

Bruna Nunes

*Geometria Diferencial de Superfícies e o  
Teorema de Gauss-Bonnet*

Florianópolis

2010

**Bruna Nunes**

*Geometria Diferencial de Superfícies e o  
Teorema de Gauss-Bonnet*

Trabalho de conclusão de curso apresentado  
na Universidade Federal de Santa Catarina  
para a obtenção do título de licenciada em  
Matemática

Orientador:  
Eliezer Batista

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

Florianópolis

2010

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática — Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 02/CCM/11.

---

Prof. Nereu Estanislau Burin  
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

---

Prof. Eliezer Batista  
Orientador

---

Prof. Fernando de Lacerda Mortari

---

Prof. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da  
Costa

# *Sumário*

<b>Introdução</b>	p. 5
<b>1 Superfícies Regulares Parametrizadas</b>	p. 7
1.1 Superfícies Regulares . . . . .	p. 7
1.2 Mudança de Parâmetros . . . . .	p. 17
1.3 Funções Diferenciáveis em Superfícies . . . . .	p. 20
1.3.1 Funções reais diferenciáveis em superfícies . . . . .	p. 20
1.3.2 Funções diferenciáveis entre superfícies . . . . .	p. 23
1.4 Plano Tangente e diferencial de uma aplicação . . . . .	p. 25
<b>2 Primeira Forma Fundamental, Aplicação Normal e Segunda Forma Fundamental</b>	p. 33
2.1 Primeira Forma Fundamental . . . . .	p. 33
2.2 Aplicação Normal de Gauss . . . . .	p. 42
2.3 Segunda Forma Fundamental . . . . .	p. 49
<b>3 Curvaturas</b>	p. 54
3.1 Curvatura Normal . . . . .	p. 54
3.2 Curvatura Gaussiana e Média . . . . .	p. 62
<b>4 Geometria Intrínseca das Superfícies</b>	p. 76
4.1 Isometrias e o Teorema Egregium(Gauss) . . . . .	p. 76
4.2 Derivada Covariante e Transporte Paralelo . . . . .	p. 87
4.3 Geodésicas . . . . .	p. 93

4.3.1	Curvatura Geodésica . . . . .	p. 95
<b>5</b>	<b>Teorema de Gauss-Bonnet</b>	p. 99
5.1	Preliminares . . . . .	p. 99
5.2	Teorema de Gauss-Bonnet (Versão Local) . . . . .	p. 113
	<b>Considerações Finais</b>	p. 120
	<b>Referências</b>	p. 121

# *Introdução*

A geometria diferencial é o estudo da geometria usando as técnicas do cálculo diferencial e integral. Neste trabalho faremos um estudo sobre a geometria diferencial de superfícies, provavelmente a parte mais interessante e representativa da geometria diferencial, entretanto, algumas propriedades das curvas aparecem de maneira natural no estudo das superfícies.

Curvas e superfícies são objetos que qualquer pessoa pode ver, e muitas das questões que podem ser levantadas sobre estes objetos são óbvias e naturais. A geometria diferencial preocupa-se com a formulação matemática de algumas dessas questões e usando as técnicas do cálculo diferencial, procura encontrar respostas para elas.

Nosso trabalho está organizado em 5 capítulos no primeiro capítulo, na seção 1.1, apresentamos a definição de superfície regular e a partir desse conceito começamos a caracterizar o comportamento dessas superfícies, demonstramos alguns resultados e identificamos algumas superfícies regulares. Na seção 1.2, mostramos que um ponto pode ser coberto por mais de uma parametrização. Na seção 1.3, apresentamos duas aplicações diferenciáveis sobre e entre superfícies. Com a definição de superfícies regulares podemos garantir a existência de um plano tangente em todos os pontos da superfície na seção 1.4, definimos plano tangente.

O estudo das propriedades locais de uma superfície regular está diretamente ligado ao estudo de duas formas quadráticas, a primeira e segunda forma fundamentais, que serão apresentadas no segundo capítulo. A primeira forma fundamental, seção 2.1, nos permite o cálculo de algumas questões métricas, tais como, comprimento de arco, ângulo entre curvas e áreas de regiões sobre a superfície. Na seção 2.2, começamos nosso estudo sobre a geometria da aplicação de Gauss e na seção 2.3, apresentamos a definição da segunda forma fundamental sobre um aspecto algébrico.

No capítulo 3, na seção 3.1, apresentamos a interpretação geométrica da segunda forma fundamental, as curvaturas. Na seção 3.2, definimos as curvaturas de médias e gaussianas.

No capítulo 4, começamos o estudo da geometria intrínseca das superfícies, ou seja, a

parte da geometria diferencial que depende apenas da primeira forma fundamental. Na seção 4.1, definimos isometria e demonstramos o famoso teorema egregium de Gauss, que mostra que a curvatura gaussiana é uma característica intrínseca da superfície. Na seção 4.2, definimos a derivada covariante e transporte paralelo e na 4.3, definimos geodésica e curvatura geodésica.

No último capítulo, demonstramos a versão local do teorema de Gauss-Bonnet, mas antes disso, na seção 5.1, definimos índice de rotação, homotopia e demonstramos o teorema do índice de rotação e por fim, na seção 5.2, demonstramos a versão local do teorema de Gauss-Bonnet.

Para concluir, podemos dizer que objetivo maior do nosso trabalho é estudar as superfícies regulares de modo que possamos entender alguns conceitos e resultados, para por fim, demonstrarmos o teorema de Gauss-Bonnet.

# 1 *Superfícies Regulares* *Parametrizadas*

Neste capítulo, começaremos o nosso estudo das superfícies regulares.

Inicialmente, podemos dizer que uma superfície é um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  que se assemelha a uma parte de  $\mathbb{R}^2$  numa vizinhança de qualquer ponto, tal como a superfície da Terra, embora esférica, parece plana a um observador nela colocado, que consegue ver somente até linha do horizonte.

Na seção 1.1 vamos definir superfícies regulares utilizando o conceito de parametrização local, ou seja, tomamos um ponto  $p$  de uma superfície e uma vizinhança aberta desse ponto contida na superfície e assim construímos uma aplicação com domínio em um aberto do  $\mathbb{R}^2$  e imagem em pontos da vizinhança de  $p$ . A partir daí, começaremos a caracterizar e identificar superfícies regulares, demonstrando alguns resultados e fazendo alguns exemplos.

No entanto, dado um ponto  $p$  de uma superfície regular  $S$ , esse pode ser coberto por mais de uma parametrização. Assim, na seção 1.2 mostraremos como fazer a troca de coordenada, ou seja, como passar de uma parametrização para outra.

Na seção 1.3, mostraremos que é possível definir a noção de diferenciabilidade para uma função definida sobre uma superfície regular e assim, na seção 1.4 definiremos plano tangente e diferencial de uma aplicação.

## 1.1 Superfícies Regulares

**Definição 1.1.** *Seja  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , diz-se que  $S$  é uma superfície regular se as três condições a seguir são satisfeitas:*

(i) *Se  $\forall p \in S$ ,  $\exists V \subseteq \mathbb{R}^3$ , vizinhança de  $p$  e uma aplicação  $X : U \rightarrow V \cap S$  diferenciável,*



onde  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  é um aberto. Ou seja, se

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

então as funções componentes de  $X$ ,  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  possuem derivadas parciais de todas as ordens em  $U$ ;

(ii) A aplicação  $X$  do item (i) é um homeomorfismo entre  $U$  e  $V \cap S$ , ou seja,  $X$  possui uma inversa  $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  que é contínua, isto é, existe um aberto  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  contendo  $V \cap S$  e uma função contínua  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuja restrição é  $X^{-1}$ ;

(iii) Para todo  $q = (u, v) \in U$ , a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

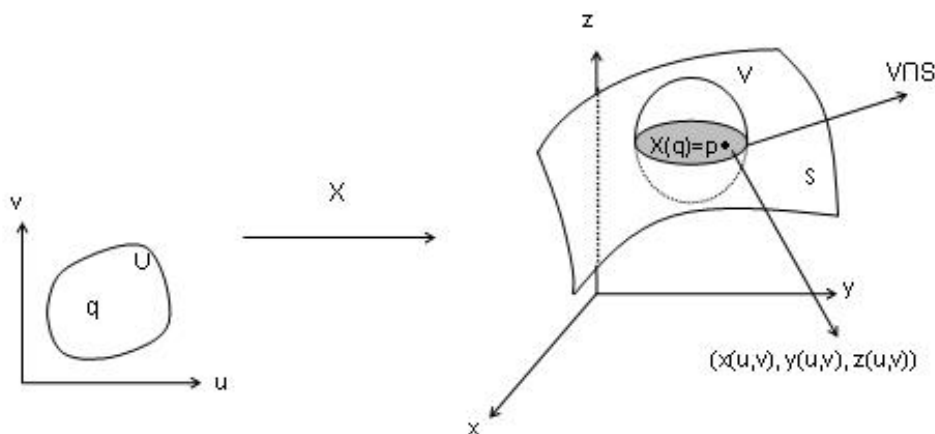


Figura 1: O ponto  $q \in U$  é levado pela aplicação  $X$  em um ponto da vizinhança de  $p \in S$ .

A aplicação  $X$  é uma *parametrização local* ou um *sistema de coordenadas locais* em uma vizinhança  $V \cap S$  de  $p$ , chamada de *vizinhança coordenada*.

Vamos analisar o que a definição 1.1 nos diz sobre o comportamento de uma superfície regular. A condição de diferenciabilidade em (i) é bastante natural se nossa intenção é tratar de geometria diferencial em  $S$ . A condição (ii) impõe que a aplicação  $X$  é um homeomorfismo e sua injetividade exclui a possibilidade de autointerseções em superfícies regulares.

Em (iii), temos que  $\frac{\partial X}{\partial u}$  e  $\frac{\partial X}{\partial v}$  são derivadas parciais das componentes de  $X$  calculadas no ponto  $q = (u_0, v_0)$ , que correspondem às colunas da matriz Jacobiana  $JX(u, v)$ , que é a matriz da aplicação linear relativa as bases canônicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

$$JX(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Por comodidade vamos denotar  $\frac{\partial X}{\partial u}$  por  $X_u$  e  $\frac{\partial X}{\partial v}$  por  $X_v$ .

A condição (iii) é equivalente as seguintes afirmações:

- Os vetores coluna,  $X_u$  e  $X_v$ , da matriz Jacobiana são linearmente independentes;
- $X_u \times X_v \neq 0$  (vetor nulo);
- A matriz  $JX(u, v)$  tem posto 2, ou seja um dos determinantes jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

deve ser diferente de zero em  $q = (u, v)$ .

Então, a condição (iii) exclui a possibilidade de existir bicos em uma superfície regular e assim garante a existência de um plano tangente em todos os pontos de  $S$ , veremos isso na seção 1.4.

Vejam um exemplo de uma superfície regular.

**Exemplo 1.1.** A esfera unitária  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma superfície regular.

Mostraremos que  $X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por  $X_1(u, v) = (u, v, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$ , com  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ , é uma parametrização de  $\mathbb{S}^2$ . Podemos observar que a imagem da parametrização  $X_1$  é a parte aberta de  $\mathbb{S}^2$  acima do plano  $xy$ .

Podemos observar que as funções componentes de  $X_1$  são diferenciáveis, já que temos que  $u^2 + v^2 < 1$ , logo a condição (i) da definição de superfície regular é verificada.

Seja um ponto qualquer  $(x, y, z) \in X_1(U) \subset \mathbb{S}^2$ , com  $X_1(U) \subset \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ e } z > 0\}$  e fizermos  $X_1^{-1}(x, y, z) \mapsto (x, y)$  temos  $u$  e  $v$  bem definidos de maneira única por  $u = x$  e  $v = y$ , logo  $X_1$  é bijetiva. E  $X_1^{-1}$  é a projeção de  $X_1(U) \subseteq \mathbb{S}^2$  em  $U$ , que é contínua. Logo a condição (ii) é verificada.

Para verificar a condição (iii) basta observar que a matriz jacobiana

$$JX_1(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} & \frac{-v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{bmatrix}$$

tem posto 2.

Agora cobriremos toda esfera utilizando parametrizações similares, como a parametrização  $X_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $X_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$ ,  $(u, v) \in U$ . Podemos observar que  $X_1(U) \cup X_2(U)$  cobre a esfera menos o equador  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ . Para cobrir toda a esfera, juntamente com  $X_1$  e  $X_2$ , utilizamos os planos  $xz$  e  $zy$  e definimos as seguintes parametrizações:

$$X_3(u, v) = (u, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v),$$

$$X_4(u, v) = (u, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v),$$

$$X_5(u, v) = (+\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v),$$

$$X_6(u, v) = (-\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v).$$

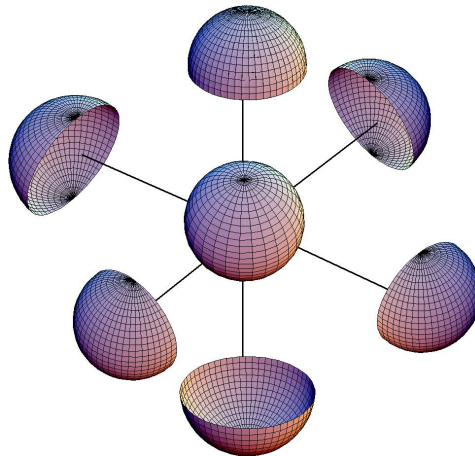


Figura 2: Parametrizações locais da esfera.

Assim, verificamos que a esfera é uma superfície regular.

Nem sempre é fácil mostrar que uma superfície é regular utilizando a definição 1.1, sendo assim, demonstraremos alguns resultados que facilitam na verificação se uma superfície é ou não regular. Antes disso vamos definir alguns conceitos.

**Definição 1.2.** Dada uma aplicação diferenciável  $F : V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $V$  aberto,

dizemos que  $p \in V$  é um ponto singular se  $dF_p$  não é sobrejetora, que é equivalente a dizer que  $F_x = F_y = F_z = 0$  calculadas em  $p$ . E  $F(p)$  é dito ser um valor singular.

**Definição 1.3.** Dada  $F : V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R}$ , dizemos que  $a$  é um valor regular de  $F$  se  $a$  não é um valor singular de  $F$ .

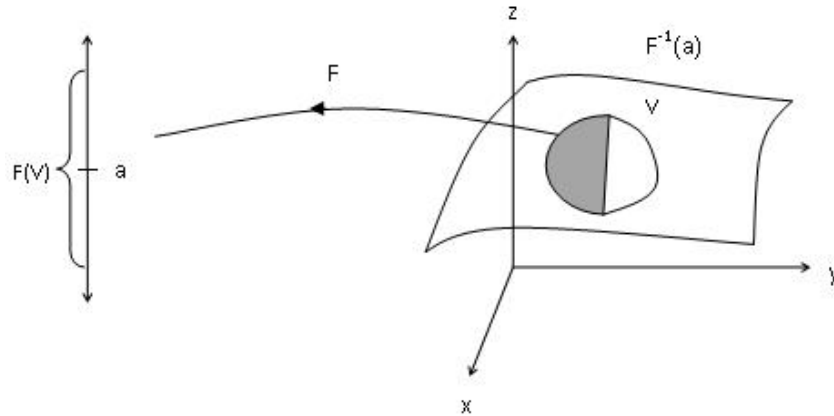


Figura 3: Valor regular de  $f$ .

**Proposição 1.1.** Se  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável em um conjunto aberto  $U$ , então o gráfico da  $f$ , isto é, o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $\{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in U\}$  é uma superfície regular.

*Demonstração.* Seja  $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , vamos mostrar que a aplicação  $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma parametrização do gráfico, cuja vizinhança coordenada cobre todos os pontos do gráfico.

A parametrização  $X$ , dada por  $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , possui todas as suas componentes diferenciáveis, logo a condição (i) é verificada.

Para verificar a condição (ii), podemos inicialmente observar que cada ponto  $(x, y, z)$  do gráfico é imagem por  $X$  de um único ponto  $q = (u, v) \in U$ , onde  $(u, v) = (x, y)$ . Portanto  $X$  é bijetiva. Mas  $X^{-1}$  é a restrição ao gráfico de  $f$  da projeção de  $\mathbb{R}^3$  sobre o plano  $xy$ , que é contínua, logo  $X^{-1}$  é contínua.

A condição (iii) também é verificada, pois a matriz Jacobiana de  $X$  é igual a

$$JX(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{bmatrix}$$

e tem posto 2 para todo  $(u, v) \in U$ .

Portanto o gráfico da  $f$  é uma superfície regular.  $\square$

Antes de demonstrarmos a próxima proposição vamos enunciar o teorema da aplicação inversa.

**Teorema 1.1** (Teorema da aplicação inversa). *Seja  $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) e seja  $p \in U$  tal que  $F'(p)$  é um isomorfismo linear em  $\mathbb{R}^n$ . Então existem abertos  $V \subseteq U$  vizinhança de  $p$  e  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  vizinhança de  $F(p)$  tal que  $F|_V : V \rightarrow W$  é um difeomorfismo de classe  $C^k$ .*

**Proposição 1.2.** *Dada uma função  $f : V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável e  $a \in f(U)$  um valor regular de  $f$ , então a imagem inversa  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular.*

*Demonstração.* Seja  $p = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto de  $f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = a\}$ . Como  $a$  é um valor regular de  $f$ , temos que alguma das derivadas parciais não é nula, vamos supor sem perda de generalidade que  $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ .

Definimos agora uma aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : V \subseteq \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x, y, f(x, y, z)). \end{aligned}$$

A diferencial de  $\Phi$  em  $p$  é dada por

$$d\Phi_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) & \frac{\partial f}{\partial z}(p) \end{bmatrix}$$

e  $\det(d\Phi_p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ .

Então pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos  $W_1 \subseteq V$  e  $W_2 \subseteq \Phi(V)$ , contendo  $p$  e  $\Phi(p)$ , respectivamente, tal que  $\Phi : W_1 \rightarrow W_2$  é inversível e  $\Phi^{-1} : W_2 \rightarrow W_1$  é diferenciável (ver figura 4).

As funções coordenadas de  $\Phi^{-1}$  são diferenciáveis e dadas por  $X(u, v, t)$ ,  $y(u, v, t)$  e  $z(u, v, t)$ . Como

$$(u, v, t) = \Phi \circ \Phi^{-1}(u, v, t) = \Phi(x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t)) = (x, y, f(x, y, z)),$$

vemos que  $x(y, v, t) = u$  e  $y(u, v, t) = v$ . Em particular, como  $z(u, v, t)$  é diferenciável, a função  $w$  definida na intersecção de  $W_1$  com o plano  $xy$ , dada por

$$w(x, y) = z(u, v, a)$$

também é diferenciável.

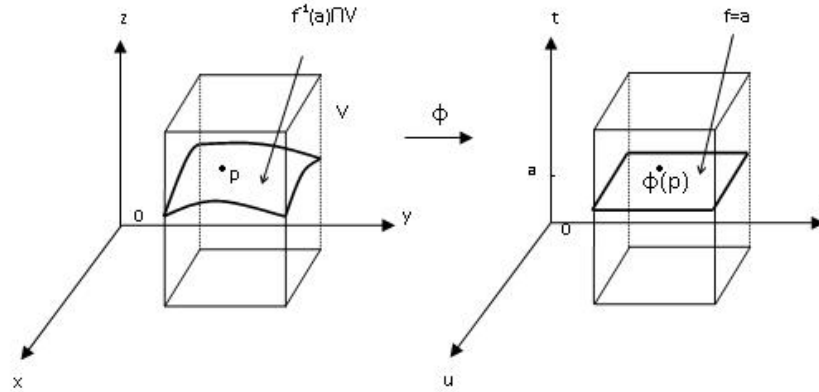


Figura 4: Os pontos da superfície  $f^{-1}(a)$  são levados por  $F$  no plano  $z = a$ .

Pela proposição 1.1, o gráfico de  $w$  é uma superfície regular. Ora, observando-se que o gráfico de  $w$  nada mais é do que o conjunto  $f^{-1}(a) \cap W_1$ , segue-se que  $f^{-1}(a) \cap W_1$  é uma vizinhança coordenada de  $p$ . Como  $p$  foi tomado arbitrariamente, conclui-se que  $f^{-1}(a)$  é uma superfície regular, como desejado.

□

**Exemplo 1.2.** Seja o elipsóide dado por  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . Vamos definir uma função diferenciável  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ . Podemos notar que 0 é um valor regular de  $f$ , já que as derivadas parciais  $f_x = \frac{2x}{a^2}$ ,  $f_y = \frac{2y}{b^2}$  e  $f_z = \frac{2z}{c^2}$  se anulam simultaneamente somente no ponto  $(0, 0, 0)$ , que não pertence a  $f^{-1}(0)$ .

Então, o elipsóide dado por  $S = f^{-1}(0)$  é uma superfície regular.

**Exemplo 1.3.** Seja o hiperbolóide de duas folhas dado por  $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ . Vamos definir uma função diferenciável  $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1$ . Podemos notar que 0 é um valor regular de  $f$ , já que as derivadas parciais  $f_x = -2x$ ,  $f_y = -2y$  e  $f_z = 2z$  se anulam simultaneamente somente no ponto  $(0, 0, 0)$ , que não pertence a  $f^{-1}(0)$ .

Então, o hiperbolóide de duas folhas dado por  $S = f^{-1}(0)$  é uma superfície regular.

No exemplo acima podemos notar que uma superfície regular pode ser desconexa.

Antes de demonstrarmos a seguinte proposição vamos enunciar o Teorema da Função Implícita.

**Teorema 1.2.** *Seja  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  e  $F(x, y, z)$  uma função real com derivadas parciais contínuas em  $V$ . Seja  $(x_0, y_0, z_0) \in V$  tal que  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  e  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Então existem vizinhanças  $B$  de  $(x_0, y_0)$  e  $J$  de  $z_0$ , tais que  $B \times J \subset V$  e uma única função  $g : B \rightarrow J$  satisfazendo  $F(x, y, g(x, y)) = 0$ ,  $\forall (x, y) \in B$ . Além disso,  $g$  possui derivadas parciais dadas por:*

$$g_x = \frac{-F_x}{F_z}; \quad g_y = \frac{-F_y}{F_z}.$$

A proposição seguinte apresenta ferramentas para mostrarmos que um conjunto de  $\mathbb{R}^3$  não é uma superfície regular. Também podemos ver essa proposição como se fosse a recíproca local da proposição 1.1.

**Proposição 1.3.** *Dada uma superfície regular  $S \in \mathbb{R}^3$ , qualquer ponto  $p \in S$  possui uma vizinhança  $V$  em  $S$ , tal que  $V$  é o gráfico de uma função diferenciável que tem uma das seguintes formas:*

$$z = f(x, y), \quad y = f(x, z), \quad x = f(y, z).$$

*Demonstração.* Se  $S$  é uma superfície regular, então dado  $p \in S$ ,  $\exists U \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  tal que  $p \in X(U)$  e  $q = X^{-1}(p)$ , como na definição 1.1.

Pela condição (iii) da definição 1.1, um dos determinantes jacobianos  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ ,  $\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$ ,  $\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$  não se anula em  $X^{-1}(p) = q$ . Suponhamos sem perda de generalidade que  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ , e consideremos a seguinte aplicação:  $\pi \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $\pi$  é a projeção  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ .

Então  $\pi \circ X(u, v) = \pi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (x(u, v), y(u, v))$ , mas  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ , logo pelo teorema da função inversa existem abertos  $W_1 \subseteq U$  e  $W_2 \subseteq \pi \circ X(U)$ , vizinhança de  $q$  e de  $\pi \circ X(q)$  respectivamente, tal que

$$(\pi \circ X)^{-1} : W_2 \rightarrow W_1$$

$$(x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$$

é diferenciável (ver figura 5).

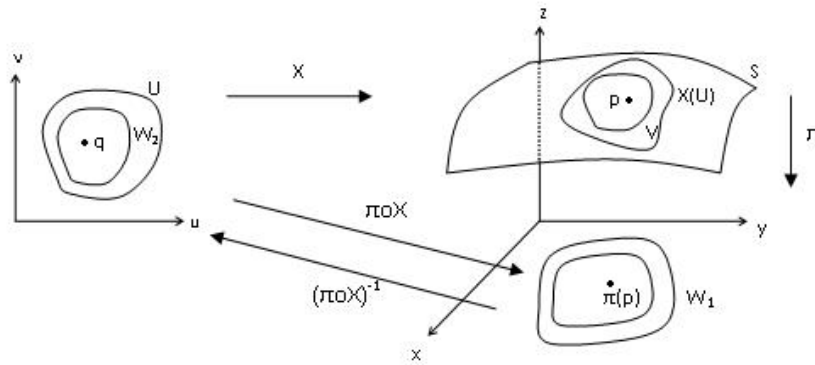


Figura 5: A aplicação  $\pi$  leva pontos de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}^2$ .

Considere agora

$$\begin{aligned} X \circ (\pi \circ X)^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= X(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})) \\ &= (x(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})), y(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})), z(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y}))). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} (\pi \circ X) \circ (\pi \circ X)^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= (\bar{x}, \bar{y}) \\ &= (x(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})), y(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y}))), \end{aligned}$$

portanto  $\bar{x} = x(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y}))$  e  $\bar{y} = y(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y}))$ .

Logo,

$$\begin{aligned} X \circ (\pi \circ X)^{-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= X(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y})) \\ &= (\bar{x}, \bar{y}, z(u(\bar{x}, \bar{y}), v(\bar{x}, \bar{y}))), \end{aligned}$$

Seja  $V = X(W_1)$ , então temos

$$\begin{aligned} X \circ (\pi \circ X)^{-1} : W_2 &\rightarrow V \\ (x, y) &\rightarrow (x, y, z(x, y)). \end{aligned}$$

Logo  $V$  é localmente um gráfico.

Mostramos para um dos casos, os outros são de forma análoga, porém ao invés de considerarmos  $\pi : (x, y, z) = (x, y)$ , utilizamos  $\pi_1 : (x, y, z) \rightarrow (x, z)$  e  $\pi_2 : (x, y, z) \rightarrow (y, z)$ .  $\square$

**Exemplo 1.4.** Seja o cone de uma folha  $\mathbb{C}$  dado por  $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$ , com  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .



Vamos supor que  $\mathbb{C}$  seja uma superfície regular, logo pela proposição 1.3 ele deve ser em uma vizinhança  $V$  do ponto  $(0,0,0) \in \mathbb{C}$  o gráfico de uma função diferenciável com uma das seguintes formas:  $x = f(y, z)$ ,  $y = g(x, z)$ ,  $z = h(x, y)$ . Mas as duas primeiras formas podem ser descartadas, já que as projeções do cone sobre os planos  $xz$  e  $yz$  não são injetivas. Basta então analisar a última forma,  $z = h(x, y) = +\sqrt{x^2 + y^2}$  que não é diferenciável em  $(0,0)$ .

Então  $C$  não é uma superfície regular.

**Proposição 1.4.** *Seja  $p \in S$  um ponto de uma superfície regular  $S$  e seja uma aplicação  $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  com  $p \in X(U)$  tal que as condições (i) e (iii) da definição 1.1 sejam satisfeitas. Suponha que  $X$  seja bijetiva. Então  $X^{-1}$  é contínua.*

*Demonstração.* Seja  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , com  $(u, v) \in U$  e  $q \in U$  arbitrário. Podemos afirmar que  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0$ , já que  $X$  satisfaz as condições (i) e (iii) da definição 1.1.

Vamos considerar a projeção

$$\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\pi(x, y, z) \rightarrow (x, y)$$

Pelo teorema da função inversa, existem  $W_1$  vizinhança de  $q \in U$  e  $W_2$  vizinhança  $\pi \circ X(q) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\pi \circ X$  aplica  $W_1$  difeomorficamente sobre  $W_2$ .

Usando agora a suposição que  $X$  é bijetiva. Então, restrita a  $X(W_1)$ ,

$$X^{-1} = (\pi \circ X)^{-1} \circ \pi.$$

$X^{-1}$  é a composição de aplicações contínuas, logo é contínua em  $q$ . Como  $q$  é arbitrário,  $X^{-1}$  é contínua.  $\square$

**Exemplo 1.5.** *Seja uma circunferência  $\mathbb{C}$  no plano  $xz$  centrada no ponto  $(a, 0, 0)$ , com raio  $r$ , onde  $0 < r < a$  dada por  $\mathbb{C} = \{(x, y, z) : (x - a)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}$ . Se rotacionarmos essa circunferência em torno do eixo  $z$  obtemos um toro, dado por:*

$$X(\theta, \varphi) = ((a + r \cos \theta) \cos \varphi, (a + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta),$$

onde  $U = \{(\theta, \varphi) : 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ .

Sabendo que o toro é uma superfície regular vamos mostrar que a aplicação  $X$  é uma parametrização do toro.

A condição (i) da definição 1.1 é verificada, visto que as funções componentes de  $X$  são diferenciáveis.

Temos que

$$\begin{aligned} X_\theta &= (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \\ X_\varphi &= ((a + r \cos \theta)(-\sin \varphi), (a + r \cos \theta) \cos \varphi, 0), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \|X_\theta \times X_\varphi\| &= \\ &= \sqrt{r^2(a + r \cos \theta)^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2(a + r \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2(a + r \cos \theta)^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{r^2(a + r \cos \theta)^2 (\cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ &= r(a + r \cos \theta). \end{aligned}$$

Como  $0 < r < a$  temos que  $X_\theta$  e  $X_\varphi$  são vetores linearmente independentes, verificando a condição (iii).

Basta agora verificarmos a condição (ii), no entanto pela proposição 1.4 isso é equivalente a mostrar que  $X$  é bijetiva.

Podemos observar que, se  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq a$ , então  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ , e se  $\sqrt{x^2 + y^2} \geq a$ , então  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ . Logo, dado  $(x, y, z)$ , isto determina  $\theta$  de maneira única,  $0 < \theta < 2\pi$ .

Conhecendo  $\theta$ ,  $x$  e  $y$  determinamos  $\sin \varphi$  e  $\cos \varphi$ . Isto determina  $\varphi$  de maneira única,  $0 < \varphi < 2\pi$ . Logo  $X$  é bijetiva.

Portanto  $X$  é uma parametrização do toro.

## 1.2 Mudança de Parâmetros

Pela definição de superfície regular, todo ponto  $p \in S$  está coberto por uma parametrização  $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  que é um homeomorfismo, mas nem sempre existe uma única parametrização que cubra determinado ponto  $p \in S$ .

Nosso objetivo é descobrir como estas parametrizações estão relacionadas, ou seja, dado um ponto  $p$  pertencente a duas vizinhanças coordenadas com parâmetros  $(u, v)$  e  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ , vamos mostrar como transformar de  $(u, v)$  para  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  e vice-versa.

É interessante ver como fazer troca de um sistema de coordenadas para outro, pois nos próximos capítulos vamos apresentar conceitos que não dependem do sistema de coordenadas escolhido.

**Proposição 1.5.** *Seja  $S$  uma superfície regular e duas parametrizações  $X_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $X_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de  $S$ , com  $p \in S$  tal que  $p \in X_1(U_1) \cap X_2(U_2) = V$ . Então a mudança de coordenadas  $h = X_1^{-1} \circ X_2$  é um difeomorfismo, isto é,  $h$  é diferenciável e tem uma inversa diferenciável  $h^{-1}$ .*

*Demonstração.* A aplicação  $h = X_1^{-1} \circ X_2$  é a composição de homeomorfismos, logo  $h$  é um homeomorfismo.

Sejam as duas parametrizações  $X_1$  e  $X_2$  dadas por:

$$X_1(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$X_2(\bar{u}, \bar{v}) = (x(\bar{u}, \bar{v}), y(\bar{u}, \bar{v}), z(\bar{u}, \bar{v}))$$

Vamos provar que  $h$  é diferenciável.

Seja  $r \in X_2^{-1}(V)$  e defina  $q = h(r)$ . Como  $X_1(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  é uma parametrização, podemos supor, renomeando os eixos caso necessário, que  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0$ .

Estendemos  $X_1$  a uma aplicação  $F : U_1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t),$$

com  $(u, v) \in U_1$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Ou seja,  $F$  leva um cilindro vertical  $\mathbb{C}$  sobre  $U_1$  em uma espécie de cilindro vertical sobre  $X_1(U_1)$ .

A restrição  $F|_{U_1 \times \{0\}} = F(u, v, 0) = X_1(u, v)$ .

A matriz Jacobiana é dada por:  $JF(u, v, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{bmatrix}$ , e seu determinante é

$$\det(JF) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Em particular, se  $q' = (q, 0) \in U_1 \times \mathbb{R}$ , então  $\det(JF_{q'}) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0$ .

