a matriz $[T]_E = (t_{ij})_{i,j}$ tal que $T(e_j) = \sum_{i=1}^n t_{ij}e_i$. A condição de que $T \in GL(\mathbb{V})$ equivale, em termos matriciais, à condição $\det([T]_E) \neq 0$. Geometricamente, podemos entender o determinante $\det([T]_E)$ como o volume (com sinal) do paralelepípedo n dimensional determinado pelos vetores $T(e_1), \dots, T(e_n)$. Dizermos que $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ é inversível, em dimensão finita, é equivalente a dizermos que T é injetiva, ou ainda, que $T(e_1), \dots, T(e_n)$ são linearmente independentes, o que equivale a dizer que o volume do paralelogramo determinado por estes vetores é não nulo.

Exemplo A.8. Definamos $GL(n, \mathbb{R})$ como o conjunto das matrizes $n \times n$ de determinante não nulo. Como você já deve ter notado, este conjunto corresponde ao grupo $GL(\mathbb{V})$ no caso em que $\dim(\mathbb{V}) = n$, portanto, também deve ser um grupo. Esta noção de correspondência entre os grupos com a definição de isomorfismo dada neste apêndice na Definição A.4. Por agora, basta-nos verificar que $GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo, para isto, sejam $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$, então $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$, logo $AB \in GL(\mathbb{V})$. Também temos que $\det(I) = 1 \neq 0$ e que $\det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$, logo $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \neq 0$. Com estes resultados, temos que $GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo.

Exercício A.7: Mostre que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (para mais detalhes sobre determinantes veja a referência [9]).

Exemplo A.9. Existem alguns sub-grupos dos grupos lineares que são importantes para aplicações: O primeiro exemplo é o subgrupo linear especial $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$. Para vermos que, de fato, $SL(n, \mathbb{R})$ é subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$, tome $A, B \in SL(n, \mathbb{R})$, temos que $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)} = 1$ e, portanto

$$\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = 1.$$

Portanto $AB^{-1} \in SL(n, \mathbb{R})$.

Para o próximo exemplo de subgrupo de $GL(\mathbb{V})$, considere agora que \mathbb{V} de dimensão finita esteja munido com um produto escalar euclidiano

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\mapsto \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

onde, se $v = (v^1, v^2, \dots, v^n)$ e $w = (w^1, w^2, \dots, w^n)$, então

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v^i w^i.$$

O conjunto das transformações lineares que preserva o produto escalar, ou transformações ortogonais é denotado por $O(\mathbb{V})$. Um elemento de $O(\mathbb{V})$ é uma transformação linear T tal que

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

De fato, temos a seguinte lista de afirmações equivalentes:

Teorema A.1. Seja \mathbb{V} um espaço vetorial sobre \mathbb{R} com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ uma transformação linear. São equivalentes:

1. $\forall v, w \in \mathbb{V}$, $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$, ou seja, T preserva o produto interno.
2. T preserva a norma, isto é, $\|T(v)\| = \|v\|$ e se v e w têm ângulo θ , $\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|}$, então o ângulo entre $T(v)$ e $T(w)$ também é θ .

3. T transforma bases ortonormais em bases ortonormais, isto é, se $E = \{e_1, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{V}$ é base ortonormal relativa ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ então $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\} \subseteq \mathbb{V}$ é base ortonormal.

4. A matriz $[T]_E = (t_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ é ortogonal, isto é $[T]_E^T = [T]_E^{-1}$.

Demonstração: (1 \Rightarrow 2)

Seja $v \in \mathbb{V}$, temos que $\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$. Logo $\|T(v)\| = \|v\|$.

Sejam agora dois vetores $v, w \in \mathbb{V}$ e θ o ângulo entre v e w . Assim

$$\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \frac{\langle T(v), T(w) \rangle}{\|T(v)\| \|T(w)\|}.$$

Logo θ é também o ângulo entre $T(v)$ e $T(w)$.