Pelo teorema da função inversa existem abertos  $W_1$  e  $W_2$ , com  $W_1$  vizinhança de  $q' = (q, 0) \in U_1 \times \mathbb{R}$  e  $W_2$  vizinhança de  $F(q') = X_1(q)$  tal que  $F^{-1} : W_2 \rightarrow W_1$  existe e é

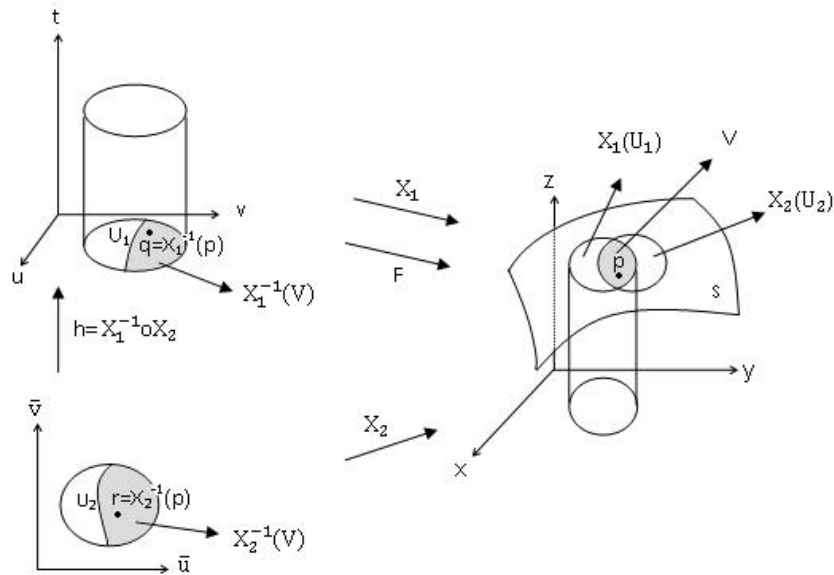


Figura 6: A aplicação  $h = X_1^{-1} \circ X_2$ .

diferenciável em  $W_2$ .

Provemos que  $h$  é diferenciável em  $r$ : observe que  $W_2$  é vizinhança de  $X_2(r)$ , pois

$$X_1(q) = X_1(h(r)) = X_1 \circ X_1^{-1} \circ X_2(r) = X_2(r).$$

Temos que  $X_2$  é contínua em  $U_2$  e  $r \in U_2$ , logo existe uma vizinhança  $\overline{W_2}$  de  $r$  em  $U_2$  tal que  $X_2(\overline{W_2}) \subseteq W_2$ .

Pelo teorema da função inversa, existem abertos  $W_1$  e  $W_2$ , com  $W_1$  vizinhança de  $q \in U_1$  e  $W_2$  vizinhança de  $r \in U_2$ , tal que  $F^{-1} : W_2 \rightarrow W_1$  existe e é diferenciável em  $W_1$ . Então  $h = F^{-1} \circ X_2$  é diferenciável em  $r \in U_2$ , já que  $X_2$  é uma parametrização de  $S$ .

Como  $h|_{W_2} = F^{-1} \circ X_2|_{\overline{W_2}}$ ,  $h$  restrito a  $\overline{W_2}$  é uma composição de aplicações diferenciáveis e portanto diferenciável. Em particular,  $h$  é diferenciável em  $r$ .  $\square$

**Exemplo 1.6.** *Seja uma esfera  $\mathbb{S}^2$  unitária, parametrizada de duas formas:*

*Pelas coordenadas esféricas  $(\theta, \varphi)$ , onde  $\theta$  é o complemento da latitude e  $\varphi$  a longitude, sendo*

$$X_1(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

*e  $U = \{(\varphi, \theta) : 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ .*

*Pela projeção estereográfica  $\pi : \mathbb{S}^2 - \{P_N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que leva pontos  $p = (x, y, z)$  da esfera menos o pólo norte  $P_N = (0, 0, 1)$  sobre o plano  $xy$ . Seja  $\pi(x, y, z) = (u, v)$ , então*

obtemos uma parametrização  $X_2$  fazendo  $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 - \{P_N\}$ , dada por

$$X_2(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right),$$

com  $(u, v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

Vamos considerar a parte da esfera  $\mathbb{S}^2$  onde  $y > 0$ .

Então, usando essas duas parametrizações, temos

$$\begin{aligned} X_1^{-1}(x, y, z) &= \left( \arccos(z), \operatorname{arccotg} \left( \frac{x}{y} \right) \right) \\ X_2^{-1}(x, y, z) &= \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} h &= X_1^{-1} \circ X_2 = X^{-1}(X_2(u, v)) = \left( \arccos \left( \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right), \operatorname{arccotg} \left( \frac{u}{v} \right) \right) \\ h^{-1} &= X_2^{-1} \circ X_1 = X_2^{-1}(X_1(\theta, \varphi)) = \left( \frac{\sin \theta \cos \varphi}{1 - \cos \theta}, \frac{\sin \theta \sin \varphi}{1 - \cos \theta} \right). \end{aligned}$$

que são diferenciáveis.

## 1.3 Funções Diferenciáveis em Superfícies

Nesta seção vamos tratar de dois tipos de aplicações sobre  $S$ , uma função  $f$  e uma aplicação  $\varphi$ , dadas por  $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\varphi : V \subset S_1 \rightarrow S_2$ , com  $S, S_1, S_2$  superfícies regulares.

Primeiramente vamos definir sob que condições essas aplicações são diferenciáveis em um ponto  $p$  da superfície e em seguida vamos mostrar que a diferenciabilidade de  $f$  e de  $\varphi$  não dependem da escolha da parametrização.

### 1.3.1 Funções reais diferenciáveis em superfícies

**Definição 1.4.** Uma função  $f : V \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $S$  uma superfície regular, é diferenciável em  $p \in S$  se dada uma parametrização  $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  com  $p \in X(U) \subseteq V$ , temos que  $f \circ X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $X^{-1}(p) = q$ .

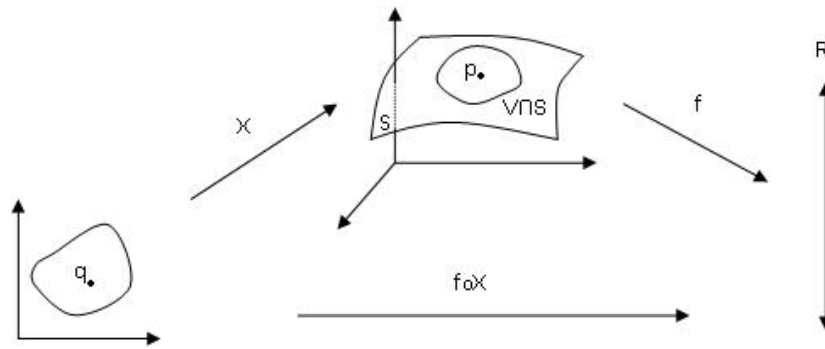


Figura 7: A aplicação  $f$  é diferenciável em  $p$  se  $f \circ X$  é diferenciável em  $X_1^{-1}(p)$ .

Veamos um exemplo de uma função  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável.

**Exemplo 1.7.** Seja  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto fixo de uma superfície regular  $S$ , a distância euclidiana em  $\mathbb{R}^3$  desse ponto a qualquer ponto  $p \in S$  é dado por

$$\begin{aligned} d : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\rightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \end{aligned}$$

No entanto,  $d$  não é diferenciável em  $(x_0, y_0, z_0)$ , então vamos considerar a função  $d^2$  distância ao quadrado, dada por

$$\begin{aligned} d^2 : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2. \end{aligned}$$

Seja um cilindro parametrizado por

$$\begin{aligned} X : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ X(u, v) &= (\cos u, \sin u, v), \end{aligned}$$

com  $U : \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$ .

Seja um ponto fixo  $p_0 = (0, 1, 0)$  do cilindro, fazendo a composição

$$\begin{aligned} d^2 \circ X &= (\cos u)^2 + (\sin u - 1)^2 + v^2 \\ &= \cos^2 u + \sin^2 u - 2 \sin u + 1 + v^2 \\ &= 2 - 2 \sin u + v^2, \end{aligned}$$

nota-se que  $d^2 \circ X$  é diferenciável para qualquer  $(u, v) \in U$  e em particular, em  $X^{-1}(p)$  para  $p$  um ponto qualquer do cilindro.

**Proposição 1.6.** *A definição de função diferenciável independe da escolha da parametrização.*

*Demonstração.* Sejam

$$X_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

$$X_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$$

duas parametrizações de  $S$ .

Seja  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $p \in X_1(U_1) \cap X_2(U_2) = W$ , em relação a  $X_1$ . Então  $f \circ X_1$  é diferenciável em  $X_1^{-1}(p) \in X^{-1}(W) \cap U_1$ .

Mas pela proposição 1.5,  $h = X_1^{-1} \circ X_2 : X_2^{-1}(W) \rightarrow X_1^{-1}(W)$  também é diferenciável, logo a composta  $f \circ X_1 \circ h = f \circ X_1 \circ X_1^{-1} \circ X_2 = f \circ X_2$  é diferenciável em  $X_2^{-1}(p) \in X_2^{-1}(W) \subseteq U_2$ .  $\square$

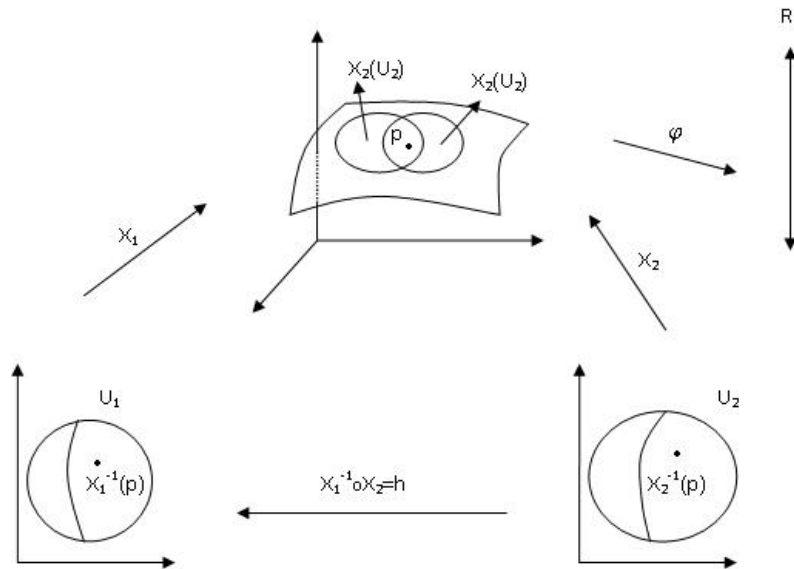


Figura 8: A aplicação diferenciável  $f$  independe da parametrização de  $S$ .

### 1.3.2 Funções diferenciáveis entre superfícies

**Definição 1.5.** Seja  $\varphi : V_1 \subseteq S_1 \rightarrow S_2$ , com  $S_1$  e  $S_2$  superfícies regulares e  $V_1$  conjunto aberto de  $S_1$ . Dizemos que  $\varphi$  é diferenciável em  $p \in V_1$  se dada duas parametrizações

$$X_1 : U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$$

$$X_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$$

com  $p \in X_1(U_1)$ , e  $\varphi(p) \in X_2(U_2)$ , temos que  $\tilde{\varphi} : X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$  é diferenciável em  $X_1^{-1}(p)$ .

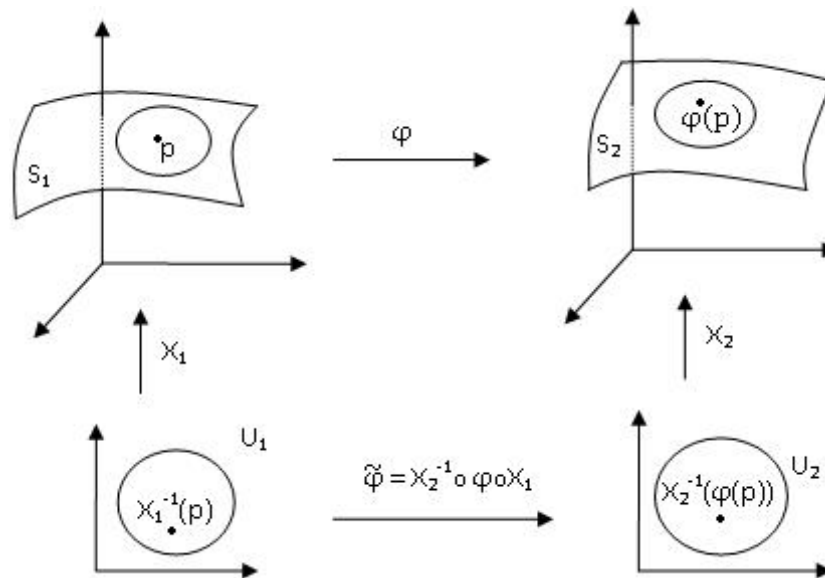


Figura 9: A aplicação  $\varphi$  é diferenciável em  $p$  se  $\tilde{\varphi}$  é diferenciável em  $X_1^{-1}(p)$ .



**Exemplo 1.8.** *Seja a esfera unitária  $\mathbb{R}^2$  dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , com parametrização  $X_1$ , onde  $x = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = \cos \theta$  e  $U_1 = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ .*

*Vamos definir a seguinte função*

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \alpha(x, y, z) &= (ax, by, cz),\end{aligned}$$

*ou seja, os pontos da esfera são levados em pontos sobre o elipsóide dado por  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , com parametrização  $X_2$ , onde  $x = a \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = c \cos \theta$  e  $U_2 = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ .*

*Então fazendo a composição  $\tilde{\alpha}(\theta, \varphi) = X_2^{-1} \circ \alpha \circ X_1(\theta, \varphi) = X_2^{-1} \circ X_2(\theta, \varphi) = (\theta, \varphi)$ , logo  $\tilde{\alpha}$  é diferenciável.*

**Proposição 1.7.** *A definição de diferenciabilidade entre superfícies regulares independe da escolha da parametrização.*

*Demonstração.* Sejam  $S_1, S_2$  superfícies regulares e  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação diferenciável em um ponto  $p$  de  $S_1$  de acordo com as parametrizações  $X_1$  de  $S_1$  e  $Y_1$  de  $S_2$ .

Suponha que  $X_2, Y_2$  sejam outras parametrizações de  $S_1, S_2$  respectivamente. Vamos mostrar que, de acordo com estas parametrizações,  $\varphi$  também é diferenciável em  $p$ .

De fato, observe que  $Y_2^{-1} \circ \varphi \circ X_2 = Y_2^{-1} \circ Y_1 \circ Y_1^{-1} \circ \varphi \circ X_1 \circ X_1^{-1} \circ X_2 = h_2 \circ Y_1^{-1} \circ \varphi \circ X_1 \circ h_1^{-1}$ .

Como  $h_1^{-1}$ ,  $h_2$  e  $Y_1^{-1} \circ \varphi \circ X_1$  são diferenciáveis, sua composição também o é. Logo,  $Y_2^{-1} \circ \varphi \circ X_2$  é diferenciável em  $X_2^{-1}(p)$ , donde  $\varphi$  é diferenciável em  $p$  com relação às parametrizações  $X_2$  e  $Y_2$ .

□

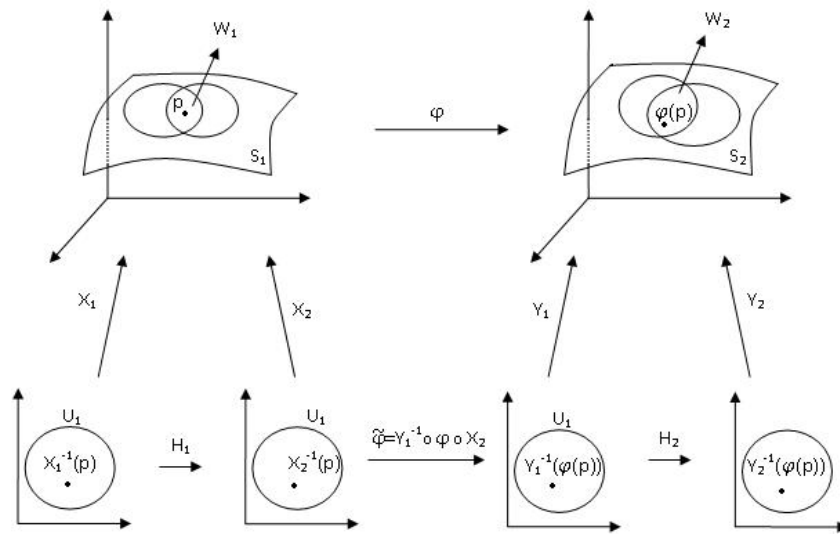


Figura 10: A aplicação diferenciável  $\varphi$  independe da parametrização.

## 1.4 Plano Tangente e diferencial de uma aplicação

Como havíamos mencionado anteriormente a condição (iii) da definição de superfície regular nos garante a existência de um plano tangente em  $p \in S$ . Nessa seção mostraremos que para cada ponto  $p \in S$ , o conjunto de vetores tangentes as curvas parametrizadas de  $S$  passando por  $p$ , constituem um plano, que denotaremos por  $T_p S$ .

Vamos analisar o que acontece com as curvas sobre superfícies. Sejam,

Entendemos por vetor tangente a  $S$  em um ponto  $p \in S$ , o vetor tangente  $\gamma'(0)$  de uma curva parametrizada  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ , com  $\gamma(0) = p$ .

- $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , uma parametrização de  $S$
- $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ , curva em  $U$
- $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ , curva em  $S$  passando por  $p$ , onde  $\gamma = X \circ \alpha$

Se  $X$  é uma parametrização de  $S$  e  $\alpha$  é curva em  $U$  tal que  $\gamma = X \circ \alpha$ , então esse vetor  $\gamma'(0)$  é dado por:

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= X \circ \alpha(0) \\ \gamma'(0) &= dX(\alpha(0))\alpha'(0) = \frac{d}{dt}(X \circ \alpha)(0). \end{aligned}$$

Portanto, a derivada  $dX_q$  mapeia os vetores velocidade de curvas passando por  $\alpha(0) =$

$q$  em vetores velocidade das suas respectivas imagens em  $p = X(q)$ , vejamos a figura a seguir:

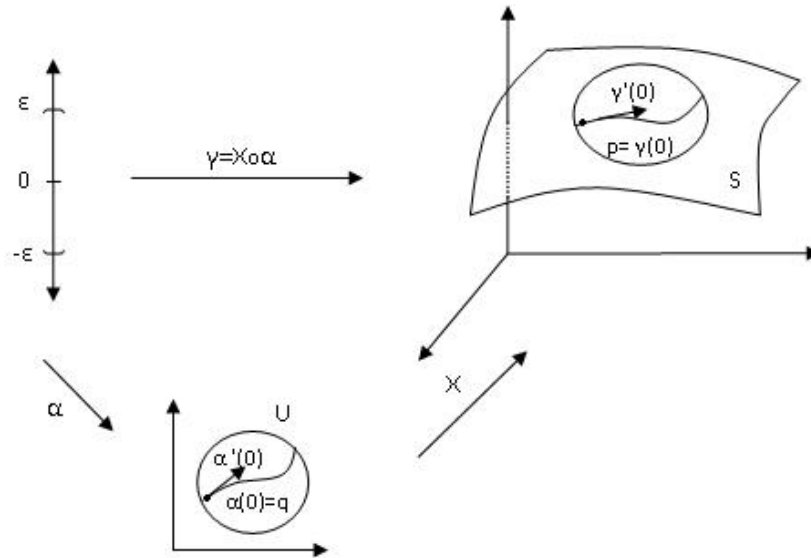


Figura 11: O vetor  $\gamma'(0)$  é tangente à curva  $\gamma$  no ponto  $p = \gamma(0)$ .

**Definição 1.6.** O plano tangente a uma superfície regular  $S$  em  $p$  é o conjunto de vetores velocidade das curvas em  $S$  passando por  $p$ , com  $p \in S$ , denotado por  $T_p S$ .

**Proposição 1.8.** Seja uma parametrização  $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de uma superfície regular  $S$  em  $p$ , tal que  $X(q) = p$ . Então o conjunto de vetores tangentes à  $S$  em  $p$  é o subespaço vetorial  $T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$  de dimensão 2.

*Demonstração.* Primeiramente vamos mostrar que  $T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$ .

Seja  $w \in T_p S$ , logo existe uma curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ , com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = w$ . Por definição também temos uma curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ , com  $\alpha(0) = q$  e  $\alpha'(0) = v$ , tal que  $\gamma = X \circ \alpha$ .

Temos

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= X \circ \alpha(0) \\ \gamma'(0) &= \frac{d}{dt}(X \circ \alpha)(0) = dX_{\alpha(0)}\alpha'(0) \\ &= dX_q(v) \in dX_q(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Portanto,  $T_p S \subseteq dX_q(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$ .

Por outro lado seja  $w = dX_q(v)$ ,  $\alpha(t) = vt + q$  em  $U$ , com  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $\alpha(0) = q$  e

$\alpha'(0) = v$ . Considere  $\gamma = X \circ \alpha(t)$ , então

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= X \circ \alpha(0) = X(\alpha(0)) = X(q) = p \\ \gamma'(0) &= dX(\alpha(0))(\alpha'(0)) = dXq(v) = w \in T_pS.\end{aligned}$$

Portanto,  $dXq(\mathbb{R}^2) \subseteq T_pS$ . Logo  $T_pS = dXq(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$ .

Precisamos mostrar agora que  $T_pS$  é um espaço vetorial.

Sejam  $W_1$  e  $W_2$  vetores de  $T_pS$ , então

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S; & \gamma_1(0) &= p, & \gamma_1'(0) &= w_1 \\ \gamma_2 &: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S; & \gamma_2(0) &= p, & \gamma_2'(0) &= w_2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha_1 &: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U; & dXq(\alpha_1'(0)) &= w_1 \\ \alpha_2 &: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S; & dXq(\alpha_2'(0)) &= w_2\end{aligned}$$

Como  $X$  é um homeomorfismo temos que  $X(q) = p$ .

Seja uma curva  $\Phi(t) = q + t(\alpha_1'(0) + \alpha_2'(0))$  em  $U$ , com  $t \in (-\eta, \eta)$  e  $\eta > 0$ .

Consideramos a curva em  $S$

$$\begin{aligned}\beta &: (-\eta, \eta) \rightarrow S \\ \beta(t) &= X \circ \Phi(t)\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\beta(0) &= X \circ \Phi(0) = X(\Phi(0)) = X(q) = p \\ \beta'(0) &= dX(\Phi(0))(\Phi'(0)) \\ &= dXq(\Phi'(0)) \\ &= dXq(\alpha_1'(0) + \alpha_2'(0)) \\ &= dXq(\alpha_1'(0)) + dXq(\alpha_2'(0)) \\ &= w_1 + w_2 \in T_pS\end{aligned}$$

Seja a curva  $\Phi(t) = q + t\lambda\alpha'(0)$  em  $U$ , com  $t \in (-\eta, \eta)$ , e consideramos a curva

$$\beta : (-\eta, \eta) \rightarrow S$$

$$\beta(t) = X \circ \Phi(t)$$

Então,

$$\begin{aligned}\beta(0) &= X \circ \Phi(0) = X(\Phi(0)) = X(q) = p \\ \beta'(0) &= dX(\Phi(0))(\Phi'(0)) \\ &= dXq(\lambda\alpha'(0)) = \lambda W_1 \in T_p S\end{aligned}$$

Logo  $T_p S$  é um espaço vetorial.

Como  $S$  é uma superfície regular, a condição (iii) da definição 1.1 nos diz que  $dXq$  é injetiva, logo  $\ker(dXq) = 0$ . Logo,  $T_p S$  tem dimensão 2.  $\square$

Uma equação paramétrica de um plano tangente a  $S$  em um ponto  $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$  é dada por  $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + rX_u(p_0) + sX_v(p_0)$ , com  $r, s \in \mathbb{R}$ . O plano fica bem definido pela junção de um de seus pontos a dois vetores linearmente independentes. E a escolha de uma parametrização  $X$  determina uma base  $\{X_u(p), X_v(p)\}$  para o plano tangente, chamada de base coordenada a  $X$ . No entanto,  $T_p S$  não depende da escolha de  $X$ .

**Exemplo 1.9.** Sabemos pela proposição 1.1, que se  $a$  é um valor regular de uma função  $\varphi : V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável então  $f^{-1}(a)$  é o gráfico de uma superfície regular. Então vamos escrever a equação do plano tangente a  $f^{-1}(a)$  em um ponto  $p$  da superfície. Para isso precisaremos utilizar o gradiente de  $f$  em  $p$ , denotado por  $\nabla f(p)$ .

Temos que  $\nabla f(p)$  é ortogonal a  $T_p f^{-1}(a)$  em  $p \in f^{-1}(a)$ .

Vamos mostrar que  $T_p f^{-1}(a) = \ker f'(p)$ .

Seja  $w \in T_p f^{-1}(a)$ , logo

$$\begin{aligned}\gamma : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow f^{-1}(a); & \gamma(0) &= p; & \gamma'(0) &= w \\ t &\rightarrow \gamma(t) \\ f \circ \gamma : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

Mas,  $(f \circ \gamma)(t) = a$  então

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(\gamma(0)) \cdot (\gamma'(0)) = f'(p)(w) = 0.$$

Portanto,  $w \in \ker f'(p)$  e  $T_p f^{-1}(a) \subseteq \ker f'(p)$ .

Seja agora  $w \in \ker f'(p)$ , logo  $f'(p)(w) = 0$ .

Vamos supor sem perda de generalidade que  $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$ , então existe uma função

$$\begin{aligned}\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}. \\ (x, y) &\rightarrow \Phi(x, y),\end{aligned}$$

tal que, localmente a superfície seja o gráfico de  $\Phi$ . Defina a parametrização local

$$\begin{aligned}X : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightarrow (x, y, \Phi(x, y))\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x, y)\end{aligned}$$

Seja  $p = (x_0, y_0, z_0)$  e  $w = (w_1, w_2, w_3)$ , logo  $\pi(w) = (w_1, w_2)$ .

Sejam as curvas

$$\begin{aligned}\alpha : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow U \\ t &\rightarrow (x_0, y_0) + t(w_1, w_2) = (x_0 + tw_1, y_0 + tw_2)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\beta = X \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow f^{-1}(a) \\ t &\rightarrow (x_0 + tw_1, y_0 + tw_2, \Phi(x_0 + tw_1, y_0 + tw_2))\end{aligned}$$

tal que  $f \circ \beta(t) = a$ ,  $\forall t$  e

$$\begin{aligned}\beta(0) &= (x_0, y_0, \Phi(x_0, y_0)) = p \\ \beta'(0) &= (w_1, w_2, \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0)w_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)w_2).\end{aligned}$$

Podemos observar que  $\beta'(0) \in T_p f^{-1}(a)$ , então precisamos mostrar que  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0)w_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)w_2 = w_3$ . No entanto,  $w \in \ker f'(p)$ , logo  $w$  e  $\nabla f(p)$  são ortogonais, então

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(p), w \rangle = 0 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(p)w_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p)w_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(p)w_3 = 0 \\ &\Rightarrow w_3 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}w_1 - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}w_2.\end{aligned}$$

Pelo teorema da função implícita  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$  e  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$ , portanto  $w_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} w_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} w_2$ .

Logo  $\ker f'(p) \subseteq T_p f^{-1}(a)$ .

Portanto,  $T_p f^{-1}(a) = \ker f'(p)$ . Em outras palavras,  $T_p f^{-1}(a)$  é formada precisamente pelos vetores de  $\mathbb{R}^3$  que são ortogonais a  $\nabla f(p)$ .

Então,  $\forall w \in T_p f^{-1}(a)$  temos que  $w \perp \nabla f(p)$ , tomando  $p = (x_0, y_0, z_0)$  e  $w = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$  temos a equação de  $T_p f^{-1}(a)$  em  $p$  dada por

$$\langle \nabla f(p), w \rangle = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p)(z - z_0) = 0.$$

Quando provamos a igualdade  $T_p f^{-1}(a) = \ker f'(p)$  podemos garantir a recíproca, que se  $\langle \nabla f(p), w \rangle = 0$ , ou seja, se  $w$  satisfaz a sua equação  $\frac{\partial f}{\partial x}(p)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(p)(z - z_0) = 0$ , então necessariamente  $w \in T_p S$ . Esta equação poderia a priori ser satisfeita por vetores de fora do plano tangente, mas mostrando que  $T_p f^{-1}(a) = \ker f'(p)$  garantimos que não.

Como já definimos plano tangente, podemos falar da diferencial das aplicações definidas na seção 1.3.

**Definição 1.7.** *Seja uma superfície regular  $S$  e uma função  $f : V \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $V$ , a cada  $p \in V$  associamos uma aplicação linear  $df_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  que é chamada a diferencial de  $f$  em  $p$ , que definimos:*

*Seja  $w_p \in T_p S$  e  $\gamma : t \in (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  uma curva diferenciável tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = w_p$ , então a curva  $\beta = f \circ \gamma$  é diferenciável e  $df_p(w_p) = \beta'(0) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0)$ , com  $\beta(0) = f(p)$ .*

**Definição 1.8.** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies regulares e uma aplicação  $\varphi : V_1 \subseteq S_1 \rightarrow S_2$  contínua e diferenciável em  $V_1$ , a cada  $p \in V_1$  definimos a aplicação linear*

$$d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$$

*atuando em um vetor  $w_p \in T_p S_1$  da seguinte forma:*

*Seja  $\gamma : t \in (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$  diferenciável, com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = w_p$ , então*

$$d\varphi_p(w_p) = \beta'(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(0),$$

*com  $\beta = \varphi \circ \gamma$ ,  $\beta(0) = \varphi(p)$ .*

As definições 1.7 e 1.8 são análogas, assim a proposição a seguir será demonstrada para um dos casos, o outro pode ser feito usando o mesmo raciocínio.

**Proposição 1.9.** *A diferencial  $d\varphi_p : T_p S_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} S_2$  é linear e não depende da escolha da curva que passa por  $p$  com vetor tangente  $w_p$ .*

*Demonstração.* Seja uma curva  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1$ , com  $\gamma(0) = p$  e  $\beta = \varphi \circ \gamma$ , seja também  $X_1$  parametrização de  $S_1$  em uma vizinhança de  $p$  e  $X_2$  uma parametrização de  $S_2$  em uma vizinhança de  $\varphi(p)$ .

Primeiramente vamos mostrar que não depende da escolha da curva  $\gamma$  que passa por  $p$ . Sejam

$$\begin{aligned}\gamma_1 & : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3; & \gamma_1(0) & = p; & \gamma_1'(0) & = w \\ \gamma_2 & : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3; & \gamma_2(0) & = p; & \gamma_2'(0) & = w\end{aligned}$$

$$d\varphi_{\gamma_1(0)}(\gamma_1'(0)) = d\varphi_p(\gamma_1'(0)) = d\varphi_p(w)$$

$$d\varphi_{\gamma_2(0)}(\gamma_2'(0)) = d\varphi_p(\gamma_2'(0)) = d\varphi_p(w)$$

Portanto,  $d\varphi_p$  não depende da curva  $\gamma$  passando por  $p$ .

Podemos reescrever  $\beta = X_2 \circ X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 \circ X_1^{-1} \circ \gamma$ , mas sabemos que  $X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 = h$  é a mudança de parâmetros, logo  $\beta = X_2 \circ h \circ X_1^{-1} \circ \gamma$ .

Seja agora a curva  $\alpha = X_1^{-1} \circ \gamma(t)$ , com  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Então

$$\beta = X_2 \circ h \circ \alpha(t) \Rightarrow \beta'(0) = \frac{d}{dt}(X_2 \circ h \circ \alpha)(0) = dX_{2(r)} dh_q \alpha'(0)$$

Sejam  $w_1, w_2 \in T_p S_1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e as curvas

$$\gamma_1 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_1, \quad w_1 = \gamma_1'(0),$$

$$\gamma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S_2, \quad w_2 = \gamma_2'(0),$$

$$\alpha_1 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U,$$

$$\alpha_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U,$$



então

$$\begin{aligned}d\varphi_p(\lambda w_1 + w_2) &= d\varphi_p \circ dX_{1(q)}(\lambda\alpha'_1(0) + \alpha'_2(0)) \\ &= dX_{2(r)} \circ dh_q(\lambda\alpha'_1(0) + \alpha'_2(0)) \\ &= \lambda dX_{2(r)}(dh_q(\alpha'_1(0))) + dX_{2(r)}(dh_q(\alpha_2(0))) \\ &= \lambda d\varphi_p \circ dX_{1(q)}(\alpha'_1(0)) + d\varphi_p \circ dX_{1(q)}(\alpha'_2(0)) \\ &= \lambda d\varphi_p(w_1) + d\varphi(w_2).\end{aligned}$$

Portanto a diferencial  $d\varphi_p$  é linear.

□

## 2 *Primeira Forma Fundamental, Aplicação Normal e Segunda Forma Fundamental*

A primeira coisa que um habitante de uma superfície, com alguma curiosidade pela geometria, talvez queira saber, é como medir a distância entre dois pontos da superfície. Logo, na seção 2.1 iremos apresentar a primeira forma fundamental, permitindo o cálculo de medidas sobre a superfície sem fazer menção ao espaço ambiente onde está a superfície.

Assim como a taxa de variação do vetor tangente a uma curva mede o quão essa curva deixa de ser reta, na seção 2.1 estenderemos essa idéia para superfícies regulares, isto é, tentaremos medir o quão rapidamente uma superfície  $S$  deixa de ser plana, introduzindo então a aplicação normal de Gauss.

Na seção 2.3 apresentaremos a segunda forma fundamental, uma forma quadrática que está relacionada com a aplicação normal de Gauss.

### 2.1 Primeira Forma Fundamental

Até aqui, estudamos as superfícies regulares do ponto de vista da diferenciabilidade. Nessa seção apresentaremos a primeira forma quadrática, denominada primeira forma fundamental, que nos permite efetuar alguns cálculos geométricos, tais como o comprimento de arcos, ângulos entre curvas e áreas de regiões na superfície.

**Definição 2.1.** *Seja  $S$  uma superfície regular e  $T_pS$  o plano tangente a  $S$  no ponto  $p$ . A forma quadrática  $I_p$  definida por:*

$$\begin{aligned} I_p : T_pS &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\rightarrow I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

*é chamada de primeira forma fundamental.*

Como podemos observar, a primeira forma fundamental é basicamente o produto interno usual do  $\mathbb{R}^3$  restrito aos vetores tangentes a  $S$ .

Vamos agora expressar a primeira forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$  associada a parametrização  $X(u, v)$  em  $p$ .

Seja o vetor  $w \in T_p S$ , façamos uma curva  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = w$  e

$$\begin{aligned}\beta : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \beta(t) = (u(t), v(t))\end{aligned}$$

dada por  $\beta = X^{-1} \circ \gamma$ , tal que  $\beta(0) = q$ , com  $X(q) = p$ .

Notemos ainda que  $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$  teremos  $\gamma'(t) = X'(\beta(t))\beta'(t) = X_u(\beta(t))u'(t) + X_v(\beta(t))v'(t)$ , onde  $\beta'(t) = (u'(t), v'(t))$ .

Assim,

$$\begin{aligned}I_p(w) &= \langle w, w \rangle_p = \langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle_{\gamma(0)} \\ &= \langle X_u(\beta(0))u'(0) + X_v(\beta(0))v'(0), X_u(\beta(0))u'(0) + X_v(\beta(0))v'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u, X_u \rangle_p u'^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle u'v' + \langle X_v, X_v \rangle v'^2.\end{aligned}$$

Vamos denotar  $E = \langle X_u, X_u \rangle$ ,  $F = \langle X_u, X_v \rangle$  e  $G = \langle X_v, X_v \rangle$ , que chamaremos de coeficientes da primeira forma fundamental.

Vejam agora alguns exemplos.

**Exemplo 2.1.** *O plano  $\pi$  que passa por um dado ponto  $p$  e tem a direção dos vetores  $w_1 = (a, b, c)$  e  $w_2 = (d, e, f)$  unitários e ortogonais é parametrizado por  $X(u, v) = p + uw_1 + vw_2$ .*

*Logo,  $X_u = w_1$  e  $X_v = w_2$ . Assim*

$$\begin{aligned}E &= \langle X_u, X_u \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle = 1 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0 \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 1\end{aligned}$$

**Exemplo 2.2.** *Seja um cilindro vertical, parametrizado por  $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ , com  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$ .*

Logo,  $X_u = (-\sin u, \cos u, 0)$  e  $X_v = (0, 0, 1)$ . Assim

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1$$

**Exemplo 2.3.** A esfera  $S$  parametrizada em coordenadas esféricas é dada por

$$X(\theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta),$$

com  $0 < \theta < \pi$  e  $0 < \varphi < 2\pi$ .

Logo,  $X_\theta = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta)$  e  $X_\varphi = (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0)$ .

Assim

$$E = \langle X_\theta, X_\theta \rangle = r^2$$

$$F = \langle X_\theta, X_\varphi \rangle = 0$$

$$G = \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = r^2 \sin^2 \theta$$

Agora que conhecemos a primeira forma fundamental podemos estudar questões geométricas sobre uma superfície regular, como havíamos citado anteriormente. Vejamos então como calcular comprimentos de arcos, ângulos e áreas em  $S$ .

O comprimento de arco de uma curva  $\gamma$  definida em um intervalo é dado por:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Vamos considerar uma superfície regular  $S$  e uma parametrização  $X : U \rightarrow S$ , com  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ . E sejam as curvas

$$\alpha(t) : (a, b) \rightarrow U$$

$$\gamma(t) : (a, b) \rightarrow S$$

tal que  $\gamma(t) = X \circ \alpha(t) = X(u(t), v(t))$ , então  $\gamma'(t) = X_u u'(t) + X_v v'(t)$

Então

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} \\ &= \sqrt{I_{\gamma(t)}(\gamma'(t))} \\ &= \sqrt{\langle X_u, X_u \rangle (u'(t))^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle u'(t)v'(t) + \langle X_v, X_v \rangle (v'(t))^2} \end{aligned}$$

Usando os coeficientes da primeira forma fundamental temos:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{E(u'(t))^2 + Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2}.$$

Então,

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(u'(t))^2 + Fu'(t)v'(t) + G(v'(t))^2} dt.$$

**Exemplo 2.4.** *Seja a esfera  $S$  de raio  $r$  dada no exemplo anterior. Temos os seguintes coeficientes da primeira forma fundamental  $E = r^2, F = 0$  e  $G = r^2 \sin^2 \theta$ . Então o comprimento de arco de uma curva contida na esfera é*

$$\begin{aligned} L(\gamma(t)) &= \int_a^b \sqrt{E(\theta'(t))^2 + 2F\theta'(t)\varphi'(t) + G(\varphi'(t))^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{r^2(\theta'(t))^2 + r^2 \sin^2 \theta (\varphi'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Vamos fixar  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e variar  $\varphi = t$ , com  $t \in (0, 2\pi)$ , então  $\theta'(t) = 0$  e  $\varphi'(t) = 1$ .

Logo,

$$L(\gamma(t)) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 \frac{\pi}{2}} dt = r \int_0^{2\pi} dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

que é o comprimento do equador de  $S$ .

**Exemplo 2.5.** *Seja o cilindro vertical, parametrizado por  $X(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$  que vimos no exemplo 2.2. Temos os seguintes coeficientes da primeira forma fundamental:  $E = r^2, F = 0$  e  $G = 1$ .*

Vamos considerar a curva  $\gamma(t)$  contida no cilindro, com  $u(t) = t$ ,  $0 < t < 2\pi$  e  $v(t) = v_0$  fixo, dessa forma teremos uma circunferência contida no cilindro.

Seja  $v(t) = 0$  e  $u(t) = t$ ,  $0 < t < 2\pi$ , então o comprimento de arco é

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{Eu'(t)^2 + Gu'(t)v'(t) + Fv'(t)^2} dt,$$

mas  $u'(t) = 1$  e  $v'(t) = 0$  então

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

No caso anterior a variável  $v$  era fixa e a  $u$  variava, no entanto podemos tomar

$u(t) = u_0$  fixo e  $v(t) = t$ , com  $a < t < b$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . Assim,  $u'(t) = 0$  e  $v'(t) = 1$ , então

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{G} dt = \int_a^b dt = t|_a^b = (b - a)$$

que é o comprimento de um segmento vertical contido no cilindro.

Nos exemplos 2.1 e 2.2 podemos perceber que os coeficientes da primeira forma fundamental são os mesmos no plano e no cilindro de raio unitário. Isso não é mera coincidência, esse assunto será tratado na seção 4.1. Vamos dar agora apenas uma justificativa geométrica para isso.

Seja uma folha de papel plana, por exemplo, se enrolarmos a folha teremos um cilindro, de modo óbvio, sem deformações. Se traçarmos uma curva na folha plana, depois de enrolada, torna-se uma curva no cilindro e como não houve deformações, o comprimento de ambas as curvas coincidem.

Com efeito, a transformação geométrica do plano no cilindro que referimos acima é um difeomorfismo especial, como veremos na seção 4.1.

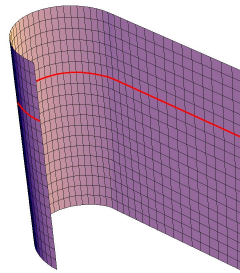


Figura 12: Curva no plano transformada numa curva no cilindro.

Vejamos agora como medir ângulos entre curvas em uma superfície.

Seja  $S$  uma superfície regular e  $X$  uma parametrização de  $S$ .

Sejam  $\gamma_1(t) = X \circ \alpha_1$  e  $\gamma_2(t) = X \circ \alpha_2$  curvas em  $S$  que se interceptam em um ponto  $t = t_0$ , no ponto  $p = X(q) = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ .

O ângulo  $\theta$  entre curvas em  $p$ , é definido como o ângulo  $\theta$  entre  $0$  e  $\pi$  formado pelos vetores  $\gamma_1'(t_0)$  e  $\gamma_2'(t_0)$ , ou seja, é o ângulo entre  $0$  e  $\pi$  tal que:

$$\cos \theta = \frac{\langle \gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0) \rangle}{\|\gamma_1'(t_0)\| \|\gamma_2'(t_0)\|}$$

Agora vamos reescrever a definição acima usando os coeficientes da primeira forma fundamental.

Temos

$$\alpha_1(t) = (u_1(t), v_1(t)) \alpha_2(t) = (u_2(t), v_2(t)),$$

$$\gamma'_1(t_0) = X_u u'_1(t_0) + X_v v'_1(t_0)$$

$$\gamma'_2(t_0) = X_u u'_2(t_0) + X_v v'_2(t_0)$$

então

$$\begin{aligned} \langle \gamma'_1(t_0), \gamma'_2(t_0) \rangle &= \langle X_u, X_u \rangle u'_1(t_0)u'_2(t_0) + \langle X_u, X_v \rangle (u'_1(t_0)v'_2(t_0) + v'_1(t_0)u'_2(t_0)) + \langle X_v, X_v \rangle v'_1(t_0)v'_2(t_0) \\ &= E u'_1(t_0)u'_2(t_0) + F(u'_1(t_0)v'_2(t_0) + v'_1(t_0)u'_2(t_0)) + G v'_1(t_0)v'_2(t_0). \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \|\gamma'_1(t_0)\| &= \sqrt{\langle \gamma'_1(t_0), \gamma'_1(t_0) \rangle} \\ &= \sqrt{\langle X_u, X_u \rangle (u'_1(t_0))^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle u'_1(t_0)v'_1(t_0) + \langle X_v, X_v \rangle (v'_1(t_0))^2} \\ &= \sqrt{E(u'_1(t_0))^2 + 2F u'_1(t_0)v'_1(t_0) + G(v'_1(t_0))^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\gamma'_2(t_0)\| &= \sqrt{\langle \gamma'_2(t_0), \gamma'_2(t_0) \rangle} \\ &= \sqrt{X_u^2 (u'_2(t_0))^2 + 2X_u X_v u'_2(t_0)v'_2(t_0) + X_v^2 (v'_2(t_0))^2} \\ &= \sqrt{E(u'_2(t_0))^2 + 2F u'_2(t_0)v'_2(t_0) + G(v'_2(t_0))^2}. \end{aligned}$$

Obtemos assim o ângulo  $\theta$ , por comodidade vamos omitir o ponto de aplicação  $t_0$  da fórmula abaixo,

$$\theta = \arccos \frac{E u'_1 u'_2 + F(u'_1 v'_2 + v'_1 u'_2) + G v'_1 v'_2}{\sqrt{(E(u'_1)^2 + 2F u'_1 v'_1 + G(v'_1)^2)(E(u'_2)^2 + 2F u'_2 v'_2 + G(v'_2)^2)}}$$

**Exemplo 2.6.** Dada uma superfície regular  $S$  e uma parametrização  $X$  de  $S$  em uma vizinhança do ponto  $p \in S$  passando por  $p$ , tais que seus vetores tangentes são  $X_u$  e  $X_v$ . Então  $\theta$  fica definido por:

$$\theta = \arccos \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|} = \arccos \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Uma outra questão métrica que podemos tratar com a primeira forma fundamental é

a definição de área de uma região limitada de uma superfície regular  $S$ .

Seja  $S$  uma superfície regular,  $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$  e  $R \subseteq S$  uma região limitada de  $S$ , de forma que,  $R$  é a imagem por  $X$  de uma região  $Q \subseteq U$  limitada.

Vamos considerar uma partição  $P$  que divide  $Q$  em um número finito de regiões  $Q_{ij}$  e consequentemente teremos um número finito de  $R_{ij}$  partições de  $R$ . Então  $X(Q_{ij}) = R_{ij}$ .

Temos que:

$$\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$$

$$\Delta v_j = v_j - v_{j-1}$$

Agora vamos aproximar a área da região  $X(Q_{ij})$  pela área do paralelogramo em  $T_p S$ , onde  $p = (u_{i-1}, v_{j-1})$ .

Os vetores  $w_1$  e  $w_2$  em  $T_p S$ , são imagens dos lados dos retângulos  $Q_{ij}$ , tal que

$$w_1 = \Delta u_i X_u$$

$$w_2 = \Delta v_j X_v$$

A área do paralelogramo gerado por  $w_1$  e  $w_2$  é:

$$A_{ij} = \|w_1 \times w_2\| = \|\Delta u_i X_u \times \Delta v_j X_v\| = \Delta u_i \Delta v_j \|X_u \times X_v\|$$

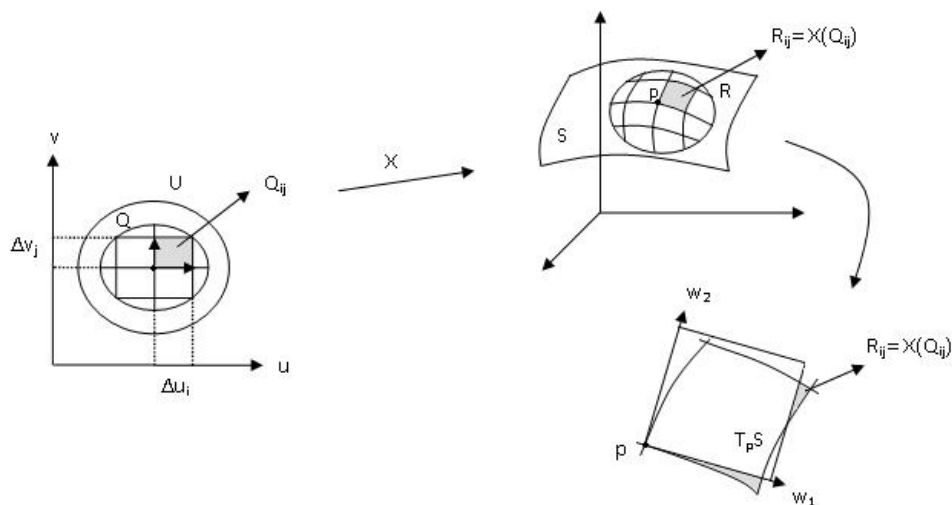


Figura 13: A área  $R_{ij}$  é aproximada pela área do paralelogramo  $T_p S$  com lados  $w_1$  e  $w_2$ .

A área da superfície será dada quando o número de partições  $Q_{ij}$  tenderem a infinito,



ou seja, quando a norma das partições tenderem a zero.

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{R_{ij} \in P} A_{ij} \\ &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{R_{ij} \in P} \Delta u_i \Delta v_j \|X_u \times X_v\| \\ &= \iint_Q du dv \|X_u \times X_v\|, \end{aligned}$$

onde  $|P| = \sup\{\Delta u_i \Delta v_j : R_{ij} \in P\}$

Podemos mostrar que a área de regiões contidas em  $S$  é independente da parametrização  $X$ , mas para isso precisamos utilizar o seguinte teorema de mudança de variáveis para integrais múltiplas, cuja demonstração não será feita neste trabalho.

**Teorema 2.1.** *Seja  $f$  uma aplicação integrável sobre  $Q$ , sendo  $Q$  uma região fechada e limitada do plano  $uv$ . Seja  $\tilde{Q}$  uma região fechada e limitada do plano  $\tilde{u}\tilde{v}$  e uma aplicação  $h : \tilde{Q} \rightarrow Q$ . Se  $h$  for uma bijeção com derivadas parciais contínuas em  $\tilde{Q}$  e se  $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}$  não se anula em  $\tilde{Q}$ , então*

$$\iint_Q f(u, v) du dv = \iint_{\tilde{Q}} f(u(\tilde{u}, \tilde{v}), v(\tilde{u}, \tilde{v})) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| d\tilde{u} d\tilde{v}.$$

Temos que  $\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} \right|$  é a matriz jacobiana da mudança de parâmetros  $h = X^{-1} \circ \tilde{X}$ , com  $h : \tilde{Q} \rightarrow Q$ .

Assim, usando o teorema 2.1 temos

$$\begin{aligned} \iint_{\tilde{Q}} \|\tilde{X}_{\tilde{u}} \times \tilde{X}_{\tilde{v}}\| d\tilde{u} d\tilde{v} &= \iint_{\tilde{Q}} \|X_u \times X_v\| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| d\tilde{u} d\tilde{v} \\ &= \iint_Q \|X_u \times X_v\| du dv. \end{aligned}$$

Então a integral envolvida para calcular área de regiões contidas numa superfície independe da parametrização.

**Definição 2.2.** *Seja  $R \subseteq S$  uma região limitada de uma superfície regular, contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização  $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ .*

O número positivo dado por

$$A(R) = \iint_Q \|X_u \times X_v\| \, du \, dv,$$

com  $X(Q) = R$ , é chamado área de  $R$ .

Agora que definimos a área de  $R$ , podemos escrevê-la usando os coeficientes da primeira forma fundamental. Primeiramente podemos notar que

$$\|X_u \times X_v\| = \|X_u\| \|X_v\| \sin(u, v)$$

e

$$\langle X_u, X_v \rangle = \|X_u\| \|X_v\| \cos(u, v).$$

Então,

$$\begin{aligned} \|X_u \times X_v\|^2 + \langle X_u, X_v \rangle^2 &= \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 \sin^2(u, v) + \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 \cos^2(u, v) \\ &= \|X_u\|^2 \|X_v\|^2 \end{aligned}$$

Assim,

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{\|X_u\|^2 \|X_v\|^2 - \langle X_u, X_v \rangle^2} = \sqrt{EG - F^2}$$

Logo,

$$A(R) = \iint \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

**Exemplo 2.7.** Seja  $S$  uma esfera de raio  $r$  dada por  $X(\theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ , com  $0 < \theta < \pi$  e  $0 < \varphi < 2\pi$ .

Vamos calcular a área total da esfera:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{EG - F^2} \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \left( \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \right) d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (-\cos \pi + \cos 0) \, d\varphi \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} 2 \, d\varphi = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.8.** Seja  $\mathbb{T}^2$  um toro dado por  $X(\theta, \varphi) = ((a+r \cos \theta) \cos \varphi, (a+r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta)$ ,

onde  $U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ . Vamos calcular a área dessa superfície.

Primeiramente vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} X_\theta &= (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \\ X_\varphi &= -(a + r \cos \theta) \sin \varphi, (a + r \cos \theta) \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} E = \langle X_\theta, X_\theta \rangle &= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \\ &= r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \cos^2 \theta \\ &= r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = \langle X_\theta, X_\varphi \rangle &= r(a + r \cos \theta) \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi - r(a + r \cos \theta) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle &= (a + r \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi + (a + r \cos \theta)^2 \cos^2 \varphi \\ &= (a + r \cos \theta)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r^2(a + r \cos \theta)^2} = r(a + r \cos \theta).$$

Então a área do toro é

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(a + r \cos \theta) d\theta d\varphi \\ &= r \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} (a + r \cos \theta) d\theta \right) d\varphi \\ &= r \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} a d\theta + \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right) d\varphi \\ &= r \int_0^{2\pi} (a|_0^\pi + \sin \theta|_0^{2\pi}) d\varphi \\ &= r \int_0^{2\pi} a 2\pi d\varphi \\ &= 2\pi ar(\varphi|_0^{2\pi}) \\ &= 4\pi^2 ar. \end{aligned}$$

## 2.2 Aplicação Normal de Gauss

Começaremos essa seção discutindo em que sentido e quando é possível orientar uma superfície regular.

Temos que  $\{X_u, X_v\}$  formam uma base para o plano tangente  $T_p S$ . Então para todo ponto  $p \in X(U) \subseteq S$ , podemos encontrar um vetor normal unitário a  $T_p S$ , dado por:

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}.$$

**Definição 2.3.** Seja  $S$  uma superfície regular,  $V \subseteq S$  um conjunto aberto. Chamamos a aplicação  $N : V \subseteq S \rightarrow \mathbb{R}^3$  de campo diferencial de vetores normais.

**Definição 2.4.** Uma superfície  $S$  é dita orientável se existe um campo de vetores unitários definidos em toda a superfície. Ou seja, existe uma aplicação diferenciável e contínua

$$\begin{aligned} N : S &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ p &\rightarrow N(p), \quad \forall p \in S \end{aligned}$$

**Definição 2.5.** A aplicação normal de Gauss é a aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  dada localmente por  $N(p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$ , onde  $\mathbb{S}^2$  é a esfera unitária.

A aplicação normal de Gauss une todos os vetores normais unitários a superfície  $S$ , fazendo com que tenham a mesma origem, formando um subconjunto da esfera unitária, como mostra a figura a seguir.

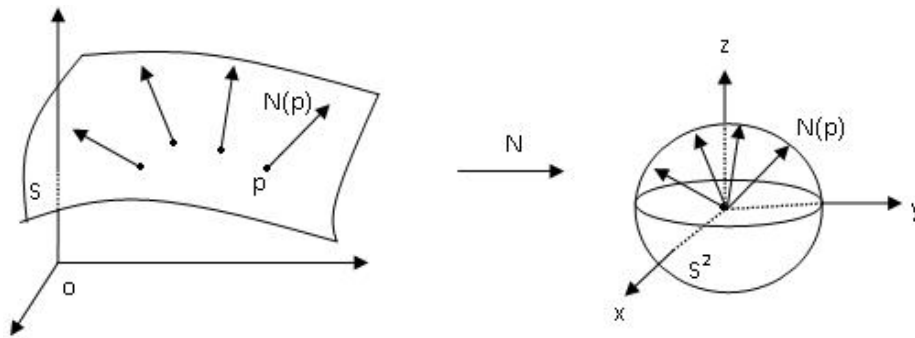


Figura 14: Aplicação normal de Gauss.

O vetor  $N(p)$  é normal a  $T_p S$  em  $p$  e a  $T_{N(p)} S^2$ , ou seja  $T_p S$  e  $T_{N(p)} S^2$  são paralelos, logo podem ser identificados como os mesmos espaços vetoriais.

Vamos estudar agora a variação de  $N$ , ou seja, a derivada de  $N$ .

Como  $T_p S$  e  $T_{N(p)} S^2$  são paralelos, então a derivada de aplicação normal  $dN(p) : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$  pode ser vista como uma aplicação linear em  $T_p S$ . E age sobre a superfície da seguinte forma:

Seja  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ , com  $\gamma(0) = p$  e consideramos a curva parametrizada  $N \circ \gamma(t) = N(t)$ , equivale a restringir o campo vetorial  $N$  a curva  $\gamma(t)$ , formando assim um curva em  $S^2$ , dada pelos extremos dos vetores  $N(t)$ .

Temos que  $N(t) = N \circ \gamma(t)$ , então o vetor tangente a  $N(t)$  em  $N(p)$  é dado por:

$$N'(t) = dN_{\gamma(t)} \circ \gamma'(t)$$

$$N'(0) = dN_p \circ \gamma'(0),$$

mede a taxa de variação do vetor normal  $N$  restrita a curva  $\gamma(t)$ , medindo o quanto a superfície se afasta do plano tangente  $T_p S$ , em um vizinhança de  $p \in S$ .

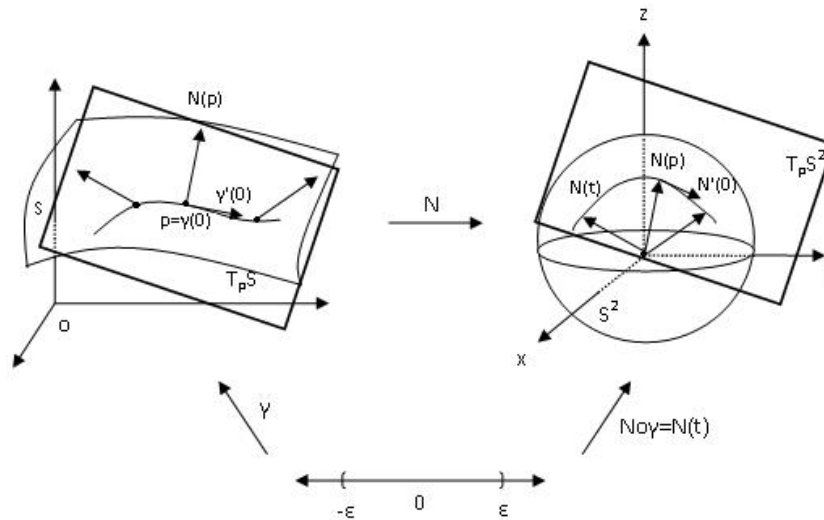


Figura 15: A aplicação  $dN(p)$  mede a variação de  $N(p)$ .

Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 2.9.** Seja  $\pi$  um plano com a seguinte parametrização,  $ax + by + cz + d = 0$ , sabemos que o vetor  $(a, b, c)$  é um vetor normal ao plano  $\pi$ , logo o vetor normal unitário ao plano em  $p$  é dado por:

$$N(p) = \frac{(a, b, c)}{\|(a, b, c)\|} = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

que é o mesmo vetor para todo  $p \in S$ . Portanto  $dN(p) = 0, \forall p \in S$ .

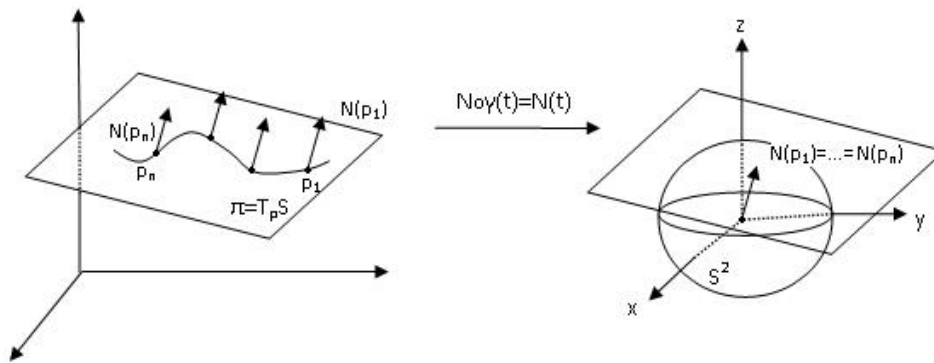


Figura 16: No plano o vetor  $N(p)$  é constante para todo ponto  $p$ , logo  $dN_p = 0$ .

**Exemplo 2.10.** Seja  $\mathbb{S}^2$  uma esfera de raio  $r$  dada por  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ . Vamos considerar apenas a parametrização do hemisfério norte da esfera,  $X(u, v) = (u, v, \sqrt{r^2 - (u^2 + v^2)})$ , com  $(u, v) \in U$  e  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < r^2\}$ .

Temos que  $X_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{r^2 - (u^2 + v^2)}}\right)$  e  $X_v = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{r^2 - (u^2 + v^2)}}\right)$ .

O vetor normal unitário é

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \left(\frac{u}{r}, \frac{v}{r}, \frac{\sqrt{r^2 - (u^2 + v^2)}}{r}\right).$$

Seja  $p = (x, y) \in X(U)$ , então  $N\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$ . Esse resultado também é válido para todo  $p \in \mathbb{S}^2$ .

Vamos considerar a curva  $\gamma$  em  $\mathbb{S}^2$  dada por  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = w$ .

Restrito a curva  $\gamma$  temos que

$$\begin{aligned} N(\gamma(t)) &= N(t) = \frac{1}{r}(x(t), y(t), z(t)) \\ dN(\gamma'(0)) &= dN(w) = N'(0) = \frac{1}{r}(w), \quad \forall p \in S, \quad w \in T_p S. \end{aligned}$$

No entanto, para cobrir a esfera precisamos das outras cinco parametrizações, que obteremos o mesmo resultado.

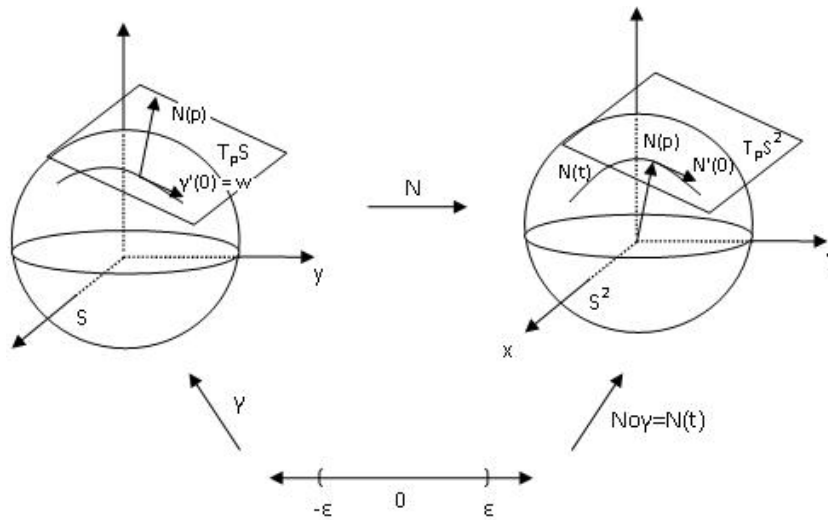


Figura 17: Na esfera de raio  $r$ , temos  $dN(w) = \frac{1}{r}(w)$ .

**Exemplo 2.11.** Seja um cilindro dado por  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ . Temos a seguinte parametrização do cilindro:  $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ , onde  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$ . Logo,

$$X_u = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$X_v = (0, 0, 1).$$

Fazendo os devidos cálculos, obtemos  $N = (\cos u, \sin u, 0)$ , ou seja,  $N = (x, y, 0)$ .

Considerando uma curva qualquer no cilindro,  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , temos que  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ . Se restringirmos o vetor normal  $N(t) = (x(t), y(t), 0)$  temos  $dN(\gamma'(t)) = N'(t) = (x'(t), y'(t), 0)$ .

Se a curva  $\gamma$  for uma reta no cilindro paralela ao eixo  $Oz$ , teremos que o vetor  $w_1$  tangente a curva também será paralelo ao eixo  $Oz$ , logo  $dN(w_1) = 0$ .

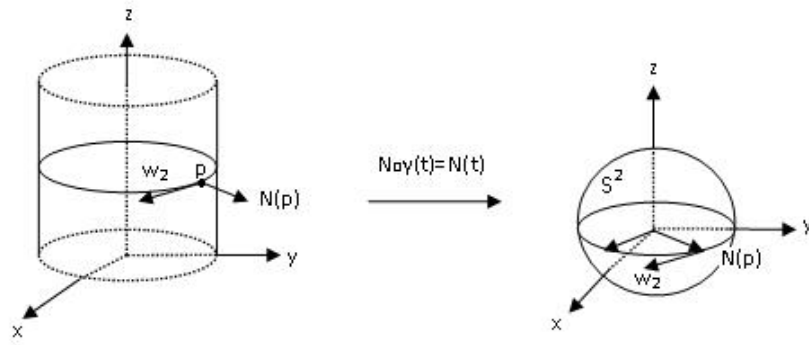


Figura 18: Se a curva  $\gamma$  é paralela ao eixo  $Oz$  o vetor  $N(p)$  é constante para todo ponto  $p \in \gamma$ , logo  $dN_p = 0$ .

Agora se a curva  $\gamma$  for paralela ao plano  $xy$ , teremos o vetor  $w_2$  tangente a curva, onde  $dN_p(w_2) = w_2$ .

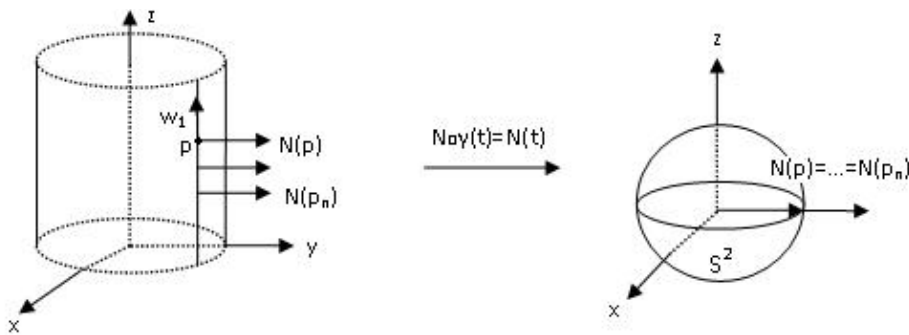


Figura 19: Se a curva  $\gamma$  é paralela ao eixo  $xy$ ,  $dN_p(w_2) = w_2$ .

Vamos usar a seguinte notação, se  $w \in T_p S$  e  $\{X_u, X_v\}$  é uma base de  $T_p S$ , então  $w$  pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base

$$w = w^u X_u + w^v X_v, \quad w^u, w^v \in \mathbb{R}$$

e

$$dN_p(w) = dN_p(w^u X_u + w^v X_v) = w^u dN_p(X_u) + w^v dN_p(X_v) = w^u N_u + w^v N_v.$$

**Proposição 2.1.** A diferencial  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  da aplicação normal de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.

*Demonstração.* Seja  $S$  uma superfície regular com  $X(u, v)$  uma parametrização de  $S$  em  $p$ .



Já sabemos pela proposição 1.9 que  $dN_p$  é linear, então temos apenas que mostrar que  $dN_p$  é auto-adjunta.