(2 \Rightarrow 3)

Seja $E = e_1, \dots, e_n$ uma base ortonormal de \mathbb{V} . Temos que, $\|T(e_k)\| = \|e_k\| = 1$. Também, o ângulo entre $T(e_i)$ e $T(e_j)$ é igual ao ângulo entre e_i e e_j onde $i, j = 1, \dots, n$, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{2}$, se $i \neq j$. Logo T leva base ortonormal em base ortonormal.

(3 \Rightarrow 4)

Podemos escrever a matriz da transformação T na base $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ como

$$(T(e_1) \cdots T(e_n)).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} [T]_E^T [T]_E &= \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \vdots \\ T(e_n) \end{pmatrix} (T(e_1) \cdots T(e_n)) = \\ &= (\langle T(e_i), T(e_j) \rangle)_{ij} = \\ &= (\delta_{ij})_{ij} = I \end{aligned}$$

Como a base $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ é ortonormal, podemos facilmente ver que as entradas individuais da matriz T se escrevem como

$$T_{ij} = \langle e_i, T(e_j) \rangle.$$

Logo, a i -ésima linha da matriz T é o vetor

$$L_i = (T_{i1}, \dots, T_{in}).$$

Vamos utilizar isto para efetuarmos o cálculo do produto $[T]_E [T]_E^T$:

$$[T]_E [T]_E^T = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} (L_1^T \cdots L_n^T) =$$

$$\begin{aligned}
&= (\langle L_i, L_j \rangle)_{ij} = \\
&= \left(\sum_{k=1}^n T_{ik} T_{jk} \right)_{ij} = \\
&= \left(\sum_{k=1}^n \langle e_i, T(e_k) \rangle \langle e_j, T(e_k) \rangle \right)_{ij} = \\
&= (\langle e_i, e_j \rangle)_{ij} = \\
&= (\delta_{ij})_{ij} = I.
\end{aligned}$$

Onde na última igualdade usamos o fato que $\{T(e_1), \dots, T(e_n)\}$ é uma base ortonormal para \mathbb{V} , e com isto podemos expandir os vetores e_i , para $1 \leq i \leq n$ nesta base. Logo $[T]_E$ é uma matriz ortogonal.

(4 \Rightarrow 1)
Temos que

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1, \dots, n} \alpha_i \beta_i.$$

Vamos tentar expressar este produto em termo matriciais. Primeiramente, temos que os vetores de \mathbb{V} podem ser expressos, na base E , como vetores coluna:

$$[u]_E = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad ; \quad [v]_E = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Assim, o produto interno pode ser escrito matricialmente como $\langle u, v \rangle = [u]_E^T [v]_E$. Portanto

$$\begin{aligned}
\langle T(u), T(v) \rangle &= [Tu]_E^T [Tv]_E \\
&= [u]_E^T [T]_E^T [T]_E [v]_E \\
&= [u]_E^T [v]_E = \langle u, v \rangle,
\end{aligned}$$

o que conclui a prova. ■

Exercício A.8: Mostre, valendo-se das equivalências do teorema anterior, que $O(\mathbb{V})$ é um grupo.

Você percebeu que com a mesma associação que fizemos de cada transformação linear à sua matriz de transformação linear, as transformações ortogonais estarão associadas a matrizes que satisfarão a propriedade do exercício 2.12. Estas matrizes são chamadas matrizes ortogonais. Também você já desconfia que o conjunto das matrizes ortogonais $n \times n$, denotado por $O(n)$, também será um grupo, de fato será subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$.

Exercício A.9: Mostre que o determinante de uma matriz ortogonal só pode assumir os valores 1 e -1 .

Exemplo A.10. O conjunto das matrizes ortogonais de determinante 1, denotado por $SO(n) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n)$ também é um grupo, denominado grupo ortogonal especial, pois trata-se da intersecção de dois subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$.