Temos que  $\{X_u, X_v\}$  a base associada a  $T_pS$  e sejam  $w_1$  e  $w_2$  vetores de  $T_pS$  que também formam uma base  $\{w_1, w_2\}$  para  $T_pS$ . Teremos que mostrar que

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle .$$

Mas

$$\begin{aligned} w_1 &= w_1^u X_u + w_1^v X_v, & w_1^u, w_1^v &\in \mathbb{R} \\ w_2 &= w_2^u X_u + w_2^v X_v, & w_2^u, w_2^v &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

combinação linear dos vetores da base. E

$$\begin{aligned} dN_p(w_1) &= w_1^u N_u + w_1^v N_v \\ dN_p(w_2) &= w_2^u N_u + w_2^v N_v, \end{aligned}$$

então temos

$$\begin{aligned} \langle dN_p(w_1), w_2 \rangle &= \langle dN_p(w_1), w_2^u X_u + w_2^v X_v \rangle \\ &= w_2^u \langle dN_p(w_1), X_u \rangle + w_2^v \langle dN_p(w_1), X_v \rangle \\ &= w_2^u \langle w_1^u N_u + w_1^v N_v, X_u \rangle + w_2^v \langle w_1^u N_u + w_1^v N_v, X_v \rangle \\ &= w_2^u w_1^u \langle N_u, X_u \rangle + w_2^u w_1^v \langle N_v, X_u \rangle + w_2^v w_1^u \langle N_u, X_v \rangle \\ &\quad + w_2^v w_1^v \langle N_v, X_v \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle dN_p(w_2), w_1 \rangle &= \langle dN_p(w_2), w_1^u X_u + w_1^v X_v \rangle \\ &= w_1^u \langle w_2^u N_u + w_2^v N_v, X_u \rangle + w_1^v \langle w_2^u N_u + w_2^v N_v, X_v \rangle \\ &= w_1^u w_2^u \langle N_u, X_u \rangle + w_1^u w_2^v \langle N_v, X_u \rangle + w_1^v w_2^u \langle N_u, X_v \rangle \\ &\quad + w_1^v w_2^v \langle N_v, X_v \rangle \end{aligned}$$

Para que  $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle dN_p(w_2), w_1 \rangle$ , pelas expressões acima temos que

$$\langle N_v, X_u \rangle = \langle N_u, X_v \rangle .$$

Sabemos que  $N$  é ortogonal a  $X_u$  e  $X_v$  então  $\langle N, X_u \rangle = 0$  e  $\langle N, X_v \rangle = 0$ ,

derivando

$$\frac{\partial}{\partial u} \langle N, X_v \rangle = \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial v} \langle N, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0.$$

Mas  $\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle$ , então  $\langle N_v, X_u \rangle = \langle N_u, X_v \rangle$ .

Então  $dN_p$  é uma aplicação auto-adjunta.  $\square$

Agora que provamos que a diferencial  $dN_p = T_p S \rightarrow T_p S$  é auto-adjunta, podemos associar a ela uma forma bilinear simétrica, ou seja  $B : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $B(u, v) = \langle dN_p(u), v \rangle$  e assim associar uma forma quadrática, nesse caso  $Q : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $Q(v) = B(v, v) = \langle dN_p(v), v \rangle$ .

## 2.3 Segunda Forma Fundamental

Nesta seção vamos definir a segunda forma fundamental sob um aspecto algébrico, e no próximo capítulo veremos uma interpretação geométrica.

**Definição 2.6.** A forma quadrática  $II_p$ , definida em  $T_p S$  por  $II_p = - \langle dN_p(v), v \rangle$  é chamada a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .

Podemos observar que na definição da segunda forma fundamental utilizamos a forma quadrática  $-Q$  apenas por convenção, veremos o porquê mais adiante.

A partir de agora vamos considerar que todas as parametrizações  $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  são compatíveis com a orientação de  $S$ , ou seja, em  $X(U)$ ,  $N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$ .

Vamos calcular a segunda forma fundamental em um vetor  $\gamma'(t)$  em  $T_p S$ .

Sejam  $X(u, v)$  uma parametrização de  $p \in S$  e  $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$  uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\gamma(0) = p$ . Para simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto  $p$ .

Temos que  $\gamma' = X_u u' + X_v v'$  e

$$\begin{aligned} N(t) &= N(\gamma(t)) = N(u(t), v(t)) \\ dN(\gamma') &= N'(u'(t), v'(t)) = N_u u' + N_v v'. \end{aligned}$$

Mas  $N_u, N_v \in T_p S$  então

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$$

portanto

$$\begin{aligned} dN(\gamma') &= (a_{11}X_u + a_{21}X_v)u' + (a_{12}X_u + a_{22}X_v)v' \\ &= X_u(a_{11}u' + a_{12}v') + X_v(a_{21}u' + a_{22}v') \end{aligned}$$

isto é,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isso mostra que na base  $\{X_u, X_v\}$ ,  $dN$  é dada pela matriz  $(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ , chamada de *matriz de Weingarten*.

Note que esta matriz não é necessariamente simétrica, a não ser que  $\{X_u, X_v\}$  seja uma base ortonormal.

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base  $\{X_u, X_v\}$  é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\gamma') &= - \langle dNp(\gamma'), \gamma' \rangle \\ &= - \langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= -(u'^2 \langle N_u, X_u \rangle + u'v' \langle N_u, X_v \rangle + v'u' \langle N_v, X_u \rangle + v'^2 \langle N_v, X_v \rangle). \end{aligned}$$

No entanto,  $\langle N_u, X_v \rangle = \langle N_v, X_u \rangle$ , então

$$II_p(\gamma') = -(u'^2 \langle N_u, X_u \rangle + 2u'v' \langle N_u, X_v \rangle + v'^2 \langle N_v, X_v \rangle).$$

Vamos denotar

$$-e = \langle N_u, X_u \rangle,$$

$$-f = \langle N_u, X_v \rangle,$$

$$-f = \langle N_v, X_u \rangle,$$

$$-g = \langle N_v, X_v \rangle,$$

que chamaremos de coeficientes da segunda forma fundamental.

Então temos a seguinte expressão:

$$II_p(\gamma') = eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2$$

Vamos obter agora os valores de  $a_{ij}$  em termos dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental.

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11} \langle X_u, X_u \rangle + a_{21} \langle X_v, X_u \rangle \\ -f &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11} \langle X_u, X_v \rangle + a_{21} \langle X_v, X_v \rangle \\ -f &= \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{21}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{21} \langle X_u, X_u \rangle + a_{22} \langle X_v, X_u \rangle \\ -g &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{21}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{21} \langle X_u, X_v \rangle + a_{22} \langle X_v, X_v \rangle. \end{aligned}$$

Substituindo os coeficientes da primeira forma fundamental nas expressões acima obtemos:

$$\begin{aligned} -e &= a_{11}E + a_{21}F \\ -f &= a_{11}F + a_{21}G \\ -f &= a_{21}E + a_{22}F \\ -g &= a_{21}F + a_{22}G \end{aligned}$$

As relações acima podem ser expressas em forma matricial:

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

logo,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

No entanto,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

então podemos calcular  $a_{11}, a_{21}, a_{12}$  e  $a_{22}$ :

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2} \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2} \quad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2} \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$$

Para efeito de futuros cálculos, o procedimento para encontrar os coeficientes da segunda forma fundamental será o seguinte:

Temos que  $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$ , então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \langle N, X_u \rangle &= \langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \langle N, X_v \rangle &= \langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \langle N, X_u \rangle &= \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Das equações acima temos que:

- $\langle N_u, X_u \rangle = - \langle N, X_{uu} \rangle$
- $\langle N_v, X_v \rangle = - \langle N, X_{vv} \rangle$
- $\langle N_v, X_u \rangle = - \langle N, X_{uv} \rangle$ .

Logo podemos escrever os coeficientes da segunda forma fundamental da seguinte forma:

$$\begin{aligned} e &= \langle N, X_{uu} \rangle = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{uu} \right\rangle = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \langle X_u \times X_v, X_{uu} \rangle \\ &= \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} \\ f &= \langle N, X_{uv} \rangle = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{uv} \right\rangle = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \langle X_u \times X_v, X_{uv} \rangle \\ &= \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} \\ g &= \langle N, X_{vv} \rangle = \left\langle \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}, X_{vv} \right\rangle = \frac{1}{\|X_u \times X_v\|} \langle X_u \times X_v, X_{vv} \rangle \\ &= \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}$$

Utilizamos a notação  $\langle X_u \times X_v, X_{uu} \rangle = \det(X_u, X_v, X_{uu})$ ,  $\langle X_u \times X_v, X_{uv} \rangle = \det(X_u, X_v, X_{uv})$  e  $\langle X_u \times X_v, X_{vv} \rangle = \det(X_u, X_v, X_{vv})$ , onde  $(X_u, X_v, X_{uu})$ ,  $(X_u, X_v, X_{uv})$  e  $(X_u, X_v, X_{vv})$  são matrizes formadas pelas componentes dos vetores  $X_u, X_v$  e  $X_{uu}$ ,  $X_u, X_v$  e  $X_{uv}$ ,  $X_u, X_v$  e  $X_{vv}$ , respectivamente, na base canônica do  $\mathbb{R}^3$ .

Vejamos um exemplo:

**Exemplo 2.12.** *Seja um cilindro  $\mathbb{C}$  dado por  $X(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ , com  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$ .*

*Vamos calcular os coeficientes da segunda forma fundamental.*

*Primeiramente temos que  $X_u = (-\sin u, \cos u, 0)$  e  $X_v = (0, 0, 1)$ , então*

$$X_{uu} = (-\cos u, -\sin u, 0)$$

$$X_{uv} = (0, 0, 0)$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0).$$

*Logo,*

$$\det(X_u, X_v, X_{uu}) = \begin{pmatrix} -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\cos u & -\sin u & 0 \end{pmatrix} = -\cos^2 u - \sin^2 u = -1$$

$$\det(X_u, X_v, X_{uv}) = 0$$

$$\det(X_u, X_v, X_{vv}) = 0$$

*Portanto, os coeficientes da segunda forma fundamental são*

$$e = \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = -1$$

$$f = 0$$

$$g = 0.$$

No próximo capítulo iremos apresentar uma interpretação geométrica para a segunda forma fundamental e fazer alguns exemplos.

## 3 *Curvaturas*

### 3.1 *Curvatura Normal*

Antes de definirmos curvatura para superfícies, vamos analisar a definição de curvatura de uma curva. Primeiramente vamos definir o que é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco.

**Definição 3.1.** *Uma curva diferenciável parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada regular se  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .*

**Definição 3.2.** *Seja  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada diferenciável, ou seja, para cada  $t \in (a, b)$  existe um vetor não nulo  $\gamma'(t)$ . Diz-se que  $\gamma$  é parametrizado pelo comprimento de arco se, para cada  $t_0, t_1 \in (a, b)$ , com  $t_0 \leq t_1$ , o comprimento de arco da curva  $\gamma$  de  $t_0$  a  $t_1$  é igual a  $t_1 - t_0$ . Ou seja,*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt = t_1 - t_0,$$

*assim  $\|\gamma'(t)\| = 1, \forall t \in (a, b)$ .*

Se considerarmos  $\gamma$  como a posição de uma partícula, então  $\gamma$  ser parametrizado pelo comprimento de arco significa que essa partícula está se movendo com velocidade constante igual a 1.

Seja  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , como o vetor tangente  $\gamma'(t)$  é unitário, o módulo da derivada segunda  $\|\gamma''(s)\|$  mede a variação do ângulo que as tangentes vizinhas fazem com a tangente em  $s$ . Ou seja,  $\|\gamma''(s)\|$  dá uma medida do quão rapidamente a curva se afasta, em uma vizinhança de  $s$ , da tangente em  $s$ .

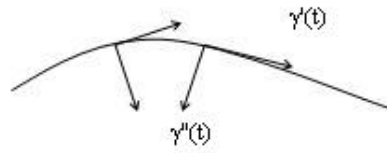


Figura 20: Vetores velocidade de uma curva.

Então vamos definir curvatura de uma curva  $\alpha$  em  $s$ .

**Definição 3.3.** Seja  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in (a, b)$ . O número  $\|\gamma''(s)\| = k(s)$  chama-se curvatura de  $\gamma$  em  $s$ .

Agora vamos considerar uma curva  $\gamma$  parametrizada pelo comprimento de arco contida em uma superfície regular  $S$ , tal que  $\gamma(s) = p$ ,  $\gamma'(s)$  o vetor tangente a  $\gamma$  em  $p$  e  $k(s) = \|\gamma''(s)\|$  a curvatura de  $\gamma$  em  $s$ .

Seja  $\theta$  o ângulo entre  $N \circ \gamma(s)$ , vetor normal a  $S$  em  $p$ , e  $\gamma''(s)$ .

**Definição 3.4.** A curvatura normal definida por  $\gamma$  em  $p \in S$  é dada por  $K_n = k \cos \theta$ , ou seja  $K_n(\gamma, s) = \langle N \circ \gamma(s), \gamma''(s) \rangle$ .

Podemos observar que  $K_n$  é o comprimento da projeção do vetor  $\gamma''(s)$  sobre a normal a superfície em  $p$ , com sinal dado pela orientação  $N$  de  $S$  em  $p$ .



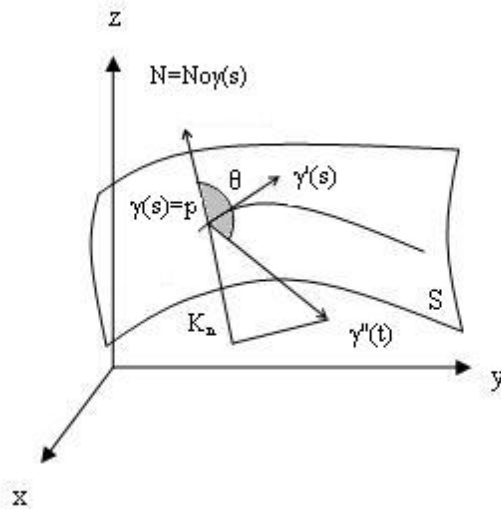


Figura 21: A curvatura normal  $K_n$ .

Como  $K_n$  dá a componente do vetor curvatura  $\gamma''(s)$  de  $\gamma$  segundo a normal  $N \circ \gamma(s)$  à superfície, se esses vetores forem colineares, isto é, se a normal principal à curva  $\gamma$  no instante  $s$  tiver a direção normal à superfície em  $\gamma(s)$ , então o valor absoluto de  $K_n$  é igual a curvatura de  $\gamma$  nesse ponto.

Vamos agora expressar  $K_n$  em termos dos coeficientes da segunda forma fundamental.

Seja  $\gamma$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  contida em uma superfície  $S$ . Podemos notar que  $\gamma'(s)$  pertence a  $T_{\gamma(s)}S$  e é ortogonal a  $N(s) = N \circ \gamma(s)$ , então  $\langle \gamma'(s), N \circ \gamma(s) \rangle = 0$ , derivando temos

$$\begin{aligned} \langle \gamma''(s), N \circ \gamma(s) \rangle + \langle \gamma'(s), N' \circ \gamma(s) \cdot \gamma'(s) \rangle &= 0 \\ K_n(\gamma, s) &= - \langle \gamma'(s), dN_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) \rangle \\ K_n(\gamma, s) &= +II_{\gamma(s)}(\gamma'(s)). \end{aligned}$$

Podemos dizer então que a curvatura normal no ponto  $\gamma(s)$  de uma curva regular contida em  $S$ , cuja tangente nesse ponto é o vetor  $\gamma'(s)$ , é igual ao valor que obtemos aplicando a segunda forma fundamental  $II_{\gamma(s)}$  em  $\gamma'(s)$ .

Isso mostra o porque que usamos o sinal  $(-)$  na definição 2.7.

**Teorema 3.1** (Teorema de Meusnier). *Todas as curvas que possuem o mesmo vetor velocidade em  $p \in S$ , possuem a mesma curvatura normal em  $p$ .*

*Demonstração.* Já demonstramos na aplicação acima. Note que a curvatura normal  $K_n$

em  $p \in S$  só depende da direção tangente a curva passando por  $p$ .  $\square$

O teorema acima nos permite falar em curvatura normal ao longo de uma dada direção em  $p$ . Vejamos a seguinte definição:

**Definição 3.5.** Uma seção normal  $C_v$  a uma superfície  $S$  determinada por  $v \in T_p S$  é a curva de interseção de  $S$  com o plano  $P_v$  gerado por  $v$  e  $N(p)$ .

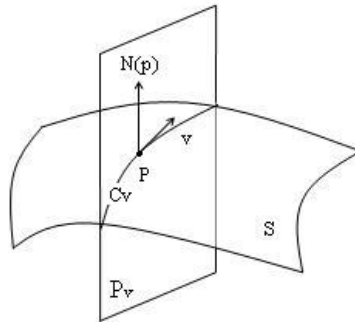


Figura 22: Seção normal  $C_v$  a uma superfície  $S$ .

Em uma vizinhança de  $p$ , uma seção normal de  $S$  em  $p$  é uma curva regular plana em  $S$ , cujo vetor normal em  $p$  é  $\pm N(p)$  ou zero, portanto a sua curvatura é igual ao valor absoluto da curvatura normal segundo  $v$  em  $p$ . Além disso, o sinal de  $K_n$  muda conforme a concavidade da superfície no ponto, ou seja, se a concavidade aponta no sentido de  $N(p)$  então é positiva, se aponta no sentido oposto é negativa.

Assim o teorema de Meusnier afirma que o valor absoluto da curvatura normal em  $p$  de uma curva  $\gamma(s)$  é igual a curvatura da seção normal de  $S$  em  $p$ , segundo  $\gamma'(0)$ .

Logo para estudar as curvaturas normais em  $p \in S$  basta analisar as curvaturas das seções normais.

Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 3.1.** Como vimos no exemplo 2.8, num plano  $\Pi$  temos  $dN_p = 0$  para qualquer curva passando por  $p$  em  $\Pi$ . E para qualquer  $p \in \Pi$  obtemos um plano formado por  $N(p)$  e  $v_p$ , cujas seções normais são retas em  $\Pi$ , que possuem curvatura nula.

Também temos que a segunda forma fundamental é o número resultante do produto interno de  $dN(p)$  aplicada ao vetor tangente a  $p$ , que será nulo em todos os pontos  $p \in \pi$ , estando de acordo com o fato de  $dN_p = 0$ .

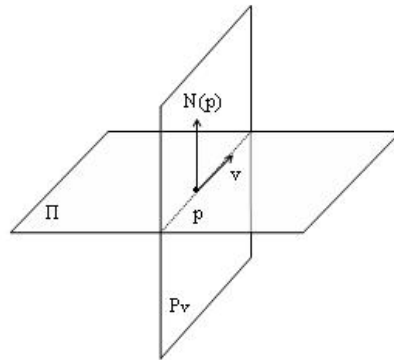


Figura 23: Seções normais no plano  $\Pi$  são retas, tendo assim curvatura nula.

**Exemplo 3.2.** No cilindro reto, dado por  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ , as seções normais em um ponto  $p$  variam de uma reta paralela ao eixo do cilindro, de uma família de elipses até a um círculo perpendicular ao eixo do cilindro. Assim as curvaturas normais variam de 0, na reta, a 1, no círculo. Caso fosse um cilindro de raio  $r$ , iria variar de 0 a  $\frac{1}{r}$ .

Como vimos exemplo 2.11 os vetores  $w_1$  e  $w_2$  correspondem às direções das curvaturas normais 0 e 1, respectivamente, logo a segunda forma fundamental assume seu valor máximo em  $w_1$  e mínimo em  $w_2$ .

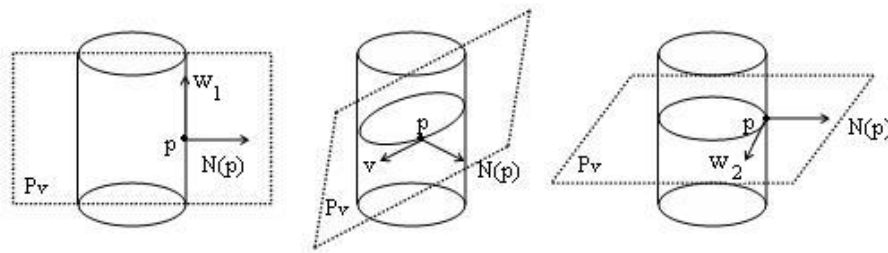


Figura 24: Seções normais no cilindro variam de uma reta paralela ao eixo do cilindro, uma família de elipses até a um círculo perpendicular ao eixo do cilindro.

Podemos observar no exemplo acima que a segunda forma fundamental assume um máximo e um mínimo, vamos deixar isso mais claro.

Seja um plano  $P_v$  que contém  $v$  e  $N(p)$ , girando em torno de  $N(p)$ . Como  $v$  é um vetor unitário, quando giramos  $P_v$  em torno de  $N(p)$ ,  $v$  descreve em  $T_p S$  um círculo de raio 1.

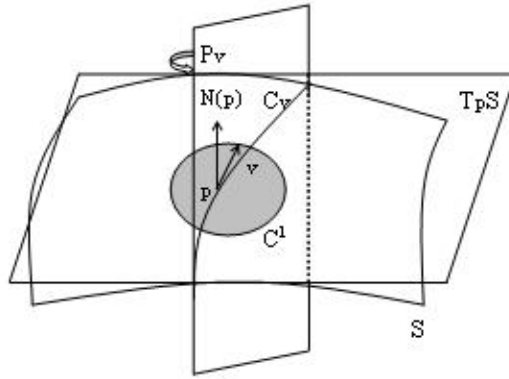


Figura 25: Circunferência  $\mathbb{S}^1$  descrita pelo vetor unitário  $v$  em  $T_pS$ .

Para contruímos uma seção normal basta tomarmos uma direção em  $T_pS$ , então  $K_n$  pode ser visto como uma aplicação contínua

$$K_n(p) : \mathbb{S}^1 \subseteq T_pS \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow K_n(p)(v) = II_p(v).$$

Vamos usar agora o seguinte teorema:

**Teorema 3.2.** *Seja  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  um conjunto fechado e limitado, ou seja compacto, e seja uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $D$ . Então  $f$  assume seu valor máximo absoluto e mínimo absoluto.*

Sabemos que  $\mathbb{S}^1$  é um compacto, assim se  $K_n$  está definida em  $\mathbb{S}^1$ , então pelo teorema acima existem  $e_1, e_2 \in T_pS$  tal que  $K_n(p)(e_1)$  é valor máximo e  $K_n(p)(e_2)$  é valor mínimo.

Voltemos a aplicação linear  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ . Sabemos que  $dN_p$  está associado a uma forma bilinear simétrica  $B_p : T_pS \times T_pS \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $B_p(v, w) = - \langle dN_p(v), w \rangle$ , e

$$B_p(v, v) = II_p(v) = - \langle dN_p(v), v \rangle,$$

onde  $II_p(v) : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$ .

Usando o resultado que  $dN_p$  é um operador auto-adjunto, concluímos que  $B_p$  é simétrica, pois  $v, w \in T_pS$ , temos que

$$B(v, w) = - \langle dN_p(v), w \rangle = - \langle v, dN_p(w) \rangle = - \langle dN_p(w), v \rangle = B(w, v).$$

Seja  $e_1 \in T_pS$  vetor unitário tal que  $B(e_1, e_1) = - \langle dN(e_1), e_1 \rangle = K_1$ , onde  $K_1$  é o

máximo da função  $K_n$ .

Seja também  $e_2 \in T_p S$  um vetor unitário tal que  $e_1 \perp e_2$  e  $\{e_1, e_2, N\}$  seja uma base orientada positivamente.

Temos que  $\forall v \in T_p S$  com  $\|v\| = 1$  pode ser escrito como  $v = \cos t e_1 + \sin t e_2$ .

Logo,  $B(v, v) = \cos^2 t(B(e_1, e_1)) + 2 \cos t \sin t(B(e_1, e_2)) + \sin^2 t(B(e_2, e_2))$ , mas

$$B(e_1, e_1) = K_1 = b_{11}$$

$$B(e_1, e_2) = b_{12}$$

$$B(e_2, e_2) = b_{22}.$$

Então defina a função  $b(t) = \cos^2 t b_{11} + 2 \cos t \sin t b_{12} + \sin^2 t b_{22} = B_p(v, v)$ .

Em  $t = 0$  a função  $b$  atinge seu valor máximo, portanto  $b'(0) = 0$ . Logo,

$$b'(t) = -2 \cos t \sin t b_{11} + 2(-\sin^2 t + \cos^2 t)b_{12} + 2 \sin t \cos t b_{22}.$$

Portanto,

$$b'(0) = 2b_{12} = 0 \Rightarrow b_{12} = 0 \Rightarrow B(v, v) = b(t) = \cos^2 t b_{11} + \sin^2 t b_{22}.$$

Como  $K_1$  é o máximo, então  $b(t) = \cos^2 t K_1 + \sin^2 t b_{22} \leq K_1$ , mas

$$\cos^2 t K_1 + \sin^2 t b_{22} \leq \cos^2 t K_1 + \sin^2 t K_1 \Rightarrow \sin^2 t (K_1 - b_{22}) \geq 0 \Rightarrow K_1 \geq b_{22}.$$

Então,  $\forall t$ ,  $B(e_2, e_2) = b_{22} = \cos^2 t b_{22} + \sin^2 t b_{22} \leq \cos^2 t K_1 + \sin^2 t b_{22} = b(t) = B(v, v)$ .

Logo, a curvatura normal  $K_n(p)(e_2)$  é a menor possível, então,  $K_n(p)(e_2) = K_2$ , onde  $K_2$  é o mínimo da função  $K_n$ .

Temos então que  $\{e_1, e_2\}$  é uma base ortonormal, tal que,  $II_p$  atinge o máximo  $K_1$  em  $e_1$  e mínimo  $K_2$  em  $e_2$ .

Finalmente, vejamos que  $e_1$  e  $e_2$  são autovetores de  $dN_p$ .

Temos que,

$$dN_p(e_1) = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$$

$$dN_p(e_2) = a_{21}e_1 + a_{22}e_2.$$

Mas,

$$\begin{aligned} K_1 &= B(e_1, e_1) = \langle dN_p(e_1), e_1 \rangle \\ &= - \langle a_{11}e_1 + a_{12}e_2, e_1 \rangle \\ &= -a_{11} \end{aligned}$$

Temos que,

$$\begin{aligned} B(e_1, e_2) &= 0 \\ &= - \langle dN_p(e_1), e_2 \rangle \\ &= - \langle a_{11}e_1 + a_{12}e_2, e_2 \rangle \\ &= -a_{12} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B(e_2, e_1) &= 0 \\ &= - \langle dN_p(e_2), e_1 \rangle \\ &= - \langle a_{21}e_1 + a_{22}e_2, e_1 \rangle \\ &= -a_{21}. \end{aligned}$$

Também temos que

$$\begin{aligned} K_2 &= B(e_2, e_2) = \langle dN_p(e_2), e_2 \rangle \\ &= - \langle a_{21}e_1 + a_{22}e_2, e_2 \rangle \\ &= -a_{22} \end{aligned}$$

Logo,  $dN_p(e_1) = a_{11}e_1 = -K_1e_1$ ,  $dN_p(e_2) = a_{22}e_2 = -K_2e_2$ , o que mostra que  $e_1, e_2$  são autovetores de  $dN_p$  como afirmado. Seus autovalores são  $-K_1$  e  $-K_2$  respectivamente.

Além disso,  $K_1$  e  $K_2$ , com  $K_1 \geq K_2$ , são valores extremos da curvatura normal em  $p$ , ou seja, o máximo e o mínimo que a segunda forma fundamental  $II_p$  restrita ao círculo unitário de  $T_pS$  pode assumir.

**Definição 3.6.** *O máximo  $K_1$  e o mínimo  $K_2$  da curvatura normal, são chamados curvaturas principais em  $p$ . As direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos autovetores  $e_1$  e  $e_2$  são chamadas direções principais em  $p$ .*

No plano e na esfera, todas as direções em todos os pontos são principais, isto vem do

fato que a segunda forma fundamental, em todos os pontos, restrita a vetores unitários é constante. Assim, todas as direções são extremos para a curvatura normal.

Já no caso do cilindro, os autovetores  $v$  e  $w$  fornecem as direções principais em  $p$ , correspondendo às curvaturas principais 1 e 0, respectivamente.

**Definição 3.7.** *Uma curva regular e conexa  $\gamma$  é dita uma linha de curvatura de  $S$  se, para todo ponto  $p \in \gamma$ , digamos  $\gamma(t_0) = p$ , temos que  $\gamma'(t_0)$  é uma direção principal.*

**Teorema 3.3** (Olinde Rodrigues). *Uma condição necessária e suficiente para que uma curva regular e conexa  $\gamma$  em  $S$  seja uma linha de curvatura de  $S$  é existir uma curva  $\lambda : s \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $N'(s) = \lambda(s)\gamma'(s)$ .*

*Demonstração.* Se  $N'(s) = \lambda(s)\gamma'(s)$  então  $\gamma'(s)$  é autovetor de  $dN_{\gamma(s)}$ , portanto temos que  $\gamma'(s)$  é direção principal, logo  $\gamma(s)$  é linha de curvatura.

Agora se  $\gamma(s)$  é linha de curvatura temos que  $\lambda(s) = K_1$  ou  $\lambda(s) = K_2$ . □

Agora que conhecemos as curvaturas principais  $K_1$  e  $K_2$  em  $p \in S$ , podemos calcular facilmente a curvatura normal segundo uma direção  $v \in T_pS$ . Vejamos como fazer isso:

Se  $v \in T_pS$  e  $\|v\| = 1$ , como  $e_1$  e  $e_2$  formam uma base ortonormal de  $T_pS$ , temos  $v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo de  $e_1$  a  $v$  na orientação de  $T_pS$ .

A curvatura normal  $K_n$  na direção de  $v$  é dada por

$$\begin{aligned} K_n = II_p(v) &= - \langle dN_p(v), v \rangle \\ &= - \langle dN_p(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= + \langle e_1 K_1 \cos \theta + e_2 K_2 \sin \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= K_1 \cos^2 \theta \langle e_1, e_1 \rangle + K_1 \cos \theta \sin \theta \langle e_1, e_2 \rangle \\ &+ K_2 \cos \theta \sin \theta \langle e_2, e_1 \rangle + K_2 \sin^2 \theta \langle e_2, e_2 \rangle \\ &= K_1 \cos^2 \theta + K_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Essa última expressão é conhecida como a fórmula de Euler.

## 3.2 Curvatura Gaussiana e Média

Dada a diferencial da aplicação normal de Gauss  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  e a base  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_pS$  de autovetores de  $dN_p$ . Já vimos que podemos associar uma matriz a  $dN_p$  relacionada

a essa base, que nesse caso será dada por uma matriz diagonal, e os elementos da diagonal são os autovalores associados a  $e_1$  e  $e_2$ .

**Definição 3.8.** *Seja  $p \in S$  e seja  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $dN_p$  é chamado curvatura Gaussiana  $K$  de  $S$  em  $p$ . Em termos das curvaturas principais*

$$K = K_1K_2$$

**Definição 3.9.** *Seja  $p \in S$  e seja  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  a diferencial da aplicação de Gauss. O oposto da metade do traço de  $dN_p$  é chamado de curvatura média  $H$  de  $S$  em  $p$ . Em termos das curvaturas principais*

$$H = \left( \frac{K_1 + K_2}{2} \right)$$

Podemos expressar a curvatura Gaussiana  $K$  e a curvatura média  $H$  em termos da primeira e da segunda formas fundamentais. Primeiramente vamos lembrar que a matriz  $[a_{ij}]$  relacionada a  $dN_p$  tem os seguintes coeficientes:

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2} \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2} \quad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2} \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \det [a_{ij}] &= \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} \right) \left( \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) - \left( \frac{gF - fG}{EG - F^2} \right) \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{f^2F^2 - fgEF - efFG + egEG - egF^2 + fgEF + efFG - f^2EG}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{f^2F^2 + egEG - egF^2 - f^2EG}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{-f^2(GE - F^2) + eg(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Para o cálculo da curvatura média, lembremos que  $-K_1$  e  $-K_2$  são autovalores de  $dN$ . Portanto,  $K_1$  satisfaz  $dN_p(e_1) = -K_1e_1$  e  $K_2$  satisfaz  $dN_p(e_2) = -K_2e_2$ . Logo



$\det[dN_p + KI] = 0$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \det \left[ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \right] &= \det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0 \\ (a_{11} + k)(a_{22} + k) - a_{21}a_{12} &= 0 \\ a_{11}a_{22} + a_{11}k + a_{22}k + k^2 - a_{21}a_{12} &= 0 \\ k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) &= 0 \end{aligned}$$

Como  $K_1$  e  $K_2$  são raízes da equação acima, concluímos que

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}(K_1 + K_2) &= -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) \\ &= \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Sabemos que  $H = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$ , logo  $2H = a_{11} + a_{22}$ , substituindo na equação acima temos

$$\begin{aligned} k^2 + 2Hk + K &= 0, \\ k &= \frac{2H \pm \sqrt{4H^2 - 4K}}{2} \Rightarrow k = H \pm \sqrt{H^2 - K}. \end{aligned}$$

Com essa relação podemos notar que conhecendo a curvatura média e Gaussiana podemos obter facilmente as curvaturas principais.

Agora usando as curvaturas principais  $K_1$  e  $K_2$  podemos classificar os pontos de uma superfície  $S$ .