Exercício A.10: Mostre que, de fato, a intersecção de dois subgrupos de um grupo G também é um subgrupo de G .

Exemplo A.11. A última classe de exemplos que será útil ao longo do texto será a dos grupos unitários. Considere um espaço vetorial \mathbb{V} , de dimensão finita, mas agora sobre o corpo dos números complexos, \mathbb{C} . Também introduza em \mathbb{V} uma forma sesquilinear, isto é, uma aplicação

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (v, w) &\mapsto \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

satisfazendo às seguintes propriedades:

$$(i) \quad \langle v, \lambda w_1 + w_2 \rangle = \lambda \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \text{ para todos } v, w_1, w_2 \in \mathbb{V} \text{ e todo } \lambda \in \mathbb{C}.$$

$$(ii) \quad \langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}, \text{ para todos } v, w \in \mathbb{V}.$$

$$(iii) \quad \langle v, v \rangle \geq 0 \text{ e } \langle v, v \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } v = 0.$$

O exemplo canônico de forma sesquilinear em \mathbb{C}^n é,

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{v^i} w^i,$$

onde escrevemos $v = (v^1, \dots, v^n)^T$ e $w = (w^1, \dots, w^n)^T$.

Dizemos que uma transformação linear $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é unitária com relação à forma sesquilinear \langle , \rangle se

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad , \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n.$$

De maneira análoga às transformações ortogonais em espaços vetoriais reais, deixamos ao encargo do leitor verificar que a matriz de uma transformação unitária é unitária, no sentido que

$$[T][T]^* = [T]^*[T] = I,$$

onde $[T]^*$ representa o hermitiano conjugado da matriz $[T]$, ou seja, se

$$[T] = (t_{ij})_{i,j}$$

então

$$[T]^* = (\overline{t_{ji}})_{i,j}.$$

¹A maioria dos autores utiliza a linearidade na primeira entrada na forma sesquilinear, somente estamos utilizando esta convenção aqui para deixarmos as expressões matriciais semelhantes ao que fizemos para o caso de transformações ortogonais

Denotaremos por $U(n)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ unitárias. Notando que $(AB)^* = B^*A^*$, fica fácil ver que $U(n)$ forma um grupo matricial (deixamos a verificação como exercício). Como caso especial, se $n = 1$ temos o grupo $U(1)$ que nada mais é que o grupo dos números complexos unimodulares.

Finalmente, denotaremos por $SU(n)$ o subgrupo das matrizes $n \times n$ unitárias de determinante igual a 1.

Com esta coleção de exemplos suficientemente ampla para nos fornecer intuição, podemos avançar um pouco mais na teoria de forma a entendermos as interrelações entre diversos grupos. Para relacionarmos grupos distintos, precisamos definir funções entre eles que sejam compatíveis com as suas operações internas, estas funções são denominadas homomorfismos.

Definição A.4. Dados dois grupos G e H , uma função $\varphi : G \rightarrow H$ é dita ser um homomorfismo de grupos se $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, para todos os elementos $a, b \in G$. Se o homomorfismo é injetivo, dizemos que ele é um monomorfismo. Se o homomorfismo é sobrejetivo, dizemos que ele é um epimorfismo. Se o homomorfismo é bijetivo, dizemos que ele é um isomorfismo.

Denotaremos $G \cong H$ quando os grupos G e H forem isomorfos.

Definição A.5. Um homomorfismo sobre o mesmo grupo é denominado um endomorfismo. Um endomorfismo bijetor, isto é um isomorfismo sobre o mesmo grupo é denominado um automorfismo.

Exercício A.11: Mostre que, se $\varphi : G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupos, então

1. $\varphi(e_G) = e_H$.
2. Para qualquer $a \in G$, temos que $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$.

Exercício A.12: Mostre que, se $\phi : G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupos e $K \subseteq G$ é um subgrupo, então $\phi(K) \subseteq H$ também é um subgrupo. Mostre também que se K é um subgrupo abeliano de G , então $\phi(K)$ também é subgrupo abeliano de H .

Definição A.6. Dado um homomorfismo de grupos $\phi : G \rightarrow H$, definimos o kernel de ϕ , como o subconjunto

$$\ker(\phi) = \{g \in G \mid \phi(g) = e_H\}.$$

Exercício A.13: Mostre que o kernel do homomorfismo $\phi : G \rightarrow H$, é um subgrupo de G .

Proposição A.1. O homomorfismo $\phi : G \rightarrow H$ é injetivo se, e somente se $\ker(\phi) = \{e_G\}$.

Demonstração: (\Rightarrow) Se ϕ é injetiva e $g \in \ker(\phi)$ então $\phi(g) = e_H = \phi(e_G)$, então, pela injetividade, temos que $g = e_G$.

(\Leftarrow) Considere $g, h \in G$ tais que $\phi(g) = \phi(h)$, então

$$e_H = \phi(g)(\phi(h))^{-1} = \phi(g)\phi(h^{-1}) = \phi(gh^{-1}),$$

ou seja, $gh^{-1} \in \ker(\phi)$. Como $\ker(\phi) = \{e_G\}$ então $gh^{-1} = e_G$, o que implica em $g = h$. ■

Exercício A.14: Seja \mathbb{V} um espaço vetorial de dimensão n , com uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ e dada uma transformação linear $A : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, denotemos por \hat{A} a matriz da transformação linear nesta base escolhida. Mostre que a aplicação

$$\begin{aligned} \hat{\cdot} : GL(\mathbb{V}) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto \hat{A} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grupos.

Exercício A.15: Dado o isomorfismo do exercício anterior, e supondo que \mathbb{V} é um espaço com produto interno e que a base escolhida é ortonormal com relação a este produto interno, mostre que $O(\mathbb{V}) \cong O(n)$.

Referências Bibliográficas

- [1] Altmann, S.L. (1986) *Rotations, Quaternions and Double Groups*. Dover Inc
- [2] Boulos, P and Camargo, I () *Geometria Analítica, Um Tratamento Vetorial, 3ª Ed.* Makron Books
- [3] Cartan, E. (1966) *The Theory of Spinors*. Dover Inc
- [4] Conway, J.H. and Smith, D.E. (2003) *On Quaternions and Octonions*. A.K. Peters Ltd
- [5] Garling, D.J.H. (2011) *Clifford Algebras: An Introduction*. Cambridge U. Press
- [6] Hladik, J. (1999) *Spinors in Physics*. Springer Verlag
- [7] Hoffman, K. , Kunze, R. (1971) *Linear Algebra*, 2nd. Edition. Prentice Hall
- [8] Lawson Jr., H.B. and Michelsohn, M.L. (1989) *Spin Geometry*. Princeton U. Press
- [9] Lima, E.L. (2007) *Álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária*, IMPA, RJ
- [10] Lyons, D.W. (2003) An Elementary Introduction to the Hopf Fibration. *Mathematics Magazine* **Vol, 76, No.2**, 87–98.
- [11] Marénitch, A., Ananin, A. and Bozhkov, Y. (1998) A 3-Esfera e seus Familiares. O Fibrado de Hopf. *Matemática Universitária* **no 24/25**, 10–22.
- [12] Marsden, J.E. and Ratiu, T.S. (1999) *Introduction to Mechanics and Symmetry* 2nd Ed.. Springer Verlag
- [13] Nahin, P.J. (1998) *An Imaginary Tale, The Story of $\sqrt{-1}$* . Princeton U. Press
- [14] Ryder, L.H. (1996) *Quantum Field Theory* 2nd Ed.. Cambridge U. Press

- [15] Selig, J.M. (2010) *Geometric Fundamentals of Robotics*. Springer Verlag
- [16] Zettili, N. (2001) *Quantum Mechanics, Concepts and Applications*. John Willey & Sons LTD