**Definição 3.10.** *Um ponto de uma superfície  $S$  é chamado*

1. Elíptico se  $\det(dN_p) > 0$ , ou seja,  $K(p) > 0$ . Logo,  $K_1$  e  $K_2$  são ambas negativas ou ambas positivas;
2. Hiperbólico se  $\det(dN_p) < 0$ , ou seja,  $K(p) < 0$ . Logo,  $K_1$  e  $K_2$  possuem sinais contrários;
3. Parabólico se  $\det(dN_p) = 0$ , com  $dN_p \neq 0$ , ou seja  $K(p) = 0$  e  $H(p) \neq 0$ . Logo, uma das curvaturas principais é não nula e a outra é nula;
4. Planar se  $dN_p = 0$ , ou seja  $K(p) = 0$  e  $H(p) = 0$ . Logo,  $K_1$  e  $K_2$  são ambas nulas.

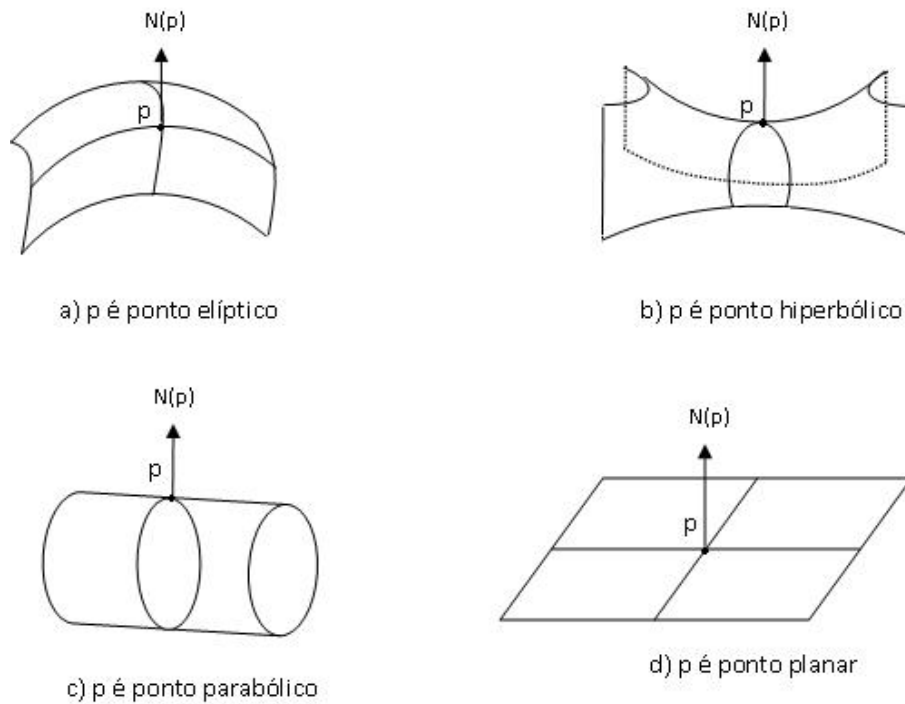


Figura 26: Classificação dos pontos sobre uma superfície.

**Definição 3.11.** Se em  $p \in S$ ,  $K_1 = K_2$ , então  $p$  é chamado ponto umbílico de  $S$ , em particular, os pontos planares ( $K_1 = K_2 = 0$ ) são pontos umbílicos.

Vamos ver como Gauss introduziu o conceito de curvatura, dando uma interpretação geométrica da curvatura em termos da aplicação normal  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Vejamos algumas definições:

**Definição 3.12.** Diz-se que uma base  $\{w_1, w_2\} \in T_p S$  é positiva se  $\{w_1, w_2, w_1 \times w_2\}$  tem a mesma orientação da base canônica em  $\mathbb{R}^3$ , caso contrário  $\{w_1, w_2\}$  é uma base negativa.

**Definição 3.13.** Sejam  $S$  e  $\bar{S}$  duas superfícies regulares orientadas e seja  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  uma aplicação diferenciável e suponha que para algum  $p \in S$ ,  $d\varphi_p$  seja não singular. Dizemos que  $\varphi$  preserva a orientação em  $p$  se dada uma base positiva  $\{w_1, w_2\} \in T_p S$ , então  $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$  é uma base positiva em  $T_{\varphi(p)} \bar{S}$ . Se  $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$  não é uma base positiva, dizemos que  $\varphi$  reverte a orientação em  $p$ .

Como a superfície  $S$  e a esfera unitária pertencem a  $\mathbb{R}^3$ , assim uma orientação  $N$  em  $S$  induz uma orientação  $N$  em  $\mathbb{S}^2$ .

Seja  $p \in S$  tal que  $dN_p$  é não singular. Como para uma base  $\{w_1, w_2\}$ ,

$$dN_p(w_1) \times dN_p(w_2) = \det(dN_p)(w_1 \times w_2) = Kw_1 \times w_2,$$

a aplicação de Gauss  $N$  preserva a orientação em  $p \in S$  se  $K(p) > 0$  e reverte a orientação em  $p \in S$  se  $K(p) < 0$ . Ou seja, dada uma orientação para  $T_pS$ , essa induz uma orientação para pequenas curvas fechadas em  $S$ , ao redor de  $p$ , quando aplicada  $N$  a essas curvas pode acontecer duas coisas:

1. Se  $p$  é um ponto elíptico em  $S$ , seja  $V$  uma vizinhança conexa de  $p$  tal que  $K(q) > 0$ ,  $\forall q \in V$  e seja  $\gamma : [0, l] \rightarrow V$  um curva fechada ao redor de  $p$ . Neste caso a imagem de  $\gamma$  por  $N$  terá a mesma orientação.

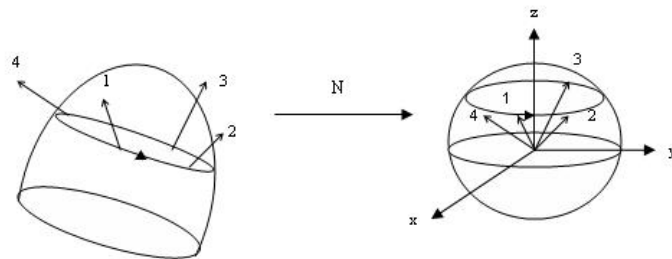


Figura 27: Em pontos elípticos a aplicação de Gauss preserva a orientação.

2. Se  $p$  é um ponto hiperbólico em  $S$ , seja  $V$  uma vizinhança conexa de  $p$  tal que  $K(q) < 0$ ,  $\forall q \in V$  e seja  $\gamma : [0, l] \rightarrow V$  uma curva fechada ao redor de  $p$ . Neste caso a imagem de  $\gamma$  por  $N$  terá orientação oposta.

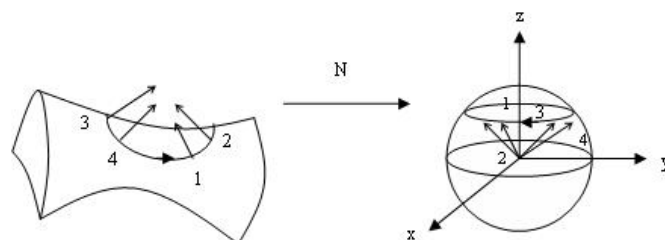


Figura 28: Em pontos hiperbólicos a aplicação de Gauss inverte a orientação.

Agora vamos mostrar a interpretação geométrica da curvatura Gaussiana  $K$ .

Faremos a convenção de que a área de uma região contida em uma vizinhança conexa  $V$ , onde  $K \neq 0$ , e a área da sua imagem por  $N$  tem o mesmo sinal se  $K > 0$  em  $V$ , e sinais opostos se  $K < 0$  em  $V$ , usando o fato acima.

**Proposição 3.1.** *Seja  $S$  uma superfície regular,  $p \in S$  tal que a curvatura Gaussiana  $K(p) \neq 0$ , e seja  $V$  uma vizinhança conexa de  $p$  onde  $K$  não muda de sinal. Então*

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A},$$

onde  $A$  é a área de uma região conexa  $B \subseteq V$  contendo  $p$ ,  $A'$  é a área da imagem de  $B$  pela aplicação normal de Gauss  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ , e o limite é tomado através de uma sequência de regiões  $B_n$  que convergem para  $p$ , no sentido em que para toda bola centrada  $B(p, r)$  em  $p$ , existe  $n$  suficientemente grande, tal que,  $B_n \subseteq B(p, r) \cap S$ .

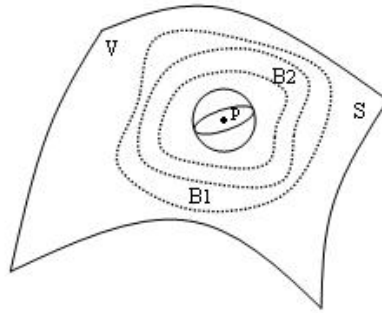


Figura 29: Sequência de regiões  $B_n$  que convergem para  $p$ .

*Demonstração.* Seja  $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$ , tal que  $p \in X(U) \subseteq V$ .

Sabemos que a área  $A$  de  $B$  é dada por

$$A = \iint_B \|X_u \times X_v\| dudv.$$

E a área  $A'$  de  $N(B)$  é dada por

$$A' = \iint_B \|N_u \times N_v\| dudv.$$

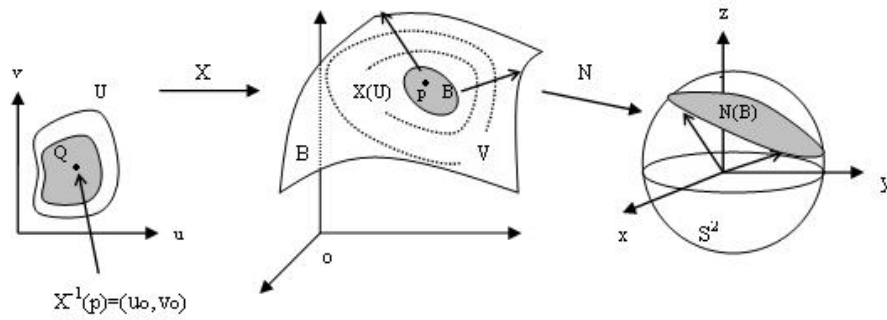


Figura 30: A região  $N(B)$  é imagem de  $B$  pela aplicação normal de Gauss.

Já vimos que como  $N_u$  e  $N_v$  são vetores de  $T_p S$ , podemos escrevê-los como  $N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v$  e  $N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v$ . Usando a definição de  $K$ , temos

$$A' = \iint_B \|N_u \times N_v\| dudv = \iint_B \|(a_{11}X_u + a_{21}X_v) \times (a_{12}X_u + a_{22}X_v)\| dudv = \iint_B K \|X_u \times X_v\| dudv.$$

Então,

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = \frac{\lim_{B \rightarrow 0} \iint_B K \|X_u \times X_v\| dudv}{\lim_{B \rightarrow 0} \iint_B \|X_u \times X_v\| dudv} = \frac{K \|X_u \times X_v\|}{\|X_u \times X_v\|} = K.$$

□

Vejamos agora alguns exemplos:

**Exemplo 3.3.** Temos que os coeficientes da primeira forma fundamental e da segunda forma fundamental do plano, são  $E = 1$ ,  $F = 0$ ,  $G = 1$  e  $e = 0$ ,  $f = 0$ ,  $g = 0$ , respectivamente. Usando esses coeficientes podemos calcular a curvatura Gaussiana e Média

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0 \quad e \quad H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = 0.$$

**Exemplo 3.4.** Seja  $\mathbb{T}^2$  um toro dado por  $X(\theta, \varphi) = ((a+r \cos \theta) \cos \varphi, (a+r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta)$ , onde  $U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ . Vamos calcular a curvatura Gaussiana dos pontos do toro  $\mathbb{T}^2$ .

Do exemplo 2.8 temos que os coeficientes da primeira forma fundamental são  $E = r^2$ ,  $F = 0$  e  $G = (a + r \cos \theta)^2$ . Basta agora calcular os coeficientes da segunda forma

fundamental.

$$\begin{aligned}
 X_\theta &= (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \\
 X_\varphi &= -(a + r \cos \theta) \sin \varphi, (a + r \cos \theta) \cos \varphi, 0) \\
 X_{\theta\theta} &= (-r \cos \theta \cos \varphi, -r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta) \\
 X_{\varphi\varphi} &= -(a + r \cos \theta) \cos \varphi, -(a + r \cos \theta) \sin \varphi, 0) \\
 X_{\theta\varphi} &= (r \sin \theta \sin \varphi, -r \sin \theta \cos \varphi, 0)
 \end{aligned}$$

Logo,

E agora os coeficientes da segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned}
 \det(X_\theta, X_\varphi, X_{\theta\theta}) &= \begin{vmatrix} -r \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \\ -(a + r \cos \theta) \sin \varphi & (a + r \cos \theta) \cos \varphi & 0 \\ -r \cos \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \end{vmatrix} \\
 &= r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta (a + r \cos \theta) + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi (a + r \cos \theta) + \\
 &+ r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta (a + r \cos \theta) + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi (a + r \cos \theta) \\
 &= r^2 \cos^2 \varphi (a + r \cos \theta) + r^2 \sin^2 \varphi (a + r \cos \theta) \\
 &= r^2 (a + r \cos \theta),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \det(X_\theta, X_\varphi, X_{\theta\varphi}) &= \begin{vmatrix} -r \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \\ -(a + r \cos \theta) \sin \varphi & (a + r \cos \theta) \cos \varphi & 0 \\ -r \sin \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} \\
 &= r(a + r \cos \theta) \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi - r(a + r \cos \theta) \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \det(X_\theta, X_\varphi, X_{\varphi\varphi}) &= \begin{vmatrix} -r \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \\ -(a + r \cos \theta) \sin \varphi & (a + r \cos \theta) \cos \varphi & 0 \\ -(a + r \cos \theta) \cos \varphi & -(a + r \cos \theta) \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} \\
 &= r(a + r \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi \cos \theta + r(a + r \cos \theta)^2 \cos^2 \varphi \cos \theta \\
 &= r(a + r \cos \theta)^2 \cos \theta.
 \end{aligned}$$

Logo os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned} e &= \frac{\det(X_\theta, X_\varphi, X_{\theta\theta})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{r^2(a + r \cos \theta)}{r(a + r \cos \theta)} = r \\ f &= \frac{\det(X_\theta, X_\varphi, X_{\theta\varphi})}{\sqrt{EG - F^2}} = 0 \\ g &= \frac{\det(X_\theta, X_\varphi, X_{\varphi\varphi})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{r(a + r \cos \theta)^2 \cos \theta}{r(a + r \cos \theta)} = (a + r \cos \theta) \cos \theta \end{aligned}$$

A curvatura Gaussiana,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{r(a + r \cos \theta) \cos \theta}{r^2(a + r \cos \theta)^2} = \frac{\cos \theta}{r(a + r \cos \theta)}.$$

Da expressão acima podemos notar que:

- Se  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ , então a curvatura Gaussiana  $K > 0$ ;
- Se  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  ou  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , então a curvatura Gaussiana  $K = 0$ ;
- Se  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ , então a curvatura Gaussiana  $K < 0$ .

Logo o Toro é uma superfície que tem pontos elípticos, parabólicos e hiperbólicos.

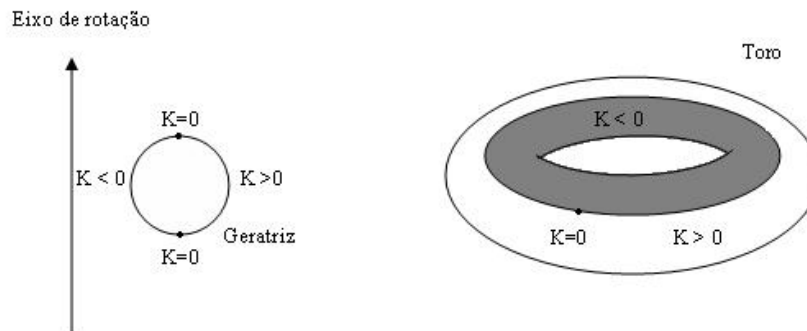


Figura 31: Curvatura Gaussiana no toro.

A curvatura média,

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{r(a + r \cos \theta)^2 + r^2(a + r \cos \theta) \cos \theta}{r^2(a + r \cos \theta)^2} = \frac{a + 2r \cos \theta}{2r(a + r \cos \theta)}.$$

Para calcular as curvaturas principais podemos usar a seguinte expressão  $k = H \pm$

$\sqrt{H^2 - K}$  que usa a curvatura Gaussiana e Média, que calculamos acima, logo

$$\begin{aligned} k &= \frac{a + 2r \cos \theta}{2r(a + r \cos \theta)} \pm \sqrt{\frac{a + 2r \cos \theta^2}{2r(a + r \cos \theta)} - \frac{\cos \theta}{r(a + r \cos \theta)}} \\ &= \frac{a + 2r \cos \theta}{2r(a + r \cos \theta)} \pm \sqrt{\frac{a^2 + 4ar \cos \theta + 4r^2 \cos^2 \theta - 4ra \cos \theta - 4r^2 \cos^2 \theta}{4r^2(a + r \cos \theta)^2}} \\ &= \frac{a + 2r \cos \theta}{2r(a + r \cos \theta)} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4r^2(a + r \cos \theta)^2}} \end{aligned}$$

Sendo assim as curvaturas principais são

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{a + 2r \cos \theta}{2r(a + r \cos \theta)} + \frac{a}{2r(a + r \cos \theta)} = \frac{2(a + r \cos \theta)}{2r(a + r \cos \theta)} = \frac{1}{r} \\ K_2 &= \frac{a + 2r \cos \theta}{2r(a + r \cos \theta)} - \frac{a}{2r(a + r \cos \theta)} = \frac{2r \cos \theta}{2r(a + r \cos \theta)} = \frac{\cos \theta}{a + r \cos \theta}. \end{aligned}$$

Sabemos que os coeficientes da matriz  $dN_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  são

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} = -\frac{r(a + r \cos \theta)}{r^2(a + r \cos \theta)^2} = -\frac{1}{r} \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} = 0 \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} = 0 \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} = -\frac{r^2(a + r \cos \theta) \cos \theta}{r^2(a + r \cos \theta)^2} = -\frac{\cos \theta}{a + r \cos \theta}. \end{aligned}$$

Portanto a matriz  $dN_p$  é uma matriz diagonal, então os autovetores que correspondem as direções principais são

$$e_1 = \frac{X_\theta}{\|X_\theta\|} = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad e_2 = \frac{X_\varphi}{\|X_\varphi\|} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0),$$

portanto as linhas de curvatura são linhas de coordenadas.

**Exemplo 3.5.** A sela de macaco é uma superfície dada por  $X(u, v) = (u, v, u^3 - 3v^2u)$ . Assim como o parabolóide hiperbólico é chamado de sela, pois uma pessoa pode sentar-se confortavelmente, a sela de macaco é assim chamada pois um macaco pode sentar-se confortavelmente, já que possui espaço para o rabo, como mostra a figura abaixo.



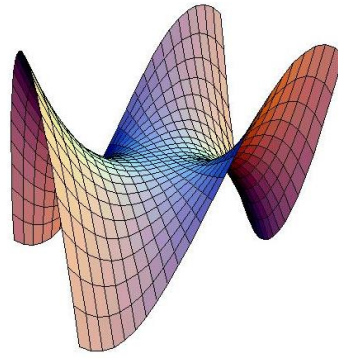


Figura 32: Sela de macaco.

*Vamos calcular a curvatura Gaussiana dos pontos da sela de macaco.*

*Primeiramente vamos calcular os coeficientes da primeira forma fundamental  $E$ ,  $F$  e  $G$ . Temos que*

$$X_u = (1, 0, 3u^2 - 3v^2)$$

$$X_v = (0, 1, -6vu)$$

$$X_{uu} = (0, 0, 6u)$$

$$X_{vv} = (0, 0, -6u)$$

$$X_{uv} = (0, 0, -6v).$$

*Logo,*

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + (3u^2 - 3v^2)^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -6vu(3u^2 - 3v^2)$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + 36v^2u^2.$$

$$\text{Então, } \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}.$$

Agora vamos calcular os coeficientes da segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned} \det(X_u, X_v, X_{uu}) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3u^2 - 3v^2 \\ 0 & 1 & -6vu \\ 0 & 0 & 6u \end{vmatrix} = 6u, \\ \det(X_u, X_v, X_{uv}) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3u^2 - 3v^2 \\ 0 & 1 & -6vu \\ 0 & 0 & -6v \end{vmatrix} = -6v, \\ \det(X_u, X_v, X_{vv}) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3u^2 - 3v^2 \\ 0 & 1 & -6vu \\ 0 & 0 & -6u \end{vmatrix} = -6u. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} e &= \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{6u}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}, \\ f &= \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{-6v}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}, \\ g &= \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{-6u}{\sqrt{1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4}}. \end{aligned}$$

A curvatura Gaussiana

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-36(u^2 + v^2)}{(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^2}$$

Podemos notar da expressão acima que no ponto  $(0, 0)$  a curvatura Gaussiana  $K = 0$ , ou seja  $(0, 0, 0)$  é um ponto planar. E todos os outros pontos hiperbólicos, pois  $K < 0$ .

A curvatura média é dada por:

$$\begin{aligned} H &= \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{6u(1 + 36v^2u^2) + (12v)(-6vu(3u^2 - 3v^2)) + (-6u)(1 + (3u^2 - 3v^2)^2)}{2(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{6u + 216v^2u^3 - 72v^2u(3u^2 - 3v^2) - (6u)(1 + 9u^4 - 18u^2v^2 + 9v^4)}{2(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{6u + 216v^2u^3 - 216v^2u^3 + 216v^4u - 6u - 54u^5 + 108u^3v^2 - 54uv^4}{2(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-27u^5 + 81v^4u + 54u^3v^2}{(1 + 9u^4 + 18u^2v^2 + 9v^4)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

**Exemplo 3.6.** *Seja uma superfície dada pelo gráfico de uma função diferenciável, com a seguinte parametrização  $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , com  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .*

*Temos que*

$$\begin{aligned} X_u &= (1, 0, f_u) \\ X_v &= (0, 1, f_v) \\ X_{uu} &= (0, 0, f_{uu}) \\ X_{vv} &= (0, 0, f_{vv}) \\ X_{uv} &= (0, 0, f_{uv}). \end{aligned}$$

*Logo,  $E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + (f_u)^2$      $F = \langle X_u, X_v \rangle = f_u f_v$      $G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + (f_v)^2$ . Temos que*

$$\begin{aligned} \det(X_u, X_v, X_{uu}) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \\ 0 & 0 & f_{uu} \end{vmatrix} = f_{uu}, \\ \det(X_u, X_v, X_{uv}) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \\ 0 & 0 & f_{uv} \end{vmatrix} = f_{uv}, \\ \det(X_u, X_v, X_{vv}) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \\ 0 & 0 & f_{vv} \end{vmatrix} = f_{vv}. \end{aligned}$$

*Logo os coeficientes da segunda forma fundamental são*

$$\begin{aligned} e &= \frac{\det(X_u, X_v, X_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + (f_u)^2 + (f_v)^2}} \\ f &= \frac{\det(X_u, X_v, X_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + (f_u)^2 + (f_v)^2}} \\ g &= \frac{\det(X_u, X_v, X_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + (f_u)^2 + (f_v)^2}} \end{aligned}$$

*A curvatura Gaussiana é*

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + (f_u)^2 + (f_v)^2)^2}.$$

*A curvatura média é*

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{f_{uu}(1 + f_v^2) - 2f_{uv}f_u f_v + f_{vv}(1 + (f_u)^2)}{2(1 + (f_u)^2 + (f_v)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

## 4 Geometria Intrínseca das Superfícies

### 4.1 Isometrias e o Teorema Egregium(Gauss)

Os coeficientes da primeira forma fundamental no plano e no cilindro são os mesmos, como vimos nos exemplos 2.1 e 2.2 . Como já havíamos comentado isso não é mera coincidência, essa transformação geométrica do plano no cilindro que referimos anteriormente se trata de um difeomorfismo especial, como veremos em seguida.

**Definição 4.1.** *Uma aplicação  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  é uma isometria se  $\varphi$  é um difeomorfismo e para todo ponto  $p \in S$  e todos os pares  $w_1, w_2 \in T_p S$  temos  $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}$ . Diz-se que as superfícies  $S_1$  e  $S_2$  são isométricas.*

Em outras palavras,  $\varphi$  é uma isometria se a diferencial  $d\varphi$  preserva o produto interno:

$$I_p(w) = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle = I_{\varphi_p}(d\varphi_p(w)), \quad \forall w \in T_p S.$$

**Definição 4.2.** *Uma aplicação  $\varphi : V_1 \subseteq S_1 \rightarrow S_2$  definida em uma vizinhança  $V_1$  de  $p$ , com  $p \in S_1$ , é uma isometria local em  $p$  se  $\exists V_2$  vizinhança de  $\varphi(p) \in S_2$  tal que  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  seja uma isometria. Se  $\forall p \in S_1$  for possível estabelecer uma isometria local, então  $S_1$  e  $S_2$  são localmente isométricas.*

Podemos mostrar que se  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  é um difeomorfismo e existe uma isometria local para todo ponto  $p \in S_1$ , então  $\varphi$  é uma isometria global.

No entanto, podem existir duas superfícies que sejam localmente isométricas, sem que sejam globalmente isométricas. Vejamos um exemplo:

**Exemplo 4.1.** *Seja um plano  $\Pi$  dado por  $X(u, v) = p_0 + uw_1 + vw_2$  e um cilindro  $C$  dado por,  $\bar{X}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ , com  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$ .*

*Vamos mostrar que  $\varphi : \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{X}(U)$  é uma isometria.*

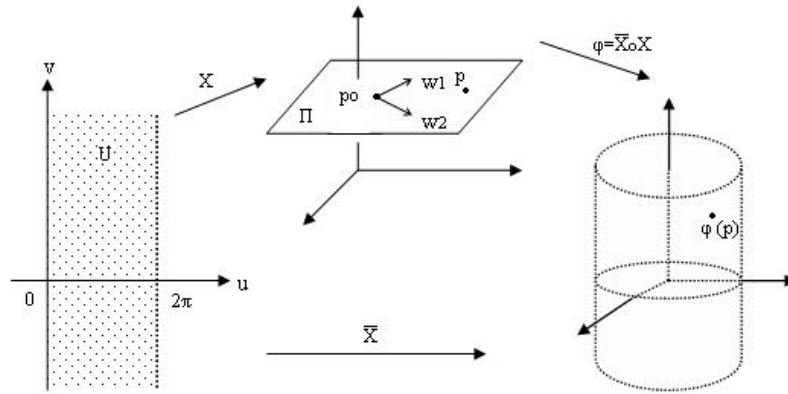


Figura 33: A aplicação  $\varphi$  é uma isometria.

Temos que  $X_u = w_1$  e  $X_v = w_2$ . Os coeficientes da primeira forma fundamental são  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = 1$ , como vimos no exemplo 2.1.

Também temos que  $\bar{X}_u = (-\sin u, \cos v, 0)$  e  $\bar{X}_v = (0, 0, 1)$ . Os coeficientes da primeira forma fundamental são  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = 1$ , como vimos no exemplo 2.2.

Seja um ponto  $p \in X(U)$ , sejam os vetores  $v_1, v_2 \in T_p X(U)$  e  $p_0 = (u_0, v_0)$ . Logo,

$$v_1 = v_1^1 X_u + v_1^2 X_v = dX(u_0, v_0)(v_1^1, v_1^2)$$

$$v_2 = v_2^1 X_u + v_2^2 X_v = dX(u_0, v_0)(v_2^1, v_2^2).$$

E  $d\varphi(p) = d\bar{X}(X^{-1}(p))dX^{-1}(p) = d\bar{X}(u_0, v_0)dX^{-1}(p)$ . Então

$$d\varphi(p)(v_1) = d\bar{X}(u_0, v_0)(v_1^1, v_1^2) = v_1^1 \bar{X}_u + v_1^2 \bar{X}_v$$

$$d\varphi(p)(v_2) = d\bar{X}(u_0, v_0)(v_2^1, v_2^2) = v_2^1 \bar{X}_u + v_2^2 \bar{X}_v$$

Temos então que

$$\begin{aligned} I\varphi(p)(d\varphi(p)(v_1), d\varphi(p)(v_2)) &= \langle v_1^1 \bar{X}_u + v_1^2 \bar{X}_v, v_2^1 \bar{X}_u + v_2^2 \bar{X}_v \rangle \\ &= v_1^1 v_2^1 \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle + v_1^1 v_2^2 \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle \\ &\quad + v_1^2 v_2^1 \langle \bar{X}_v, \bar{X}_u \rangle + v_1^2 v_2^2 \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle \\ &= v_1^1 v_2^1 + v_1^2 v_2^2. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
 I_p(v_1, v_2) &= \langle v_1^1 X_u + v_1^2 X_v, v_2^1 X_u + v_2^2 X_v \rangle \\
 &= v_1^1 v_2^1 \langle X_u, X_u \rangle + v_1^1 v_2^2 \langle X_u, X_v \rangle + v_1^2 v_2^1 \langle X_v, X_u \rangle + v_1^2 v_2^2 \langle X_v, X_v \rangle \\
 &= v_1^1 v_2^1 + v_1^2 v_2^2.
 \end{aligned}$$

Com as expressões acima podemos concluir que  $I_p(v_1, v_2) = I_{\varphi(p)}(d\varphi(p)(v_1), d\varphi(p)(v_2))$ .

Logo o plano é localmente isométrico ao cilindro.

O plano não é globalmente isométrico ao cilindro, já que o cilindro nem mesmo é homeomorfo a um plano. Vejamos um argumento intuitivo:

Qualquer curva simples e fechada no plano pode ser encolhida continuamente até torna-se um ponto sem deixar o plano. Tal propriedade é preservada por homeomorfismos. No entanto, o cilindro não possui essa propriedade, o que contradiz a existência de um homeomorfismo entre o plano e o cilindro.

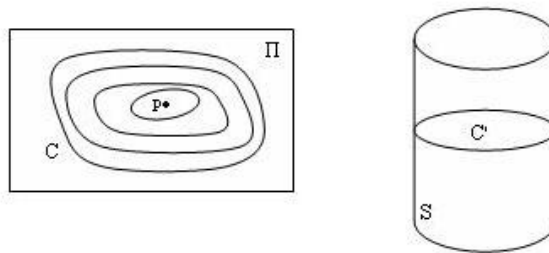


Figura 34:  $C \subseteq \Pi$  pode ser deformada continuamente em um ponto sem abandonar  $p$ , o que não ocorre com  $C' \subseteq S$

Vamos pensar no plano como uma folha de papel, quando transformamos essa folha em um cilindro, a folha foi simplesmente arqueada, tendo modificado apenas sua relação com o ambiente em que está inserido,  $\mathbb{R}^3$ . Ou seja, sua característica intrínseca é preservada.

Vamos agora generalizar o argumento dado acima para obter um critério para isometrias locais em termos de coordenadas locais.

**Proposição 4.1.** *Se existirem parametrizações  $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $\bar{X} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{S}$  tais que  $E = \bar{E}$ ,  $F = \bar{F}$  e  $G = \bar{G}$  em  $U$  então a aplicação  $\varphi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(u) \rightarrow \bar{S}$  é uma isometria local.*

*Demonstração.* Seja  $p \in X(U)$  e  $v, w \in T_p S$ , logo

$$v = v_1 X_u + v_2 X_v = dX_{(X^{-1}(p))}(v_1, v_2)$$

$$w = w_1 X_u + w_2 X_v = dX_{(X^{-1}(p))}(w_1, w_2).$$

Temos que  $d\varphi(p) = d\bar{X}(X^{-1}(p))dX^{-1}(p)$ , logo

$$d\varphi(p)(v) = d\bar{X}(X^{-1}(p))(v_1, v_2) = v_1 \bar{X}_u + v_2 \bar{X}_v$$

$$d\varphi(p)(w) = d\bar{X}(X^{-1}(p))(w_1, w_2) = w_1 \bar{X}_u + w_2 \bar{X}_v.$$

Então

$$\begin{aligned} I_p(v, w) &= \langle v_1 X_u + v_2 X_v, w_1 X_u + w_2 X_v \rangle \\ &= v_1 w_1 \langle X_u, X_u \rangle + v_1 w_2 \langle X_u, X_v \rangle + v_2 w_1 \langle X_v, X_u \rangle + v_2 w_2 \langle X_v, X_v \rangle \\ &= v_1 w_1 E + (v_1 w_2 + v_2 w_1) F + v_2 w_2 G \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_{\varphi(p)}(d\varphi(p))(v), d\varphi(p)(w)) &= \langle v_1 w_1 \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle + v_1 w_2 \langle \bar{X}_u, \bar{X}_v \rangle \\ &\quad + v_2 w_1 \langle \bar{X}_v, \bar{X}_u \rangle + v_2 w_2 \langle \bar{X}_v, \bar{X}_v \rangle \\ &= v_1 w_1 \bar{E} + (v_1 w_2 + v_2 w_1) \bar{F} + v_2 w_2 \bar{G}. \end{aligned}$$

Como  $E = \bar{E}$ ,  $F = \bar{F}$  e  $G = \bar{G}$ , então  $I_p(v, w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi(p))(v), d\varphi(p)(w))$ . Logo é uma isometria local.  $\square$

**Exemplo 4.2.** *Seja um catenóide e um helicóide dados por*

$$X(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av),$$

com  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < \infty\}$  e

$$\bar{X}(\bar{u}, \bar{v}) = (\cos \bar{u}, \bar{v} \sin \bar{u}, a\bar{u}),$$

com  $\{\bar{U} : (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \bar{u} < 2\pi, -\infty < \bar{v} < \infty\}$ , respectivamente.

Vamos fazer a seguinte mudança de parâmetros,  $\bar{u} = u$ ,  $\bar{v} = a \sinh v$ , com  $0 < u < 2\pi$  e  $-\infty < v < \infty$ . Que é possível, visto que  $\bar{X}$  é bijetiva e o Jacobiano é

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \cosh v \end{vmatrix} = a \cosh v,$$



que nunca se anula.

Assim uma nova parametrização do helicóide é  $\bar{X}(u, v) = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, av)$ .

Temos que

$$X_u = (-a \cosh v \sinh u, a \cosh v \cosh u, 0)$$

$$X_v = (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a)$$

$$\bar{X}_u = (-a \sinh v \sinh u, a \sinh v \cosh u, a)$$

$$\bar{X}_v = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, 0).$$

Então os coeficientes da primeira forma fundamental do catenóide e do helicóide são  $E = a^2 \cosh^2 v$ ,  $F = 0$ ,  $G = a^2 \cosh^2 v$  e  $\bar{E} = a^2 \cosh^2 v$ ,  $\bar{F} = 0$ ,  $\bar{G} = a^2 \cosh^2 v$ , logo pela proposição 4.1 temos que o catenóide e o helicóide são localmente isométricos.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Retirado de [2]

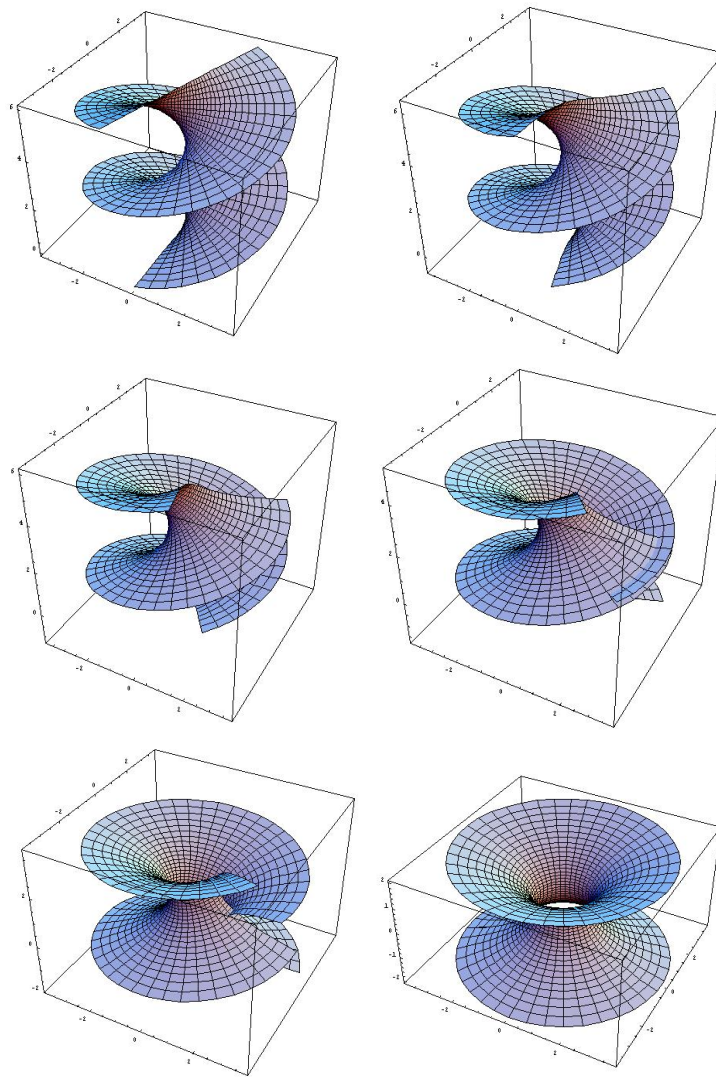
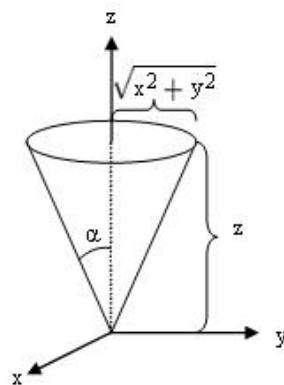


Figura 35: Transformação do Helicóide no Catenóide.

**Exemplo 4.3.** *Seja um cone  $C$  de uma folha, dado por  $z = +K\sqrt{x^2 + y^2}$ , com  $(x, y) \neq 0$ .*

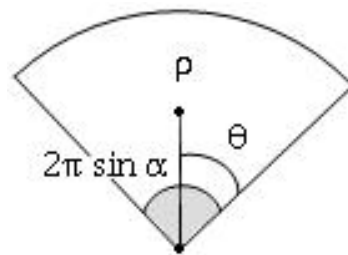


Temos que  $\cot \alpha = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = K$ .

O cone menos uma geratriz pode ser "rolado" sobre um pedaço de um plano formando um setor plano, que é dado por um conjunto aberto  $U : \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2, 0 < \rho < \infty, 0 < \theta < 2\pi \sin \alpha\}$

E seja  $X(\rho, \theta) = (\rho \sin \alpha \cos(\frac{\theta}{\sin \alpha}), \rho \sin \alpha \sin(\frac{\theta}{\sin \alpha}), \rho \cos \alpha)$ . Podemos perceber que  $X(U)$  cobre todos os pontos do cone exceto a geratriz  $\theta = 0$ , visto que quando percorre o intervalo  $(0, 2\pi \sin \alpha)$ ,  $\frac{\theta}{\sin \alpha}$  percorre o intervalo  $(0, 2\pi)$ .

Seja também a seguinte parametrização  $\bar{X}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)$ , com  $0 < \rho < 2\pi$  e  $0 < \theta < 2\pi$ , como pedaços de plano, ver figura a seguir:



Temos que

$$\begin{aligned} X_\rho &= \left( \sin \alpha \cos \left( \frac{\theta}{\sin \alpha} \right), \sin \alpha \sin \left( \frac{\theta}{\sin \alpha} \right), \cos \alpha \right) \\ X_\theta &= \left( -\rho \sin \left( \frac{\theta}{\sin \alpha} \right), \rho \cos \left( \frac{\theta}{\sin \alpha} \right), 0 \right) \\ \bar{X}_\rho &= (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \bar{X}_\theta &= (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0). \end{aligned}$$

Logo os coeficientes da primeira forma fundamental são  $E = 1, F = 0, G = \rho^2$  e  $\bar{E} = 1, \bar{F} = 0, \bar{G} = \rho^2$  são iguais, assim pela proposição 4.1 temos que o plano e o cone  $C$  são localmente isométricos.

Agora vamos demonstrar o teorema Egregium de Gauss, um dos teoremas mais importantes da geometria diferencial. Muitos matemáticos já usavam a curvatura Gaussiana, mas apenas como o produto de curvaturas principais, dependendo assim da segunda forma fundamental, ou seja, do modo particular de como a superfície está mergulhada em  $\mathbb{R}^3$ , não havendo motivo até então para que a curvatura Gaussiana tivesse um caráter intrínseco. Até que Gauss demonstrou no seu famoso teorema Egregium que a curvatura Gaussiana é uma característica intrínseca da superfície.

Vamos associar a cada ponto de uma superfície um triedro e estudar as derivadas de

seus vetores.

Temos  $\{X_u, X_v, N\}$  formam uma base em  $\mathbb{R}^3$ , então vamos expressar as derivadas dos vetores  $X_u, X_v$  e  $N$  nessa base:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 N \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N \\ N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v \\ N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v, \end{aligned}$$

onde os coeficientes  $a_{11}, a_{12}, a_{21}$  e  $a_{22}$  foram calculados anteriormente.

Sabemos que  $X_{uv} = X_{vu} \Rightarrow X_{uv} - X_{vu} = 0 \Rightarrow (\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^1)X_u + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2)X_v + (L_2 - \bar{L}_2)N = 0$ , logo  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ ,  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$  e  $L_2 = \bar{L}_2$ .

Além disso,

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, N \rangle = L_1 \\ f &= \langle X_{uv}, N \rangle = L_2 \\ g &= \langle X_{vv}, N \rangle = L_3. \end{aligned}$$

**Definição 4.3.** Os coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$  para  $i, j, k = 1, 2$  são chamados de símbolos de Christoffel.

Agora vamos calcular os símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental.

Temos que

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_u \rangle &= \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, X_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \langle X_{uu}, X_v \rangle &= \langle \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 N, X_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\frac{1}{2} E_u G - F (F_u - \frac{1}{2} E_v)}{EG - F^2} = \frac{E_u G - 2FF_u - E_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{E (F_u - \frac{1}{2} E_v) - F (\frac{1}{2} E_u)}{EG - F^2} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned}\langle X_{uv}, X_u \rangle &= \langle \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, X_u \rangle = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \langle X_{uv}, X_v \rangle &= \langle \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 N, X_v \rangle = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}.\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}\langle X_{vv}, X_u \rangle &= \langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N, X_u \rangle = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \langle X_{vv}, X_v \rangle &= \langle \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 N, X_v \rangle = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.\end{aligned}$$

O fato de podermos resolver os sistemas acima e encontrar os símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental nos permite afirmar que conceitos geométricos e propriedades em termos dos símbolo de Christoffel são invariantes por isometrias.

**Exemplo 4.4.** *Seja  $\mathbb{S}^2$  uma esfera parametrizada por  $X(\varphi, \theta) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ , com  $U = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ . Temos do exemplo 2.3 que os coeficientes da primeira forma fundamental da esfera são:  $E = r^2$ ,  $F = 0$  e  $G = r^2 \sin^2 \theta$ , logo  $E_\varphi = E_\theta = 0$ ,  $F_\varphi = F_\theta = 0$ ,  $G_\varphi = 0$  e  $G_\theta = 2r^2 \sin \theta \cos \theta$ .*

*Vamos calcular os símbolos de Christoffel para esfera usando as equações obtidas*

acima:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u G - 2FF_u - E_v}{2(EG - F^2)} = 0, \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)} = 0, \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} = 0, \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} = \frac{-2 \sin^3 \theta \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} = -\sin \theta \cos \theta, \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} = 0.
\end{aligned}$$

**Teorema 4.1** (Egregium de Gauss). *A curvatura Gaussiana  $K$  de uma superfície é invariante por isometrias locais.*

*Demonstração.* Temos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN \\
X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN \\
X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN \\
X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN \\
N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v \\
N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v.
\end{aligned}$$

E sejam

$$\begin{aligned}
(X_{uu})_v &= \Gamma_{11v}^1 X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + \Gamma_{11v}^2 X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e_v N + e N_v \\
(X_{uv})_u &= \Gamma_{12v}^1 X_u + \Gamma_{12}^1 X_{uu} + \Gamma_{12u}^2 X_v + \Gamma_{12}^2 X_{vu} + f_u N + f N_u.
\end{aligned}$$

Substituindo  $X_{uu}$ ,  $X_{uv}$ ,  $X_{vu}$ ,  $X_{vv}$ ,  $N_u$  e  $N_v$ :

$$\begin{aligned}
(X_{uu})_v &= \Gamma_{11v}^1 X_u + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN) + \Gamma_{11v}^2 X_v \\
&\quad + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN) + e_v N + e(a_{12} X_u + a_{22} X_v) \\
(X_{uv})_u &= \Gamma_{12u}^1 X_u + \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN) + \Gamma_{12u}^2 X_v \\
&\quad + \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + fN) + f_u N + f(a_{11} X_u + a_{21} X_v).
\end{aligned}$$

Colocando  $X_u$ ,  $X_v$  e  $N$  em evidência temos:

$$\begin{aligned}(X_{uu})_v &= X_u(\Gamma_{11v}^1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + ea_{12}) + X_v(\Gamma_{11v}^2 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 + ea_{22}) \\ &\quad + N(e_v\Gamma_{11}^1f + \Gamma_{11}^2g) \\ (X_{uv})_u &= X_u(\Gamma_{12u}^1 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^1 + fa_{11}) + X_v(\Gamma_{12v}^2 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{21}^2 + fa_{21}) \\ &\quad + N(f_u\Gamma_{12}^1e + \Gamma_{12}^2f)\end{aligned}$$

No entanto, sabemos que  $(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$ , logo

$$\Gamma_{11v}^1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + ea_{12} = \Gamma_{12u}^1 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^1 + fa_{11}.$$

Então

$$\Gamma_{11v}^1 - \Gamma_{12u}^1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^1 = fa_{11} - ea_{12}$$

Substituindo os coeficientes  $a_{11}$  e  $a_{12}$  já calculados na seção 2.3:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11v}^1 - \Gamma_{12u}^1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^1 &= f\left(\frac{fF - eG}{EG - F^2}\right) - e\left(\frac{gF - fG}{EG - F^2}\right) \\ &= \frac{f^2F - feG - egF + efG}{EG - F^2} \\ &= -\frac{F(eg - f^2)}{EG - F^2} \\ &= -FK.\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que a curvatura Gaussiana só depende da primeira forma fundamental.

De modo análogo, da igualdade  $(X_{uu})_v = (X_{uv})_u$ , é possível formular  $FK$  e  $GK$  em função dos símbolos de Christoffel e das suas derivadas. Como  $E$ ,  $F$ ,  $G$  não se anulam simultaneamente, podemos concluir que a curvatura Gaussiana  $K$  de uma superfície regular só depende dos coeficientes  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e das suas derivadas, sendo assim, invariante por isometria.  $\square$

Pelas definições de ponto elíptico e de ponto hiperbólico, estes só dependem da curvatura gaussiana, logo uma isometria transforma pontos elípticos em pontos elípticos e pontos hiperbólicos em pontos hiperbólicos. O que já não ocorre com os pontos parabólicos e planares, já que na sua definição  $K = 0$  e dependem da curvatura média  $H$ .

## 4.2 Derivada Covariante e Transporte Paralelo

Nessa seção iremos apresentar alguns conceitos sob um aspecto intuitivo, fazendo interpretações envolvendo o espaço exterior da superfície. No entanto, mostraremos que em cada caso esses conceitos introduzidos dependem apenas da primeira forma fundamental.

Primeiramente vamos definir derivada covariante de um campo de vetores, que é o análogo para superfícies da derivação usual de vetores no plano.

Seja  $S$  uma superfície regular e lembramos que um campo de vetores tangentes em um conjunto aberto  $V \subseteq S$  é uma correspondência  $w$ , que associa a cada  $p \in V$  um vetor  $w(p) \in T_pS$ .

Além disso, um campo de vetores é diferenciável em  $p$ , se para alguma parametrização  $X(u, v)$  em  $p$ ,  $w = aX_u + bX_v$  na base  $\{X_u, X_v\}$ , tivermos que  $a, b$  são funções diferenciáveis em  $p$ . Se  $w$  for diferenciável para todo ponto  $p \in V$ , dizemos que  $w$  é diferenciável em  $V$ .

**Definição 4.4.** Dada uma superfície  $S$ , um vetor  $v \in T_pS$  e um campo de vetores  $w$  sobre um conjunto aberto  $V \subseteq S$  contendo  $p$ . Considere uma curva parametrizada  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$ , com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ , e um campo de vetores  $w$  restrito a curva  $\alpha$ , ou seja,  $w(t)$  com  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . O vetor obtido pela projeção de  $\left(\frac{dw}{dt}\right)(0)$  sobre o plano  $T_pS$  é chamado de derivada covariante em  $p$  do campo de vetores  $w$  em relação ao vetor  $v$ .

NOTAÇÃO: Vamos denotar derivada covariante em  $p$  do campo de vetores  $w$  em relação a  $v$  por  $\left(\frac{Dw}{dt}\right)(0)$ .

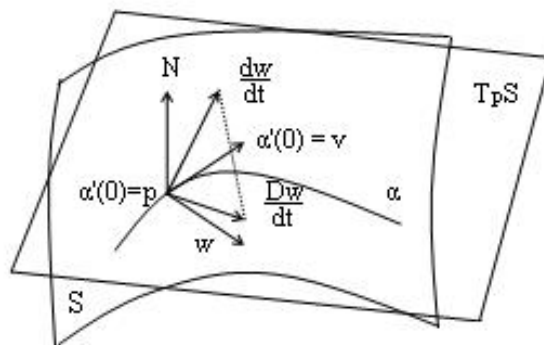


Figura 36: Derivada covariante  $\frac{Dw}{dt}$

Definimos a derivada covariante relacionada a uma curva  $\alpha$ , no entanto podemos mostrar que a derivada covariante independe da escolha de  $\alpha$  e que é um conceito da



geometria intrínseca. Vamos mostrar isso:

Considere uma parametrização  $X(u, v)$  de  $S$  em  $p$  e seja  $X(u(t), v(t))$  a expressão da curva  $\alpha$ .

Podemos escrever o campo de vetores restrito a curva  $\alpha$  como

$$\begin{aligned} w(t) &= a(u(t), v(t))X_u + b(u(t), v(t))X_v \\ &= a(t)X_u + b(t)X_v. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= a'(t)X_u + X'_u a(t) + b'(t)X_v + X'_v b(t) \\ &= a'X_u + b'X_v + a(X_{uu}u' + X_{uv}v') + b(X_{uv}u' + X_{vv}v') \end{aligned}$$

observe que ' denota a derivação em relação a  $t$ .

Vamos substituir  $X_{uu}$ ,  $X_{uv}$ ,  $X_{vv}$  pelas expressões vistas na seção 4.2:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= a'X_u + b'X_v + a(\Gamma_{11}^1 X_u u' + \Gamma_{11}^2 X_v u' + eNu' + \Gamma_{12}^1 X_u v' + \Gamma_{12}^2 X_v v' + gNv') \\ &+ b(\Gamma_{21}^1 X_u u' + \Gamma_{21}^2 X_v u' + fNu' + \Gamma_{22}^1 X_u v' + \Gamma_{22}^2 X_v v' + gNv') \\ &= X_u(a' + a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{21}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v') \\ &+ X_v(b' + a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b\Gamma_{21}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v') + N(aeu' + afv' + bfu' + bgv'). \end{aligned}$$

Como  $\frac{Dw}{dt}(0)$  é a projeção de  $\frac{dw}{dt}$  sobre o plano  $T_p S$ , temos que

$$\frac{Dw}{dt}(0) = X_u(a' + a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{21}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v') + X_v(b' + a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b\Gamma_{21}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v') \quad (1)$$

que depende apenas do vetor  $(u', v') = y$  e dos símbolos de Christoffel, não da segunda forma fundamental.

**Exemplo 4.5.** *Seja  $\Pi$  um plano, temos do exemplo 2.1 que os coeficientes da primeira forma fundamental são  $E = 1$ ,  $F = 0$  e  $G = 1$ . Com isso podemos calcular os símbolos de Christoffel, como já vimos. Fazendo os devidos cálculos, obtemos que  $\Gamma_{ij}^k = 0$ ,  $\forall i, j, k = 1, 2$ . Substituindo os símbolos de Christoffel na equação (1) obtemos que a derivada covariante é  $\frac{Dw}{dt}(0) = a'X_u + b'X_v$ .*

*Podemos notar que a derivada covariante coincide com a derivada usual de vetores no plano.*

A derivada covariante é, portanto, uma generalização da derivada usual de vetores no

plano.

Usando a equação (1) podemos definir a derivada covariante relacionada apenas a um campo de vetores que esteja definido apenas em pontos de uma curva parametrizada. Ou seja, dada uma curva  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow S$  um campo vetorial a  $\alpha$  pode ser visto como uma aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} w : I &\rightarrow T_{\alpha(t)}S \\ t &\rightarrow w(t) \in T_pS. \end{aligned}$$

Veamos algumas definições:

**Definição 4.5.** Uma curva parametrizada  $\alpha : [0, l] \rightarrow S$  é a restrição a  $[0, l]$  de uma aplicação diferenciável de  $(0 - \epsilon, l + \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ , em  $S$ . Se  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(l) = q$ , dizemos que  $\alpha$  liga  $p$  a  $q$ .

**Definição 4.6.** Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva parametrizada em  $S$ . O campo de vetores  $w$  ao longo de  $\alpha$  é diferenciável em  $t_0 \in I$  se para alguma parametrização  $X(u, v)$  em  $\alpha(t_0)$  as componentes  $a(t)$ ,  $b(t)$  de  $w(t) = aX_u + bX_v$  são funções diferenciáveis de  $t$  a  $t_0$ . O campo  $w$  é diferenciável em  $I$  se é diferenciável  $\forall t \in I$ .

**Definição 4.7.** Seja  $w$  um campo diferenciável de vetores ao longo de uma curva  $\alpha \rightarrow S$ . A expressão

$$\frac{Dw}{dt} = X_u(a' + a\Gamma_{11}^1u' + a\Gamma_{12}^1v' + b\Gamma_{21}^1u' + b\Gamma_{22}^1v') + X_v(b' + a\Gamma_{11}^2u' + a\Gamma_{12}^2v' + b\Gamma_{21}^2u' + b\Gamma_{22}^2v'), \quad (1)$$

$t \in I$  está bem definida é chamada de derivada covariante de  $w$  em  $t$ .

Então para obtermos a derivada covariante de um campo de vetores  $w$  ao longo de uma curva  $\alpha : I \rightarrow S$ , em  $t \in I$ , consideramos a derivada usual de  $w$  em relação a  $t$ ,  $\frac{dw}{dt}$ , e projetamos este vetor ortogonalmente sobre o plano  $T_{\alpha(t)}S$ .

Podemos observar que se duas superfícies são tangentes ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha$ , a derivada covariante do campo  $w$  ao longo de  $\alpha$  é a mesma para as duas superfícies.

Agora vamos considerar a curva  $\alpha$  como uma trajetória de um ponto que se move sobre uma superfície  $S$ . Sabemos que o vetor  $\alpha'(t)$  é o vetor velocidade e  $\alpha''(t)$  a aceleração desse ponto.

Logo a derivada covariante  $\frac{D\alpha'}{dt}$  do campo  $\alpha'(t)$  é a componente tangencial da aceleração  $\alpha''(t)$ , intuitivamente  $\frac{D\alpha'}{dt}$  é aceleração do ponto  $\alpha(t)$ , "como vista da superfície  $S$ ".

**Definição 4.8.** Um campo vetorial  $w$  ao longo de  $\alpha : I \rightarrow S$  é dito ser paralelo se  $\frac{Dw}{dt}(t) = 0$ .

**Exemplo 4.6.** Como vimos no exemplo anterior do plano  $\frac{Dw}{dt}(t) = a'X_u + b'X_v$ .

Se  $\frac{Dw}{dt}(t) = 0 \Rightarrow a'X_u + b'X_v = 0$ , logo  $a$  e  $b$  são constantes, ou seja, o campo  $w(t) = w_0$  constante.

Portanto, a noção de campo paralelo ao longo de uma curva parametrizada no plano, reduz-se a noção de campo paralelo ao longo da curva, ou seja, o comprimento do vetor e o ângulo que ele faz com uma direção fixa são constantes.

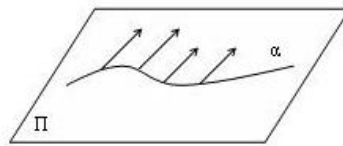


Figura 37: Campo paralelo de uma curva no plano.

No entanto, a noção de paralelismo nem sempre é intuitiva como no exemplo acima, vejamos o exemplo a seguir.

**Exemplo 4.7.** Dada uma esfera unitária  $S^2$ , o campo tangente a um meridiano parametrizado pelo comprimento de arco é um campo paralelo em  $S^2$ .

Temos que o meridiano é uma curva  $\alpha(t) = X(\theta(t), \varphi_0)$  e  $\alpha'(t) = \theta'X_\theta$ .

Também temos um campo de vetores  $w = X_\theta$ , com  $a = 1$  e  $b = 0$ .

Então pela definição de derivada covariante temos

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} &= \\ &= X_u(a' + a\Gamma_{11}^1 u' + a\Gamma_{12}^1 v' + b\Gamma_{21}^1 u' + b\Gamma_{22}^1 v') \\ &\quad + X_v(b' + a\Gamma_{11}^2 u' + a\Gamma_{12}^2 v' + b\Gamma_{21}^2 u' + b\Gamma_{22}^2 v'), \quad (1) \\ &= \theta'\Gamma_{11}^1 X_\theta + \theta'\Gamma_{11}^2 X_\varphi. \end{aligned}$$

No entanto, vimos no exemplo 4.4 que  $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$ , logo  $\frac{Dw}{dt} = 0$ .

Então o campo de vetores tangentes a um meridiano da esfera unitária é um campo paralelo. Também podemos verificar isso percebendo que a derivada usual desse campo  $w$  é normal a  $S^2$ , e assim sua derivada covariante é nula.

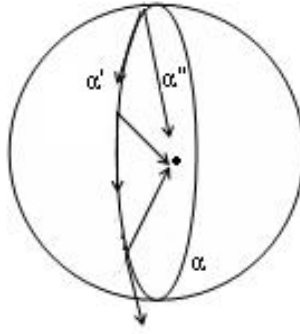


Figura 38: Campo paralelo a um meridiano da esfera unitária.

**Proposição 4.2.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva regular e sejam  $v$  e  $w$  campos de vetores paralelos ao longo de  $\alpha$ . Então  $\langle v(t), w(t) \rangle$ ,  $\|v(t)\|$ ,  $\|w(t)\|$  e o ângulo  $\theta$  entre  $v(t)$  e  $w(t)$  são constantes.*

*Demonstração.* Por hipótese  $v$  e  $w$  são paralelos, ou seja  $\frac{Dw}{dt} = \frac{Dv}{dt} = 0$ ,  $\forall t \in I$ . Isso também significa que  $\frac{dw}{dt}$  e  $\frac{dv}{dt}$  são normais ao plano que é tangente a superfície em  $\alpha(t)$ , logo  $\langle w'(t), v(t) \rangle = 0$ .

Então  $\frac{d}{dt} \langle v(t), w(t) \rangle = \langle v'(t), w(t) \rangle + \langle v(t), w'(t) \rangle = 0$ , assim obtemos que  $\langle v(t), w(t) \rangle = cte$ .

Também temos que  $\langle w'(t), w(t) \rangle = 0$  e  $\langle v'(t), v(t) \rangle = 0$ , logo

$$\frac{d}{dt} \|w\| = \frac{d}{dt} \sqrt{\langle w, w \rangle} = \frac{\langle w', w \rangle}{\sqrt{\langle w, w \rangle}} = 0,$$

assim obtemos que  $\|w\| = cte$ .

De forma análoga obtemos que  $\|v\| = cte$ .

O ângulo entre  $v$  e  $w$  é dado por  $\cos \theta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = cte$ . □

**Proposição 4.3.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva regular e  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$ . Então existe um único campo paralelo  $w$  ao longo de  $\alpha$  tal que  $w(t_0) = w_0$ .*

*Demonstração.* Um campo paralelo com estas condições tem que ser solução da equação diferencial  $\frac{Dw}{dt} = 0$  com a condição inicial  $w(t_0) = w_0$ . Analisando suas componentes

$$\frac{Dw}{dt} = \left(\frac{Dw}{dt}\right)^1 X_u + \left(\frac{Dw}{dt}\right)^2 X_v$$

e colocando  $\alpha'(t) = \alpha'^1 X_u + \alpha'^2 X_v$  temos que as componentes satisfazem ao seguinte

sistema de EDO:

$$\begin{aligned} w'^1 &= -(w^1\Gamma_{11}^1\alpha'^1 + w^1\Gamma_{12}^1\alpha'^2 + w^2\Gamma_{12}^1\alpha'^1 + w^2\Gamma_{22}^1\alpha'^2) \\ w'^2 &= -(w^1\Gamma_{11}^2\alpha'^1 + w^1\Gamma_{12}^2\alpha'^2 + w^2\Gamma_{12}^2\alpha'^1 + w^2\Gamma_{22}^2\alpha'^2). \end{aligned}$$

Pelo teorema de existência e unicidade de soluções para sistemas lineares de EDO'S temos que existe  $w(t)$  satisfazendo à equação com  $w(t_0) = w_0$ .  $\square$

A existência de um único campo paralelo  $w$  ao longo da curva  $\alpha$  com  $w(t_0) = w_0$  nos permite definir transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva parametrizada.

**Definição 4.9.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow S$  uma curva regular e  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$ , com  $t_0 \in I$ . Seja  $w$  um campo paralelo ao longo de  $\alpha$ , com  $w(t_0) = w_0$ . O vetor  $w(t_1)$ , com  $t_1 \in I$  é chamado de transporte paralelo de  $w_0$  ao longo de  $\alpha$  no ponto  $\alpha(t_1)$ .*

Se duas superfícies  $S$  e  $\bar{S}$  tangenciam-se ao longo de uma curva regular  $\alpha$ , então dado um vetor  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S = T_{\alpha(t_0)}\bar{S}$ .

De fato, pois em todos os pontos  $\alpha(t)$  temos que  $T_{\alpha(t)}S = T_{\alpha(t)}\bar{S}$  assim

$$\frac{Dw}{dt}\Big|_s = \Pi_{T_{\alpha(t)}S} \left( \frac{dw}{dt} \right) = \Pi_{T_{\alpha(t)}\bar{S}} \left( \frac{dw}{dt} \right) = \frac{Dw}{dt}\Big|_{\bar{S}}.$$

Essa propriedade é muito útil para efetuarmos transportes paralelos, vejamos um exemplo:

**Exemplo 4.8.** *Seja uma esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  orientada e seja  $C$  um paralelo da colatitude  $\varphi$ , na qual existe um vetor unitário  $w_0$  tangente a  $C$  em um ponto  $p$ .*

*Vamos determinar o transporte paralelo de  $w_0$  ao longo de  $C$ , parametrizado pelo comprimento de arco  $s$ , com  $s = 0$  em  $p$ .*

*Para isso vamos usar uma superfície tangente a esfera, nesse caso vamos usar um cone tangente a esfera ao longo de  $C$ .*

*O ângulo  $\psi$  no vertice do cone é dado por  $\psi = \left(\frac{\pi}{2}\right) - \theta_0$ .*

*O transporte paralelo de  $w_0$  ao longo de  $C$ , se resume a determinar o transporte paralelo ao longo de  $C$  relativo ao cone tangente.*

*Como já vimos, o cone menos uma geratriz é isométrico a um conjunto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , dado em coordenadas polares  $0 < \rho < \infty$ ,  $0 < \theta < 2\pi \sin \psi$ .*

Como no plano o transporte paralelo coincide com a noção usual, obtemos um deslocamento  $s$  de  $p$ , correspondendo ao ângulo central  $\theta$ , que é o ângulo orientado formado pelo vetor tangente  $t(s)$  com o transporte paralelo  $w(s)$  é dado por  $2\pi - \theta$ .

O transporte paralelo em  $\mathbb{S}^2$  ao fim de uma volta completa ao paralelo  $\varphi = \varphi_0$  faz cada vetor rodar um ângulo de  $2\pi \sin \theta_0$ .

Se uma curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow S$  é regular por partes, então o transporte paralelo ao longo de  $\alpha$  é efetuado substituindo-se o intervalo  $[a, b]$ , em subintervalos  $[a, a_1]$ ,  $[a_1, a_2]$ , ...,  $[a_i, b]$ , onde  $\alpha$  seja regular em cada um dos sub-intervalos.

Dado  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$ , o transporte paralelo é feito em cada sub-intervalo e a condição em um sub-intervalo é igual a condição inicial no outro.

### 4.3 Geodésicas

Nessa seção vamos definir um dos conceitos mais importantes da geometria diferencial, o conceito de Geodésicas.

**Definição 4.10.** Uma curva regular, não constante,  $\gamma : I \rightarrow S$  é chamada geodésica em  $t \in I$  se seu campo de vetores tangentes  $\gamma'(t)$  é paralelo ao longo de  $\gamma$  em  $t$ , isto é,  $\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0$ .

Dizemos que  $\gamma$  é uma geodésica parametrizada se é geodésica para todo  $t \in I$ .

Seja  $\gamma(s)$  uma reta parametrizada pelo comprimento de arco contida em uma superfície regular, temos que  $\|\gamma'(s)\| = 1$ , logo  $\frac{d\gamma'}{ds} = \gamma'' = 0$ , então  $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$ .

Diante disso podemos concluir que se em uma superfície existe uma reta, está será geodésica sobre a superfície.

Intuitivamente uma geodésica é o que mais se aproxima de uma "reta" sobre uma superfície. Seja uma esfera, imagine que traçamos um grande círculo na esfera e façamos com que ela role sobre o plano sem encorregar, descrevendo essa curva no plano. Podemos perceber que essa curva é uma reta, isso é uma idéia intuitiva de geodésica sobre uma superfície.

Se  $\gamma$  é uma geodésica então  $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$ , logo  $\gamma'' = \alpha N(t)$ . Além disso, se  $\gamma'' = \alpha N(t)$ ,  $\forall t \in I$ , então dados  $X_1, X_2$  base de  $T_{\gamma(t)}S$  temos que  $\langle \gamma'', X_1 \rangle = \langle \gamma'', X_2 \rangle = 0$ , logo  $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$ .

Usando isso vamos identificar geometricamente algumas geodésicas.

**Exemplo 4.9.** *Vamos mostrar que as geodésicas nas esferas são grandes círculos.*

Seja  $\gamma(s)$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco sobre a esfera  $\mathbb{S}^2$  e seja  $SPAN\{\gamma'(s_0), n(s_0)\}$ , o plano formado por  $\gamma'(s_0)$  e  $n(s_0)$  vetor normal e unitário, chamamos de plano osculador.

A aceleração  $\gamma''(s)$  só terá componente normal se  $N \in span\{\gamma''(s), n(s)\}$ . Mas se  $n \in SPAN\{\gamma''(s), n(s)\}$ , então o plano passa pelo centro da esfera.

Logo, obtemos grandes círculos intersectando a esfera com o plano que passa pelo centro da esfera, assim verificamos que as geodésicas nas esferas são grandes círculos, ou seja, circunferências de máximo diâmetro.

**Exemplo 4.10.** *Seja um cilindro reto sobre um círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .*

Podemos notar que os círculos  $\gamma$  obtidos pela intersecção do cilindro com planos normais ao eixo do cilindro são geodésicas, já que a normal principal em qualquer ponto é paralela à normal à superfície neste ponto.

De forma análoga, podemos mostrar que as geratrizes do cilindro são geodésicas.

Agora vamos encontrar outras geodésicas sobre o cilindro. Seja a seguinte parametrização,

$$X(u(t), v(t)) = (\cos u(t), \sin u(t), v(t)),$$

com  $0 < u < 2\pi$  e  $v \in \mathbb{R}$ .

Sabemos que o cilindro e o plano são localmente isométricos (exemplo 4.1), e a condição de ser geodésica é invariante por isometrias. Portanto  $X$  preserva as geodésicas, mas no plano as geodésicas são retas. Portanto, excluindo os casos já considerados, temos

$$u(t) = u_0 + at,$$

$$v(t) = v_0 + bt.$$

Então,

$$\gamma = (\cos(u_0 + at), \sin(u_0 + at), v_0 + bt)$$

$$\gamma' = (-\sin(u_0 + at)a, \cos(u_0 + at)a, b).$$

$$E \|\gamma'\|^2 = a^2 + b^2 = 1.$$

Então a curva  $\gamma$ , que é uma hélice, é uma geodésica sobre o cilindro.

Podemos observar que dados dois pontos sobre um cilindro que não estão sobre um círculo horizontal, é possível conectá-los por uma infinidade de hélices, isso significa que dois pontos de um cilindro podem em geral ser conectados por uma infinidade de geodésicas, diferentemente do que ocorre no plano.

As retas são geodésicas de um plano, também são caracterizadas como curvas regulares de curvatura zero, note que a curvatura de uma curva plana e orientada é dada pelo valor absoluto da derivada do campo de vetores unitários tangentes à curva, associado a um sinal que denota a concavidade da curva em relação a orientação do plano. Para levar em consideração o sinal, convém introduzir a seguinte definição.

**Definição 4.11.** *Seja  $w$  um campo diferenciável e unitário de vetores ao longo de uma curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$  sobre uma superfície orientada  $S$ . Como  $w(t)$ ,  $t \in I$ , é um campo de vetores unitário,  $\frac{dw}{dt}(t)$  é normal a  $w(t)$ , e portanto*

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \times w(t)).$$

O número real  $\lambda = \lambda(t)$ , denotado por  $\left[\frac{Dw}{dt}\right]$ , é chamado valor algébrico da derivada covariante de  $w$  em  $t$ .

### 4.3.1 Curvatura Geodésica

Seja  $\gamma : I \rightarrow S$  uma curva regular,  $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$  seu vetor tangente unitário,  $N(t)$  o vetor unitário normal a superfície em  $\gamma(t)$  e  $T_2 = N \times T$ .

Temos que  $\{T, N, N \times T\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  em  $\gamma(t)$  e  $\{T, N \times T\}$  é uma base orientada positivamente em  $T_{\gamma(t)}S$ .

Poderemos verificar facilmente que  $\frac{DT}{dt}$  está na direção de  $T_2$ :

$$\frac{d}{dt}\|T\|^2 = 2 \left\langle \frac{dT}{dt}, T \right\rangle = 0.$$

Mas  $\frac{dT}{dt} = aN + bT_2$ , então  $\frac{DT}{dt} = bT_2$ .

Seja o vetor  $\vec{n} = \alpha N + \beta T_2$ .



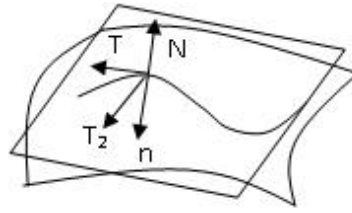


Figura 39:  $\{T, N, T_2\}$  é uma base ortonormal.

Se  $s$  é o parâmetro do comprimento de arco

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dt} = \|\gamma'\| K \vec{n} = \|\gamma'\| K(\alpha N + \beta T_2),$$

no entanto vimos que  $\frac{DT}{dt} = bT_2$ , logo  $\frac{DT}{dt} = \|\gamma''\| \beta K T_2$ .

Usando isso vamos definir curvatura geodésica.

**Definição 4.12.** Denominaremos curvatura geodésica da curva  $\gamma$  a função  $K_g(t)$ , tal que  $\frac{DT}{dt} = \|\gamma'\| K_g(t) T_2(t)$ .

**Proposição 4.4.** Se  $k$  é a curvatura da curva  $\gamma$  então  $k^2 = K_g^2 + K_n^2$ , onde  $K_g$  é a curvatura geodésica e  $K_n$  é a curvatura normal.

*Demonstração.* Temos que  $K_n = k(\alpha N + \beta T_2)$  e que  $\|n\|^2 = 1 \Rightarrow \|\alpha N + \beta T_2\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1$ .

No entanto,  $k\alpha = K_n$  e  $k\beta = K_g$ , logo  $K_n^2 + K_g^2 = k^2(\alpha^2 + \beta^2) = k^2$ .  $\square$

Da expressão  $\frac{DT}{dt} = \|\gamma'\| K_g(t) T_2(t)$ , podemos tirar que

$$K_g(t) = \frac{1}{\|\gamma'\|} \left\langle \frac{DT}{dt}, T_2 \right\rangle = \frac{1}{\|\gamma'\|} \left\langle \frac{DT}{dt}, N \times T \right\rangle = \frac{1}{\|\gamma'\|} \left\langle \frac{DT}{dt}, T_2 \right\rangle = \frac{1}{\|\gamma'\|} \left\langle \frac{dT}{dt}, N \times T \right\rangle.$$

Mas  $T = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$ , então

$$\begin{aligned} K_g(t) &= \frac{1}{\|\gamma'\|} \left\langle \frac{d}{dt} \left( \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \right), \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \times N \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\gamma'\|^2} \left\langle \frac{d}{dt} \left( \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \right), \gamma' \times N \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\gamma'\|^3} \langle \gamma'', \gamma' \times N \rangle. \end{aligned}$$

**Proposição 4.5.** A curvatura geodésica a menos de um sinal, independe da parametrização da curva.

*Demonstração.* Sejam as curvas

$$\begin{aligned}\gamma(t) &: [a, b] \rightarrow S \\ t &\rightarrow \gamma(t) \\ \Gamma(\bar{t}) &: [c, d] \rightarrow S \\ \bar{t} &\rightarrow \Gamma(\bar{t}),\end{aligned}$$

contidas em uma superfície  $S$ , tal que  $\gamma(t) = \Gamma(\bar{t})$ .

Seja  $\sigma : [d, c] \rightarrow [a, b]$  e  $\Gamma = \gamma \circ \sigma$ . Veja a figura a seguir:

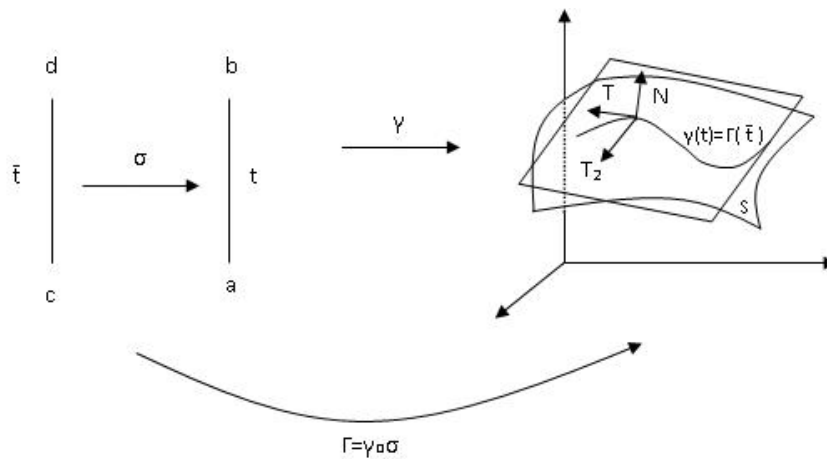


Figura 40: As aplicações  $\sigma$  e  $\Gamma$ .

Temos que  $\frac{DT}{d\bar{t}} = \|\Gamma'(\bar{t})\|K_g(\bar{t})T_2$  (1)

Por outro lado temos que

$$\frac{DT}{d\bar{t}} = \frac{DT}{dt} \frac{dt}{d\bar{t}} = \sigma'(\bar{t}) \frac{DT}{dt} \quad (2)$$

$$\|\Gamma'(\bar{t})\| = \left\| \frac{d\Gamma}{d\bar{t}} \right\| = \left\| \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{d\bar{t}} \right\| = \|\sigma'(\bar{t})\| \|\gamma'\| \quad (3)$$

Colocando (2) e (3) em (1):

$$\begin{aligned}\sigma'(\bar{t}) \frac{DT}{dt} &= \|\sigma'(\bar{t})\| \|\gamma'\| K_g(\bar{t}) T_2 \\ \sigma'(\bar{t}) \|\gamma'\| K_g(\bar{t}) T_2 &= \|\sigma'(\bar{t})\| \|\gamma'\| K_g(\bar{t}) T_2 \\ \frac{\sigma'(\bar{t})}{\|\sigma'(\bar{t})\|} K_g &= K_g(\bar{t}).\end{aligned}$$

Ou seja,  $K_g(t)$  e  $K_g(\bar{t})$  a menos de um sinal, que é dado por  $\frac{\sigma'(\bar{t})}{\|\sigma'(\bar{t})\|}$ , independe da

parametrização. □

**Proposição 4.6.** *Uma curva regular  $\gamma : I \rightarrow S$  é uma geodésica se e somente se, sua curvatura geodésica  $K_g(t) = 0, \forall t \in I$ .*

*Demonstração.* Se a curva  $\gamma$  é uma geodésica então  $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$  o que implica  $\frac{DT}{dt} = 0$ . Mas  $\frac{DT}{dt} = \|\gamma'\|K_g(t)T_2$ , logo  $K_g(t)\|\gamma'\| = 0$  e como  $\gamma$  é regular  $\|\gamma'\| \neq 0$ , ou seja,  $K_g(t) = 0$ .

Agora se  $K_g = 0$ , podemos escolher um parâmetro de comprimento de arco para a curva e  $K_g(0) = 0$ , já que a curvatura geodésica independe da parametrização da curva (proposição 4.5). Se  $\gamma$  é parametrizada pelo comprimento de arco então  $\gamma' = T$  e assim  $\frac{D\gamma'}{ds} = \frac{DT}{ds} = K_g(s)T_2 = 0$ . Portanto  $\gamma$  é uma geodésica. □

**Exemplo 4.11.** *Seja uma esfera  $S^2$  e seja um paralelo dado  $\gamma(t) = X(\theta_0, \varphi(t)) = (\sin \theta_0 \cos \varphi, \sin \theta_0 \sin \varphi, \cos \theta_0)$ .*

*Temos que  $\gamma'(t) = (-\sin \theta_0 \sin \varphi, \sin \theta_0 \cos \varphi, 0)$ ,  $N = (\sin \theta_0 \cos \varphi, \sin \theta_0 \sin \varphi, \cos \theta_0)$ , então*

$$\gamma' \times N = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin \theta_0 \sin \varphi & \sin \theta_0 \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta_0 \cos \varphi & \sin \theta_0 \sin \varphi & \cos \theta_0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \cos \theta_0 \cos \varphi \\ \sin \theta_0 \cos \theta_0 \sin \varphi \\ -\sin^2 \theta_0 \end{pmatrix}.$$

*Também temos que  $\gamma''(t) = (\sin \theta_0 \cos \varphi, \sin \theta_0 \sin \varphi, 0)$  e que*

$$\|\gamma'\| = \sqrt{\sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi} = \sin \theta_0.$$

*Logo,*

$$\langle \gamma'', \gamma' \times N \rangle = -\sin^2 \cos^2 \varphi \cos \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi \cos \theta_0 = -\sin^2 \theta_0 \cos \theta_0.$$

*Então*

$$\begin{aligned} K_g &= \frac{1}{\|\gamma'\|^3} \langle \gamma'', \gamma' \times N \rangle = -\frac{1}{\sin^3 \theta_0} \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 \\ &= -\frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \\ &= -\cot \theta_0. \end{aligned}$$

*Logo apenas o equador é uma geodésica,  $K_g(\theta_0) = 0$  se  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$*

## 5 Teorema de Gauss-Bonnet

### 5.1 Preliminares

Seja  $\Omega \subseteq S$  uma região limitada por uma curva  $\gamma : [0, L] \rightarrow S$ , simples, fechada e regular por partes, ou seja, que satisfaça as seguintes condições:

- (i)  $\gamma(0) = \gamma(L)$ , que significa que  $\gamma$  é uma curva fechada;
- (ii)  $t_1 \neq t_2$ ,  $t_1, t_2 \in [0, L]$ , então  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ , ou seja, a curva  $\gamma$  não possui autointersecções;
- (iii) Existe uma partição  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = L$  de  $[0, L]$ , tal que  $\gamma$  é diferenciável e regular em cada  $[t_i, t_{i+1}]$ , com  $i = 0, \dots, k$ . Ou seja,  $\gamma$  deixa de ter uma reta tangente em um número finito de pontos.

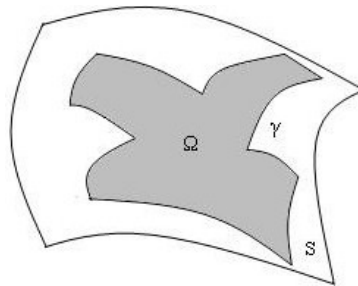


Figura 41: Região  $\Omega$  limitada pela curva  $\gamma$ .

Os pontos  $\gamma(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, k$ , são chamados vértices de  $\gamma$  e os traços  $\gamma([t_i, t_{i+1}])$  são chamados arcos regulares de  $\gamma$ , ou arestas de  $\gamma'$ .

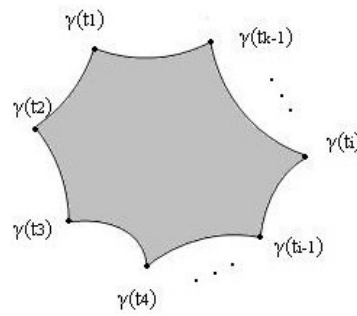


Figura 42: Vértices e arcos regulares de  $\gamma$ .

A condição de regularidade nos garante que em cada vértice  $\gamma(t_i)$  existe o limite à esquerda  $\gamma(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} \gamma'(t)$  e o limite à direita,  $\gamma(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} \gamma'(t)$ .

A curva  $\gamma = \partial\Omega$  será orientada positivamente, ou seja, a base ortonormal positiva  $\{\gamma', N \times \gamma'\}$  é tal que  $N \times \gamma'$  "aponta" para  $\Omega$ , portanto,  $\forall \beta : [a, b] \rightarrow \Omega$ , com  $\beta(a) = \gamma(t_0)$  e  $\beta'(a) \neq \gamma'(t)$ , então  $\langle \beta'(a), N \times \gamma' \rangle > 0$ . Intuitivamente, isso significa que ao andarmos pela curva  $\gamma$  na direção positiva com a cabeça apontada para  $N$ , a região  $\Omega$  está a nossa esquerda.

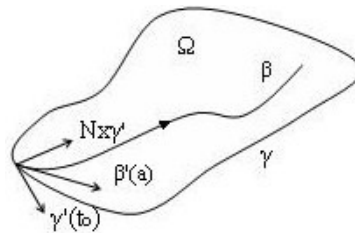


Figura 43: A curva  $\gamma$  orientada positivamente.

**Definição 5.1.** O ângulo externo  $\varphi_i$  no vértice  $\gamma(t_i)$  é o ângulo orientado de  $\gamma'(t_i^-)$  para  $\gamma'(t_i^+)$ .

Se o vértice não é uma cúspide, o sinal de  $\varphi_i$  é dado pela orientação da superfície  $S$ .

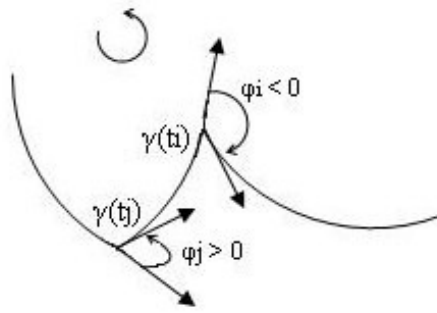


Figura 44: Sinal do ângulo externo quando o vértice não é uma cúspide.

Se  $\gamma(t_i)$  é uma cúspide, ou seja,  $|\varphi_i| = \pi$ , que significa que  $\gamma'(t_i^-) = -\gamma'(t_i^+)$ , o sinal é dado da seguinte forma:

- $\varphi_i$  é positivo se para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno o traço de  $\gamma([t_i, t_{i+\epsilon}])$  ficar do mesmo lado que  $\Omega$  em relação à curva  $\gamma([t_{i+\epsilon}, t_i])$ ;
- $\varphi_i$  é negativo se para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno o traço de  $\gamma([t_i, t_{i+\epsilon}])$  e  $\Omega$  tiverem lados opostos em relação à curva  $\gamma([t_{i-\epsilon}, t_i])$ .

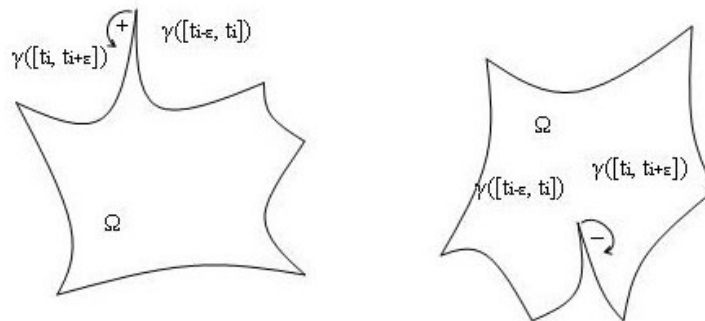


Figura 45: Sinal do ângulo externo quando o vértice é uma cúspide.

Seja ainda as funções contínuas  $\theta_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $\theta_i(t) = \arccos \left( \left\langle \gamma'(t), \frac{X_u}{\sqrt{E}}(\gamma(t)) \right\rangle \right)$ , ou seja, são funções que medem em cada  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  o ângulo positivo de  $X_u$  a  $\gamma'(t)$

**Exemplo 5.1.** *Seja uma esfera unitária e seja uma curva  $\gamma \subseteq \mathbb{S}^2$  qualquer dada por*

$$\gamma(t) = X(\theta(t), \varphi(t)), \text{ ou seja, } \gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin \theta(t) \cos \varphi(t) \\ \sin \theta(t) \sin \varphi(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix}, \text{ logo}$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \theta' - \sin \theta \sin \varphi \varphi' \\ \cos \theta \sin \varphi \theta' + \sin \theta \cos \varphi \varphi' \\ -\sin \theta \theta' \end{pmatrix}.$$

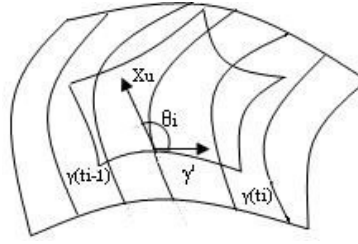


Figura 46: Ângulo positivo entre  $X_u$  e  $\gamma'(t)$ .

Temos que  $X_\theta(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \theta' \\ \cos \theta \sin \varphi \theta' \\ \sin \theta \theta' \end{pmatrix}$ , então

$$\begin{aligned} \langle \gamma', X_\theta \rangle &= \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \theta'^2 - \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \theta' + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \theta'^2 \\ &+ \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi \theta' + \sin^2 \theta \theta'^2 \cos^2 \theta \theta'^2 + \sin^2 \theta \theta'^2 \\ &= \theta'^2 \end{aligned}$$

No entanto, temos que normalizar  $\gamma'$ , logo

$$\|\gamma'\| = \sqrt{\cos^2 \theta \theta'^2 + \sin^2 \theta \varphi'^2 + \sin^2 \theta \theta'^2} = \sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta \varphi'^2}.$$

Ou seja, o ângulo

$$\tilde{\theta} = \arccos \left( \frac{\langle \gamma'(t), X_u(\gamma(t)) \rangle}{\sqrt{E}} \right) = \arccos \left( \frac{\theta'^2}{\sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta \varphi'^2}} \right) \quad (1)$$

Vamos considerar um caso particular da geodésica vertical  $\gamma(t) = (\theta(t), \varphi_0)$ , ou seja, temos  $\varphi = cte$ , logo  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi_0 \\ \sin \theta \sin \varphi_0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}$  e  $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi_0 \theta' \\ \cos \theta \sin \varphi_0 \theta' \\ -\sin \theta \theta' \end{pmatrix}$ , logo  $\|\gamma'\| = \theta'$ .

No entanto,  $\gamma$  é parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja,  $\|\gamma'\| = 1$  o que implica que  $\theta' = 1$ .

Pela forma geral (1), temos nesse caso  $\tilde{\theta} = \arccos \left( \frac{\theta'^2}{\sqrt{\theta'^2}} \right) = \arccos \theta' = 0$

Vamos considerar agora uma geodésica horizontal, temos que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$e \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \varphi' \\ \cos \varphi \varphi' \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ logo } \|\gamma'\| = \varphi', \text{ mas sabemos que } \|\gamma'\| = 1, \text{ ou seja, } \varphi' = 1.$$

Logo, o ângulo  $\tilde{\theta} = \arccos \frac{\theta'^2}{\sqrt{\theta'^2 + \sin^2 \theta \varphi'^2}} = \arccos 0$ , já que  $\theta' = 0$ , então  $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2}$  ou  $\tilde{\theta} = -\frac{\pi}{2}$ .

Vamos demonstrar em seguida o teorema do índice de rotação, mas antes disso vamos introduzir alguns conceitos e enunciar um teorema que será usado na demonstração desse teorema.

O índice de rotação  $\mathfrak{R}_\gamma$  de uma curva regular fechada  $\gamma$  é, por definição, o numero de rotação da curva  $\gamma'$ , ou seja, mede o numero de voltas orientadas que o vetor tangente  $\gamma'$  dá em torno da origem, quando percorremos a curva  $\gamma$ . Portanto, o índice de rotação fornece uma importante informação sobre o comportamento global de  $\gamma'$ , que a princípio, não tem por que ser parecido com o comportamento global de  $\gamma$ .

Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 5.2.** Seja  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva dada por  $\gamma(t) = (r \cos nt, r \sin nt)$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ . A curva  $\gamma$  representa um círculo de raio  $r$  que dá  $|n|$  voltas em torno da origem, no sentido anti-horário, se  $n > 0$  e, no sentido horário, se  $n < 0$ .

Podemos perceber que o vetor tangente  $T$  a curva  $\gamma$ , dá  $n$  voltas quando percorremos a curva  $\gamma$ . Logo o índice de rotação  $\mathfrak{R}_\gamma = n$ .

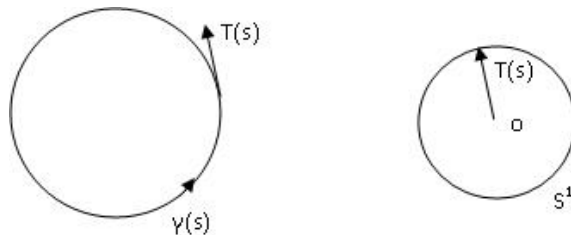


Figura 47: A curva descreve o círculo que dá  $n$  voltas em torno do seu centro e seu índice de rotação é  $n$ .

**Exemplo 5.3.** Seja uma lemniscata  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\gamma(t) = (\sin t, \sin 2t)$ .

É notável que o vetor tangente  $T$  ao longo de  $\gamma$  não percorre uma volta completa, ou seja, o índice de rotação  $\mathfrak{R}_\gamma = 0$ .



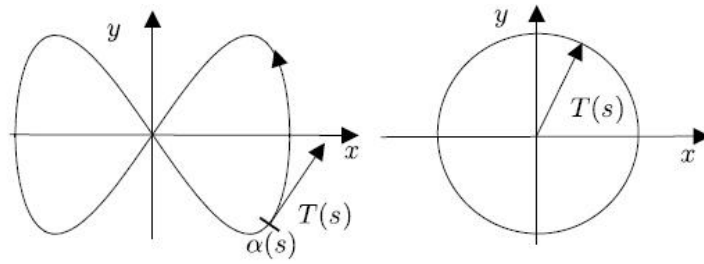


Figura 48: A lemniscata possui índice de rotação igual a zero.

Para entendermos o comportamento de  $\mathfrak{R}_\gamma$ , quando deformamos  $\gamma$ , vamos introduzir o conceito de homotopia regular:

**Definição 5.2.** *Sejam duas curvas fechadas e regulares*

$$\begin{aligned}\alpha &: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \beta &: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2,\end{aligned}$$

*são ditas regularmentes homotópicas, se existe uma aplicação  $H : [0, 1] \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que:*

- (i)  $H(\xi, t)$  é contínua em  $[0, 1] \times [0, L]$ ;
- (ii) Para cada  $\xi \in [0, 1]$ , a curva  $\alpha_\xi(t) = H(\xi, t)$ ,  $t \in [0, L]$  é uma curva fechada regular;
- (iii)  $H(0, t) = \alpha(t)$  e  $H(1, t) = \beta(t)$ .

*A aplicação  $H$  é dita uma homotopia regular entre  $\alpha$  e  $\beta$ .*

Vamos enunciar um Teorema que relaciona a homotopia regular ao índice de rotação.

**Teorema 5.1.** *Duas curvas fechadas e regulares  $\alpha, \beta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  são regularmentes homotópicas, se e somente se  $\mathfrak{R}_\alpha = \mathfrak{R}_\beta$ .*

**Exemplo 5.4.** *O índice de rotação da lemniscata  $\alpha(t) = (\sin t, \sin 2t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , é  $\mathfrak{R}_\alpha = 0$  e o índice de rotação de um círculo unitário  $\beta(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , é  $\mathfrak{R}_\beta = 1$ .*

*Usando o teorema acima, temos que a lemniscata e o círculo unitário não são homotópicos. Podemos observar isso geometricamente, vejamos a figura abaixo:*

*Não é possível eliminar o laço a esquerda da curva acima, usando uma sequência de deformações, uma vez que o vetor tangente ao longo desse laço muda muito de direção, independente do tamanho do laço.*

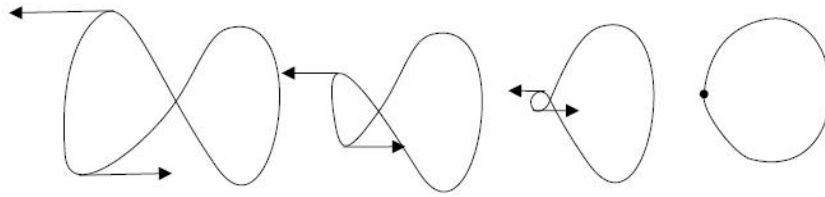


Figura 49: A lemniscata e o círculo não são homotópicos.

**Teorema 5.2** (Teorema do Índice de Rotação). *Seja  $\beta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular, fechada e simples. Então  $\mathfrak{R}_\beta = \pm 1$ .*

*Demonstração.* Seja uma reta que não intersecta a curva  $\beta$  e deslocamos essa reta paralelamente a si mesma até que ela seja tangente à curva em um ponto  $p$ .

Vamos escolher agora uma nova parametrização  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  para a curva  $\beta$  de forma que  $\gamma(0) = p$  e definir um sistema de coordenadas tal que  $p = (0, 0)$  e  $T = (1, 0) = e_1$ .

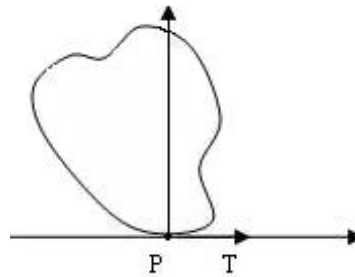


Figura 50: Deslocamento da curva  $\beta$ .

Como  $\gamma$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, podemos reescrever o vetor tangente  $T$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T(s) &= (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) \\ T'(s) &= (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))\theta'(s) = N(s)\theta'(s). \end{aligned}$$

Então  $k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \theta'(s)$ .

Logo,  $\int_0^L k(s)ds = \int_0^L \theta'(s)ds = \theta(L) - \theta(0) = 2\pi I$ , onde  $I$  é o índice da curva  $T$ .

A idéia agora é deformar a curva  $T$ , que a princípio, é complicada, até uma curva  $T_1$ , cujo número de rotação seja fácil de determinar.

Seja um triângulo  $\Delta = \{(t, s) \in [0, L] \times [0, L] : 0 \leq t \leq s \leq L\}$ , e seja a seguinte

aplicação  $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por

$$\begin{cases} \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{\|\gamma(t) - \gamma(s)\|}, & s < t \text{ e } (t, s) \neq (L, 0) \\ T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, & t = s; \\ -T(0) = -\frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|}, & (t, s) = (L, 0). \end{cases}$$

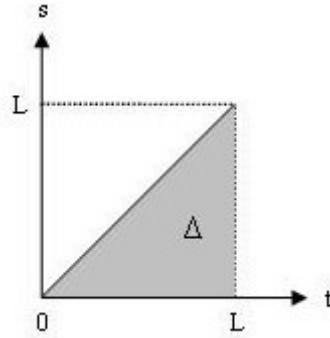


Figura 51: O triângulo  $\Delta$ .

Vamos verificar a continuidade de  $F$ .

Como a curva  $\gamma$  é regular, vê-se facilmente que no interior do triângulo  $\Delta$ ,  $F$  é contínua. No entanto, não sabemos se  $F$  é contínua nos pontos da diagonal e em  $(L, 0)$ .

Vamos verificar a continuidade nos pontos  $(a, a)$  na hipotenusa de  $\Delta$ . Seja uma sequência  $(t_n, s_n)$  no interior do triângulo convergindo para  $(a, a)$ , temos que  $F(t_n, s_n) = \frac{\gamma(t_n) - \gamma(s_n)}{\|\gamma(t_n) - \gamma(s_n)\|}$ , aplicando o teorema do valor médio a cada um das funções coordenadas  $x$ ,  $y$  de  $\gamma$ , temos que existem  $s_n < \xi_n < t_n$  e  $s_n < \eta_n < t_n$ , tais que

$$\begin{aligned} \gamma(t_n) - \gamma(s_n) &= (x(t_n) - x(s_n), y(t_n) - y(s_n)) = (x'(\xi_n)(t_n - s_n), y'(\eta_n)(t_n - s_n)) \\ &= \frac{(x'(\xi_n), y'(\eta_n))}{\sqrt{(x'(\xi_n))^2 + (y'(\eta_n))^2}}. \end{aligned}$$

Visto que,  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a$ ,  $s_n < \xi_n < t_n$  e  $s_n < \eta_n < t_n$ , usando o teorema do confronto temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = a$ .

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n, s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x'(\xi_n), y'(\eta_n))}{\sqrt{(x'(\xi_n))^2 + (y'(\eta_n))^2}} = \frac{(x'(a), y'(a))}{\sqrt{(x'(a))^2 + (y'(a))^2}} = T(a) = F(a, a).$$

Portanto,  $F$  é contínua nos pontos  $(a, a)$ .

Vamos verificar agora a continuidade nos pontos  $(L, 0)$ .

Seja uma curva  $\bar{\gamma} : [0, 2L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t), & 0 \leq t \leq L \\ \gamma(t-L), & L \leq t \leq 2L \end{cases}$ .

Tomamos uma sequência  $(t_n, s_n) \rightarrow (L, 0)$ , definamos  $\xi_n = t_n$ , com  $\xi < \eta_n$  e  $\eta_n = L + s_n$ , com  $(t_n, s_n) \neq (L, 0)$ .

Note que  $\xi_n < \eta_n$  e que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = L \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} L + s_n = L \end{aligned}$$

Como  $\bar{\gamma}(\xi_n) = \gamma(t_n)$  e  $\bar{\gamma}(\eta_n) = \gamma(\eta_n - L) = \gamma(s_n)$ , temos que

$$\begin{aligned} F(t_n, s_n) &= \frac{\gamma(t_n) - \gamma(s_n)}{\|\gamma(t_n) - \gamma(s_n)\|} = \frac{\bar{\gamma}(\xi_n) - \bar{\gamma}(\eta_n)}{\|\bar{\gamma}(\xi_n) - \bar{\gamma}(\eta_n)\|} = -\frac{\bar{\gamma}(\eta_n) - \bar{\gamma}(\xi_n)}{\|\bar{\gamma}(\eta_n) - \bar{\gamma}(\xi_n)\|} \\ &= -\frac{x'(\lambda_n), y'(\mu_n)}{\sqrt{(x'(\lambda_n))^2 + (y'(\mu_n))^2}} \end{aligned}$$

para  $\xi < \lambda_n < \eta_n$  e  $\xi_n < \mu_n < \eta_n$ .

Sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = L$ , além disso  $\xi_n < \lambda_n < \eta_n$  e  $\xi_n < \mu_n < \eta_n$ . Então, usando o teorema do confronto temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = L$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F(t, s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{x'(\lambda_n), y'(\mu_n)}{\sqrt{(x'(\lambda_n))^2 + (y'(\mu_n))^2}} = -\frac{x'(L), y'(L)}{\sqrt{(x'(L))^2 + (y'(L))^2}} \\ &= -T(L) = -T(0) = F(L, 0). \end{aligned}$$

Portanto,  $F$  é contínua nos pontos  $(L, 0)$  e assim, contínua em todos os pontos do triângulo  $\Delta$ .

Vamos utilizar a função  $F$  para obter uma deformação de  $T$  para um curva  $T_1$ , para a qual o numero de rotação seja mais fácil de calcular.

Considerando as curvas  $D_0$  e  $D_1$ , respectivamente, a hipotenusa e os catetos de  $\Delta$ ,

dadas por:

$$\begin{aligned}
 D_0 : [0, L] &\rightarrow \Delta \\
 t &\rightarrow (t, t) \\
 D_1 : [0, L] &\rightarrow \Delta \\
 t &\rightarrow \begin{cases} (2t, 0), & 0 \leq t \leq \frac{L}{2}; \\ (L, 2t - L), & \frac{L}{2} \leq t \leq L. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Defina a curva  $D_\lambda : [0, L] \rightarrow \Delta$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , por  $D_\lambda(t) = (1 - \lambda)D_0(t) + \lambda D_1(t)$ .

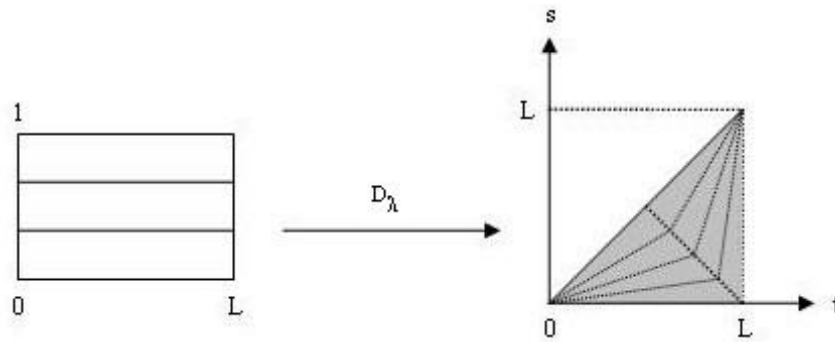


Figura 52: A aplicação  $D_\lambda$ .

Considere a aplicação  $H : [0, 1] \times [0, L] \rightarrow \Delta$ , dada por  $H(\lambda, t) = F \circ D_\lambda(t)$ .

Vamos mostrar que  $H$  é uma homotopia regular entre  $T$  e  $T_1$ , com  $T_1(t) = H(1, t)$ , em  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

Primeiramente podemos notar que  $H$  é contínua, pois é a composição de funções contínuas.

Além do mais em cada  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $H(\lambda, t)$  é uma curva regular, se  $\lambda = 0$ ,

$$H(0, t) = F(t, t) = T(t)$$

e se  $\lambda = 1$ ,

$$T_1(t) = H(1, t) = \begin{cases} F(2t, 0), & 0 \leq t \leq \frac{L}{2} \\ F(L, 2t - L), & \frac{L}{2} \leq t \leq L. \end{cases}$$

Ou ainda,

$$H(1, t) = \begin{cases} \frac{\gamma(2t)}{\|\gamma(2t)\|}, & 0 \leq t \leq \frac{L}{2} \\ -T(0), & t = \frac{L}{2} \\ -\frac{\gamma(2t-L)}{\|\gamma(2t-L)\|}, & \frac{L}{2} < t \leq L. \end{cases}$$

e para  $0 < \lambda < 1$ ,  $H(\lambda, t) = F(\lambda, t) = F(D_\lambda(t))$ .

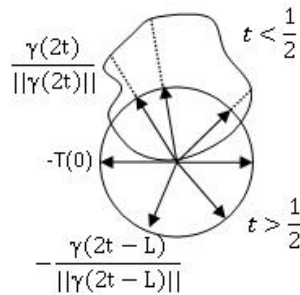
Agora verificaremos o índice de rotação da curva  $T_1$ , se  $t \in [0, \frac{L}{2}]$ , então

$$H = F \circ D_1(t) = F(2t, 0) = \frac{\gamma(2t) - \gamma(0)}{\|\gamma(2t) - \gamma(0)\|} = \frac{\gamma(2t)}{\|\gamma(2t)\|}.$$

E se  $t \in [\frac{L}{2}, L]$ , então

$$H = F \circ D_1(t) = F(L, 2t - L) = \frac{\gamma(L) - \gamma(2t - L)}{\|\gamma(L) - \gamma(2t - L)\|} = -\frac{\gamma(2t - L)}{\|\gamma(2t - L)\|}.$$

Portanto, a curva  $T_1$  dá uma volta completa em torno da origem, logo  $I(F \circ D_1) = 1$ , mas  $I(F \circ D_1) = I(F \circ D_0) = I(T) = I(\gamma) = 1$ . Portanto,  $\int_0^L k(s)ds = 2\pi$ .



□

Sejam  $\gamma \subseteq X(U)$  e  $\beta = X^{-1} \circ \gamma \subseteq U$  curvas simples e fechadas, cuja parametrização  $X$  preserva a orientação.

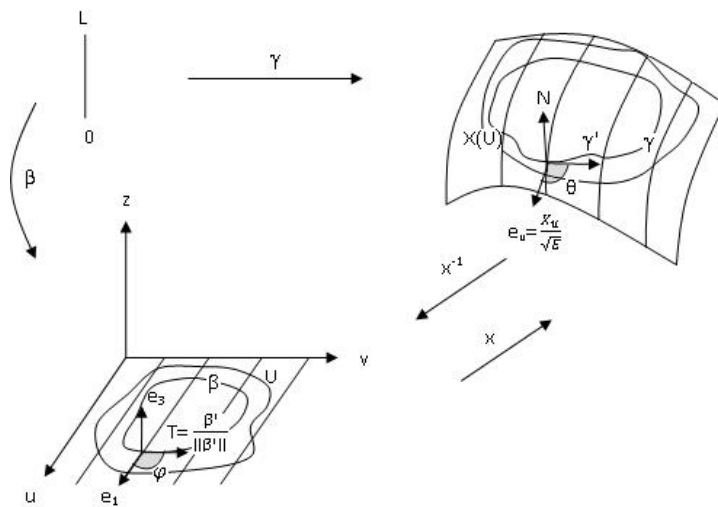


Figura 53: A aplicação  $X$  preserva a orientação.

Temos que as bases  $(e_1, \frac{\beta'}{\|\beta'\|}, e_3)$  e  $(e_u, \gamma', N)$  possuem a mesma orientação, logo  $\forall s \in [0, L]$  temos que  $|\varphi(s) - \theta(s)| < \pi$ , caso contrário, essas bases não teriam a mesma orientação.

Além disso, como  $\beta$  é simples e fechada  $\varphi(L) - \varphi(0) = 2\pi$ .

Vamos analisar a seguinte diferença:

$$\begin{aligned} ||\theta(L) - \theta(0)| - 2\pi| &= ||\theta(L) - \theta(0)| - |\varphi(L) - \varphi(0)|| \leq |\theta(L) - \theta(0) - (\varphi(L) - \varphi(0))| \\ &= |(\theta(L) - \varphi(L)) - (\theta(0) - \varphi(0))| \leq |\theta(L) - \varphi(L)| + |\theta(0) - \varphi(0)| \\ &< 2\pi. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \theta &: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \\ \Pi \circ \theta &: [0, L] \rightarrow \mathbb{S}^1 \end{aligned}$$

e  $\Pi \circ \theta(0) = \Pi \circ \theta(L)$ . Logo,  $\theta(L) - \theta(0) = 2I\pi$ , com  $I \in \mathbb{Z}$ .

Mas, pelo cálculo acima e  $\theta(L) - \theta(0) = 2I\pi$ , então  $\theta(L) - \theta(0) = 2\pi$ .

Seja  $\gamma : [0, L] \rightarrow S$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, simples, fechada e regular por partes, onde  $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_n = L$  são seus vértices.

Vamos aproximar  $\gamma$  por curvas  $\gamma_\epsilon : [0, L_\epsilon] \rightarrow S$ ,  $\epsilon > 0$ , tal que:

- $\gamma_\epsilon$  é de classe  $\mathbb{C}^2$ ;
- $\gamma_\epsilon$  é parametrizada pelo comprimento de arco, fechada, simples e com a mesma orientação de  $\gamma$ ;
- $\exists [a_i, b_i] \subseteq [0, L_\epsilon]$  sub-intervalos tal que  $\gamma_\epsilon|_{[a_i, b_i]} = \gamma|_{[a_i, b_i]}$
- $|L - L_\epsilon| < \epsilon$

Como vimos,  $\theta_\epsilon(L) - \theta_\epsilon(0) = 2\pi$ , logo

$$\theta_\epsilon(L) - \theta_\epsilon(b_k) + \underbrace{\theta_\epsilon(b_k) - \theta_\epsilon(a_k)} + \underbrace{\theta_\epsilon(a_k) - \theta_\epsilon(b_{k-1})} + \dots + \underbrace{\theta_\epsilon(b_1) - \theta_\epsilon(a_1)} + \theta_\epsilon(a_1) - \theta_\epsilon(0) = 2\pi$$

Escrevendo como um somatório:

$$\theta_\epsilon(L) - \theta_\epsilon(b_k) + \theta_\epsilon(a_1) - \theta_\epsilon(0) + \sum_{i=1}^k \theta_\epsilon(b_i) - \theta_\epsilon(a_i) + \sum_{i=2}^k \theta_\epsilon(a_i) - \theta_\epsilon(b_{i-1}) = 2\pi \quad (5.1)$$

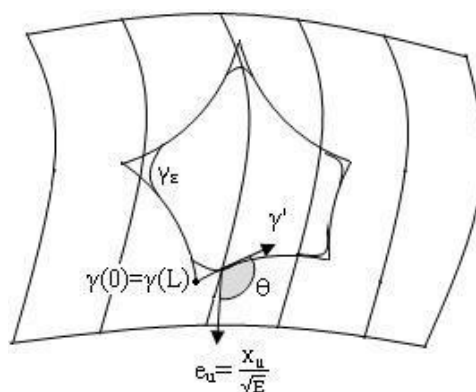
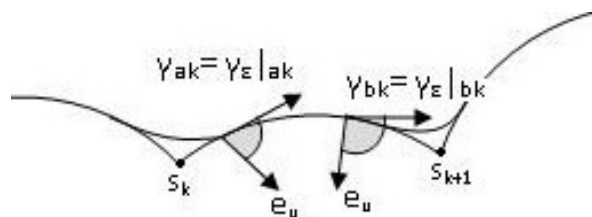


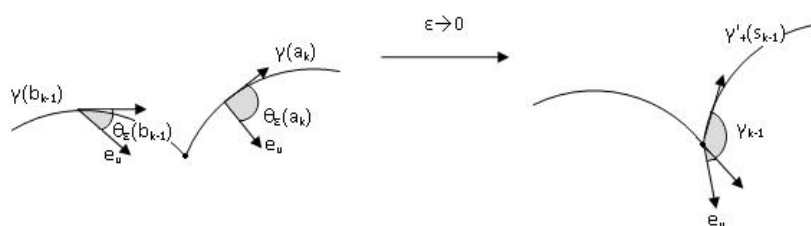
Figura 54: A curva  $\gamma_\epsilon$ .

Vamos analisar os termos da expressão acima, observe que:

- No limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\theta_\epsilon(L) - \theta_\epsilon(b_k) + \theta_\epsilon(a_1) - \theta_\epsilon(0) = \gamma_k = \gamma_0$ .

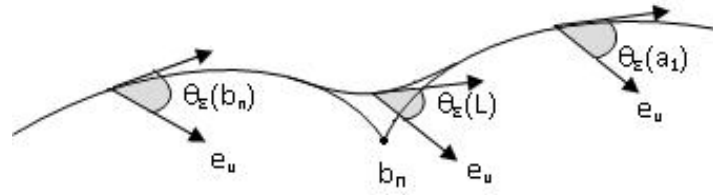


- No limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\theta_\epsilon(b_i) - \theta_\epsilon(a_i) = \theta(s_i) - \theta(s_{i-1})$ .



- No limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\theta_\epsilon(a_i) - \theta_\epsilon(b_{i-1}) = \gamma_{i-1}$





Voltando a expressão (5.1), temos

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i + \sum_{i=1}^k \theta(s_i) - \theta(s_{i-1}) = 2\pi \quad (5.2)$$

Agora vamos demonstrar um lema que será usado na demonstração do teorema de Gauss-Bonnet (versão local).

**Lema 5.1.** *Seja  $\gamma(s)$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco,  $w(s)$  um campo vetorial paralelo unitário ao longo de  $\gamma$  e  $\varphi$  o ângulo entre  $\gamma'(s)$  e  $w(s)$ , então  $\varphi'(s) = -K_g(s)$ .*

*Demonstração.* Temos que  $\{T, T_2 = N \times T\}$  é uma base ortonormal positiva em  $T_{\gamma(s)}S$ , logo podemos escrever  $w$  nessa base  $w = \cos \varphi T + \sin \varphi T_2$ . Como  $w$  é um campo paralelo,  $\frac{Dw}{ds} = 0$ , então

$$\frac{Dw}{ds} = -\sin \varphi \varphi' T + \cos \varphi \frac{DT}{ds} + \cos \varphi \varphi' T_2 + \sin \varphi \frac{DT_2}{ds} \quad (5.3)$$

Temos que  $\langle T, T \rangle = 1$  e assim  $\langle \frac{DT}{ds}, T \rangle = 0$ , então  $\frac{DT}{ds} = \alpha(s) T_2$ , mas  $\|\gamma'\| = 1$ , sendo assim  $\alpha(s) = K_g$ , já que  $\frac{DT}{ds} = \|\gamma'\| K_g T_2$ .

Da mesma forma  $\langle T_2, T_2 \rangle = 1$  e  $\langle \frac{DT_2}{ds}, T_2 \rangle = 0$ , então  $\frac{DT_2}{ds} = \beta(s) T$ .

No entanto, temos que  $\langle T, T_2 \rangle = 0$ , derivando

$$\left\langle \frac{DT}{ds}, T_2 \right\rangle + \left\langle T, \frac{DT_2}{ds} \right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{DT}{ds}, T_2 \right\rangle = - \left\langle T, \frac{DT_2}{ds} \right\rangle = -K_g.$$

Substituindo em (5.3):

$$-\sin \varphi \varphi' T + \cos \varphi K_g T_2 + \cos \varphi \varphi' T_2 - \sin \varphi K_g T = 0$$

$$(\varphi' + K_g)(\cos \varphi T_2 - \sin \varphi T) = 0$$

$$\varphi' = -K_g.$$

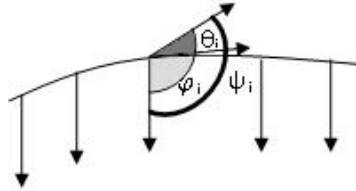
□

## 5.2 Teorema de Gauss-Bonnet (Versão Local)

**Teorema 5.3** (Teorema de Gauss-Bonnet(versão local)). *Seja  $\Omega$  uma região delimitada por uma curva simples, parametrizada pelo comprimento de arco e regular por partes. Sejam  $\gamma_i (i = 1, \dots, K)$  os ângulos externos de  $\Omega$ . Então*

$$\int_{\Omega} K dA + \int_{\partial\Omega} K_g(s) ds + \sum_{i=1}^k \gamma_i = 2\pi.$$

*Demonstração.* Seja  $w$  um campo de vetores unitários paralelo ao longo de  $\gamma = \partial\Omega$ ,  $\varphi(s)$ , com  $s \in (s_{i-1}, s_i)$ , são os ângulos entre  $\gamma'(s)$  e  $w(s)$  neste intervalo,  $\theta_i(s)$  ângulo entre  $\frac{X_u}{\sqrt{E}}$  e  $\gamma'(s)$  neste intervalo. Vamos definir  $\psi(s)$  como o ângulo entre  $\frac{X_u}{\sqrt{E}}$  e  $w(s)$ .



Observando a figura acima temos que  $\theta_i(s) = \psi(s) - \varphi(s)$ .

Usando a expressão (2),

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i + \sum_{i=1}^k \psi(s_i) - \psi(s_{i-1}) - \sum_{i=1}^k \varphi(s_i) - \varphi(s_{i-1}) = 2\pi.$$

Mas,  $\varphi(s_i) - \varphi(s_{i-1}) = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \varphi'(s) ds = - \int_{s_{i-1}}^{s_i} K_g ds$ , lema anterior.

Podemos observar que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \psi(s_i) - \psi(s_{i-1}) &= \psi(s_1) - \psi(0) + \psi(s_2) - \psi(s_1) + \psi(s_3) \\ &\quad - \psi(s_2) + \dots + \psi(L) - \psi(s_{k-1}) \\ &= \psi(L) - \psi(0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \gamma_i + \psi(L) - \psi(0) + \sum_{i=1}^k \int_{s_{i-1}}^{s_i} K_g ds &= 2\pi \\ \sum_{i=1}^k \gamma_i + \psi(L) - \psi(0) + \int_0^L K_g ds &= 2\pi \end{aligned}$$

Agora, basta mostrarmos que  $\psi(L) - \psi(0) = \int_{\Omega} K dA$ .

Sabemos que  $\psi(s)$  é o ângulo entre  $\frac{X_u}{\sqrt{E}}$  e  $w$ . Sejam  $v_1 = \frac{X_u}{\sqrt{E}}$  e  $v_2 = N \times V_1$ , temos que  $\{v_1, v_2\}$  é uma base ortonormal positiva em  $T_{\gamma(s)}S$ , logo podemos escrever  $w = \cos \psi v_1 + \sin \psi v_2$ .

De  $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$ , temos que  $\langle \frac{Dv_1}{ds}, V_1 \rangle = \langle \frac{dv_1}{ds}, v_1 \rangle$ , portanto,  $\frac{Dv_1}{ds} = av_2$ . Analogamente,  $\langle \frac{Dv_2}{ds}, v_2 \rangle = \langle \frac{dv_2}{ds}, v_2 \rangle = 0$  e  $\frac{Dv_2}{ds} = \bar{a}v_1$ .

Derivando  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ , temos  $\langle v_1', v_2 \rangle + \langle v_1, v_2' \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_1', v_2 \rangle = - \langle v_1, v_2' \rangle$ , mas  $v_1' = \frac{dv_1}{ds} = av_2 + bN$ , então

$$\langle v_1', v_2 \rangle = \langle av_2 + bN, v_2 \rangle \Rightarrow \langle v_1', v_2 \rangle = a.$$

Logo,

$$\frac{Dv_1}{ds} = \langle v_1', v_2 \rangle v_2.$$

Também temos que  $v_2' = \frac{dv_2}{ds} = \bar{a}v_1 + \bar{b}N$ , então

$$\langle v_1, v_2' \rangle = \langle v_1, \bar{a}v_1 + \bar{b}N \rangle \Rightarrow \langle v_1, v_2' \rangle = \bar{a}.$$

Portanto,

$$\frac{Dv_2}{ds} = - \langle v_1', v_2 \rangle v_1.$$

Como  $w$  é um campo paralelo  $\frac{Dw}{ds} = 0$ , então

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{ds} &= -\sin \psi \psi' v_1 + \cos \psi \frac{Dv_1}{ds} + \cos \psi \psi' v_2 + \sin \psi \frac{Dv_2}{ds} \\ &= -\sin \psi \psi' v_1 + \cos \psi \langle v_1', v_2 \rangle v_2 + \cos \psi \psi' v_2 + \sin \psi \langle v_1', v_2 \rangle v_1 \\ &= (\psi' + \langle v_1', v_2 \rangle)(\cos \psi v_2 - \sin \psi v_1) = 0, \end{aligned}$$

sendo assim,  $\psi' = - \langle v_1', v_2 \rangle$ .

Temos que

$$\begin{aligned} \psi(L) - \psi(0) &= \int_0^L \psi'(s) ds = - \int_0^L \langle v_1', v_2 \rangle ds \\ &= - \int_0^L \left( \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial u}, v_2 \right\rangle u' + \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial v}, v_2 \right\rangle v' \right) dudv. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Green,

$$\begin{aligned}\psi(L) - \psi(0) &= - \iint_{X^{-1}(\Omega)} \left( \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial v}, v_2 \right\rangle - \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial u}, v_2 \right\rangle \right) \\ &= \iint_{X^{-1}(\Omega)} \left( \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial u}, \frac{\partial v_2}{\partial v} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial v}, \frac{\partial v_2}{\partial u} \right\rangle \right),\end{aligned}$$

no entanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial u} &= \alpha v_2 + \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial u}, N \right\rangle N \\ \frac{\partial v_2}{\partial v} &= \beta v_1 + \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial v}, N \right\rangle N.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial v_1}{\partial u}, \frac{\partial v_2}{\partial v} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial u}, N \right\rangle \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial v}, N \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial v}, \frac{\partial v_2}{\partial u} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial v}, N \right\rangle \left\langle \frac{\partial v_2}{\partial u}, N \right\rangle.\end{aligned}$$

Note que,  $N = v_1 \times v_2$  e  $\langle N, v_1 \rangle = 0$ , então

$$\langle N_u, v_1 \rangle + \left\langle N, \frac{\partial v_1}{\partial u} \right\rangle = 0 \Rightarrow \langle N_u, v_1 \rangle = - \left\langle N, \frac{\partial v_1}{\partial u} \right\rangle,$$

e  $\langle N, v_2 \rangle = 0$ , logo

$$\langle N_u, v_2 \rangle + \left\langle N, \frac{\partial v_2}{\partial u} \right\rangle = 0 \Rightarrow \langle N_u, v_2 \rangle = - \left\langle N, \frac{\partial v_2}{\partial u} \right\rangle.$$

Mas

$$N_u = \langle N_u, v_1 \rangle v_1 + \langle N_u, v_2 \rangle v_2 = - \left\langle N, \frac{\partial v_1}{\partial u} \right\rangle v_1 - \left\langle N, \frac{\partial v_2}{\partial u} \right\rangle v_2,$$

analogamente,

$$N_v = \langle N_v, v_1 \rangle v_1 + \langle N_v, v_2 \rangle v_2 = - \left\langle N, \frac{\partial v_1}{\partial v} \right\rangle v_1 - \left\langle N, \frac{\partial v_2}{\partial v} \right\rangle v_2.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}N_u \times N_v &= \left\langle N, \frac{\partial v_1}{\partial u} \right\rangle \left\langle N, \frac{\partial v_2}{\partial v} \right\rangle N - \left\langle N, \frac{\partial v_2}{\partial u} \right\rangle \left\langle N, \frac{\partial v_1}{\partial v} \right\rangle N \\ &= \left( \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial u}, \frac{\partial v_2}{\partial v} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial v}, \frac{\partial v_2}{\partial u} \right\rangle \right) N.\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \langle N, N_u \times N_v \rangle &= \langle N, K(X_u \times X_v) \rangle \\ &= \langle N, K\sqrt{EG - F^2}N \rangle \\ &= K\sqrt{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\langle N, N_u \times N_v \rangle = \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial u}, \frac{\partial v_2}{\partial v} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial v}, \frac{\partial v_2}{\partial u} \right\rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \psi(L) - \psi(0) &= \iint_{X^{-1}(\Omega)} \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial u}, \frac{\partial v_2}{\partial v} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial v_1}{\partial v}, \frac{\partial v_2}{\partial u} \right\rangle dudv \\ &= \iint_{X^{-1}(\Omega)} K\sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= \iint_{\Omega} K dA. \end{aligned}$$

Com isso mostramos que

$$\int_{\Omega} K dA + \int_{\partial\Omega} K_g(s) ds + \sum_{i=1}^k \gamma_i = 2\pi.$$

□

Nesse trabalho não iremos demonstrar a globalização do teorema de Gauss-Bonnet, iremos apenas apresentar alguns conceitos topológicos e proposições que são usadas na demonstração deste teorema.

Vamos considerar uma superfície  $S$  regular. Dizemos que uma região conexa  $\Omega \subseteq S$  é regular se  $\Omega$  é compacta e a sua fronteira  $\partial\Omega$  é uma região finita de curvas regulares por partes fechadas e simples que não se intersectam.

Por conveniência, vamos considerar uma superfície compacta como uma região regular, cuja fronteira é o conjunto vazio.

Vejamos algumas definições:

**Definição 5.3.** *Uma região simples que tem apenas três vértices com ângulos externos  $\gamma_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  é um triângulo.*

**Definição 5.4.** *Uma triangulação de uma região regular  $\Omega \subseteq S$  é uma família finita  $T$*

de regiões  $\Delta_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tais que:

(i)  $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ ;

(ii) Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , a curva  $\partial\Delta_i$  tem três vértices. Aos arcos de curvas compreendidos entre 2 vértices consecutivos denominamos arestas e as regiões  $\Delta_i$  são denominados faces da triangulação;

(iii) Se  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , então  $\Delta_i \cap \Delta_j$  pode ser uma das três coisas: ou  $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$  ou tem um vértice em comum ou uma aresta em comum.

Dada uma triangulação  $T$  de uma região  $\Omega \subseteq S$  de uma superfície  $S$ , denotaremos por  $V$ ,  $A$  e  $F$ , aos números de vértices, arestas e faces, respectivamente.

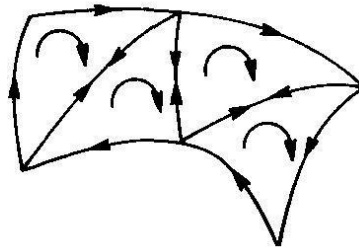
**Definição 5.5.** O numero  $F - E + V = \chi$  é chamado característica de Euler-Poincaré da triangulação.

As proposições abaixo serão apresentadas sem demonstração.

**Proposição 5.1.** Toda região regular de uma superfície regular admite uma triangulação.

O resultado seguinte mostra que podemos obter uma triangulação de uma região  $\Omega$  de  $S$  em que cada triângulo está contido em uma vizinhança coordenada.

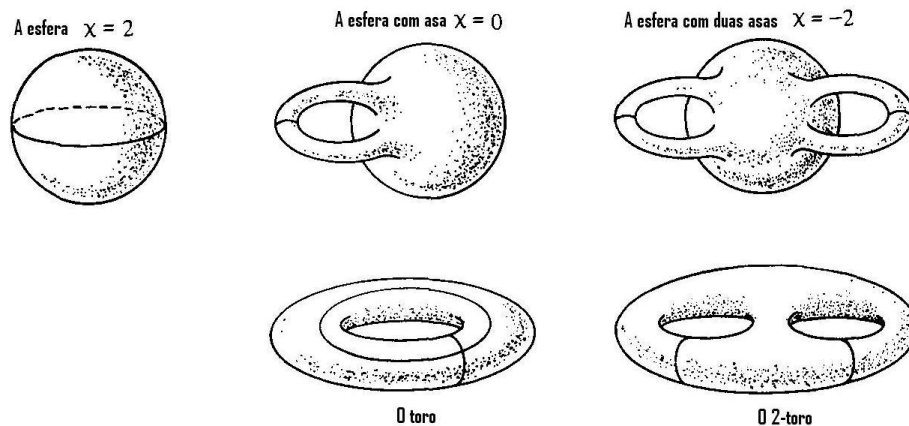
**Proposição 5.2.** Seja  $S$  uma superfície orientada e  $\{x_\alpha\}$ ,  $\alpha \in A$ , uma família de parametrizações compatíveis com a orientação de  $S$ . Seja  $\Omega \subseteq S$  uma região regular de  $S$ . Então existe uma triangulação  $T$  de  $\Omega$  tal que todo triângulo  $\Delta \in T$  está contido em uma vizinhança coordenada da família  $\{x_\alpha\}$ . Além disso, se a fronteira de todo triângulo de  $\Delta$  for orientada positivamente, triangulos adjacentes determinam orientações opostas na aresta comum a eles.



**Proposição 5.3.** *Se  $\Omega \subseteq S$  é uma região regular de uma superfície  $S$ , a característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação de  $\Omega$ . Vamos denotá-lo por  $\chi(\Omega)$ .*

A proposição anterior mostra que a característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico de uma região regular  $R$ . Este fato possibilita uma classificação topológica das superfícies compactas em  $\mathbb{R}^3$ .

Um cálculo direto mostra que a característica de Euler-Poincaré da esfera é 2, a do toro (esfera com uma alça) é zero, a do bi-toro (esfera com duas alças) é  $-2$ , em geral a de um  $n$ -toro (esfera com  $n$  alças) é  $-2(n - 1)$ .



A proposição abaixo mostra que esta é a "lista topológica" de todas as superfícies compactas em  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 5.4.** *Seja  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  uma superfície compacta e conexa. Então um dos valores  $2, 0, -2, \dots, -2n, \dots$  é assumido pela característica de Euler-Poincaré  $\chi(S)$ . Além disto, se  $S' \subseteq \mathbb{R}^3$  é uma outra superfície compacta, conexa e orientável  $\chi(S) = \chi(S')$ , então  $S$  é homeomorfa a  $S'$ .*

Este é o teorema de classificação de superfícies compactas conexas e orientáveis.

Em outras palavras, toda superfície compacta e conexa  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  é homeomorfa a uma esfera com um número  $g$  de alças. O número

$$g = \frac{2 - \chi(S)}{2}$$

é chamado o gênero de  $S$ .

Vamos considerar uma região  $\Omega \subseteq S$  regular de uma superfície orientada e seja  $\tau$  uma triangulação de  $\Omega$  tal que todo triângulo de  $T_j \in \tau$ ,  $j = 1, \dots, k$  esteja contido em

uma vizinhança coordenada  $X_j(U_j)$  de uma família de parametrizações  $\{X_\alpha\}$ ,  $\alpha \in A$ , compatíveis com a orientação de  $S$ . Seja  $f$  uma função diferenciável em  $S$ .

A proposição a seguir mostra que faz sentido falar sobre a integral de  $f$  sobre a região  $\Omega$ .

**Proposição 5.4.** *Com a notação acima, a soma*

$$\sum_{j=1}^k \iint_{X_j^{-1}(T_j)} f(u_j, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2} du_j dv_j$$

*não depende da triangulação  $\tau$  nem da família  $\{X_\alpha\}$  de parametrizações de  $S$ .*

Essa soma tem um significado geométrico e é chamada a integral de  $f$  sobre a região regular  $\Omega$ . É comum denotá-la por  $\iint_{\Omega} f d\sigma$ .

Com as definições e os resultados podemos enunciar o teorema de Gauss-Bonnet Global.

**Teorema 5.5** (Teorema de Gauss-Bonnet Global). *Seja  $\Omega \subseteq S$  uma região regular de uma superfície orientada e sejam  $C_1, \dots, C_n$  as curvas fechadas, simples e regulares por partes que formam a fronteira de  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ . Suponha que cada  $C_i$  é orientada positivamente e sejam  $\theta_1, \dots, \theta_p$  o conjunto de ângulos externos das curvas  $C_1, \dots, C_n$ . Então*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_{\Omega} K d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(\Omega),$$

*onde  $s$  denota o comprimento de arco de  $C_i$ , e a integral sobre  $C_i$  significa a soma das integrais em todos os arcos de  $C_i$*

Com esse teorema incrível, que relaciona a característica de Euler de uma superfície compacta, que é um conceito puramente topológico, e sua curvatura gaussiana é que encerramos nosso estudo neste trabalho.



## *Considerações Finais*

No trabalho de conclusão de curso é a primeira vez nos aprofundamos sobre um assunto, é quando realmente começamos a escrever o que estudamos formalmente, é o momento em que a pesquisa se torna essencial e que o gosto pelo estudo torna-se fascinante.

Estudar geometria diferencial de superfícies foi um grande desafio, já que no curso de licenciatura em matemática não temos essa disciplina. No entanto, foi muito prazeroso poder estudar conceitos nunca vistos e usando os conhecimentos de cálculo e álgebra linear estudados durante o curso, conseguir obter um bom aprendizado.

Poder construir o conhecimento desde a simples definição de superfície regular até a demonstração do teorema de Gauss-Bonnet, passando por definições e resultados importantíssimos é muito gratificante e nos mostra quanta coisa existe para estudar sobre a geometria diferencial e sobre a própria matemática.

Por fim, esperamos que o estudo abordado neste trabalho possa ser útil a outras pessoas que desejam estudar geometria diferencial.

## *Referências*

- [1] P.V. Araújo and Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Rio de Janeiro). *Geometria Diferencial*. Matemática Universitária. IMPA, 1998.
- [2] M.P. Carmo and P. Roitman. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.
- [3] E.L. Lima. *Curso de análise*. Number v. 1. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1995.
- [4] E.L. Lima. *Análise no espaço  $R^n$* . Coleção matemática universitária. IMPA, 2000.